Undersöka ändringskvoten

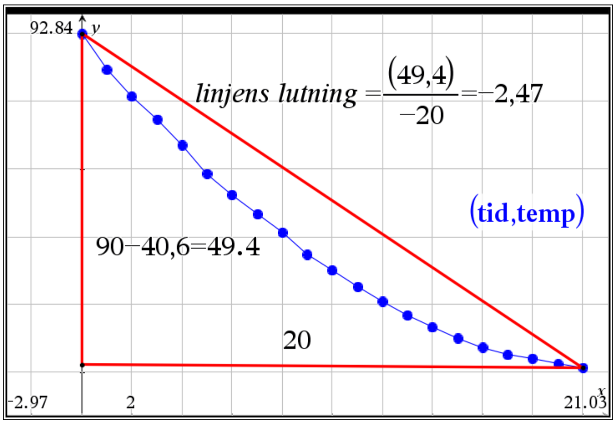
Vi utgår i denna aktivitet från data om matningar av temperaturen i ett reaktionskärl där man är tvungen att styra temperatursänkningen noggrant.

	A tid	B temp	C	D	E	F	G
=							
1	0.	90.					
2	1.	84.7					
3	2.	80.8					
4	3.	77.3					
5	4.	73.5					
6	5.	69.3					
7	6.	66.2					
8	7.	63.3					
9	8.	60.6					
10	9.	57.4					

B4 77.3

Vi ser att temperaturen avtar mer från början än senare. Första minuten sjönk temperaturen ca 5 grader men efter knappt 20 minuter mindre än 1 grad.

Här visar vi i ett diagram hur temperaturen sjunker. Hypotenusan i den röda triangeln visar en linjär temperatursänkning och då skulle ändringskvoten, som ger ett mått på lutningen, vara -2,47.



Vi beräknar nu ändringskvoten i enminuters-intervall i kalkylbladet.

På nästa sida lägger nu in samma kalkylblad igen men med en ny kolumn där vi beräknar ändringskvoten **varje minut.** Titta på formeln i cell c1. Där ska vi ha

$=\frac{b2-b1}{a2-a1}$.

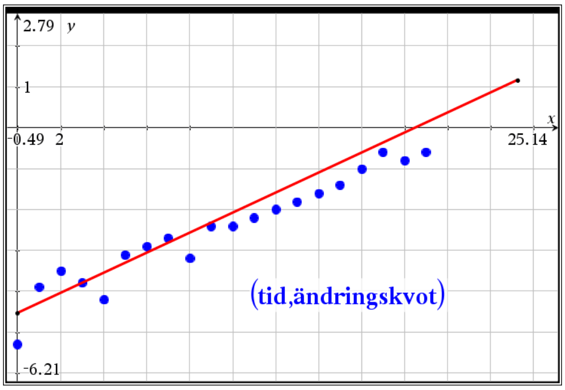
Här beräknar vi alltså temperaturhöjningen/minut i det första intervallet. Vi kunde ha ha haft andra tider än jämna minuter. När vi beräknar differenskvoten så blir det ju ändå tempertaturändring per minut.

Vi markerar nu cellen och använder funktionen Fylla för att räkna ut värden i efterföljande rader. I cell c2 ska det då stå $=\frac{b3-b2}{a3-a2}$ osv.

På sid 6 plottar vi nu hur ändringskvoten ändras efterhand.

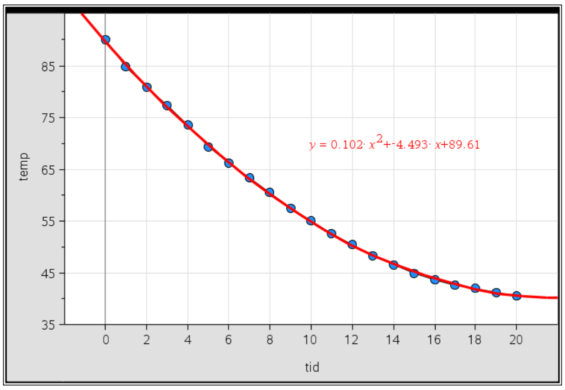
	A tid	B temp	C ändringskvot	D	E	F
=						
1	0.	90.	-5.3			
2	1.	84.7	-3.9			
3	2.	80.8	-3.5			
4	3.	77.3	-3.8			
5	4.	73.5	-4.2			
6	5.	69.3	-3.1			
7	6.	66.2	-2.9			
8	7.	63.3	-2.7			
9	8.	60.6	-3.2			
10	9.	57.4	-2.4			

D1



Vi har här lagt in en linje för hand som visar ungefär hur ändringskvoten stiger från ca -5 till ca -0,5.

Vi gör nu en regressionsanalys på data. En kvadratisk modell ger resultatet $y = 0{,}102x^2 - 4{,}493x + 89{,}61$.



Nu beräknar vi ändringskvoten för den framräknade funktionen när h=1.

Nu ska vi räkna på ändringskoten för vår framräknade funktion. Den modellerar ju väldigt bra data. Vi definierar först funktionen:

Define $f(x)=0.102\cdot x^2-4.493\cdot x+89.61$ ▸ *Klar*

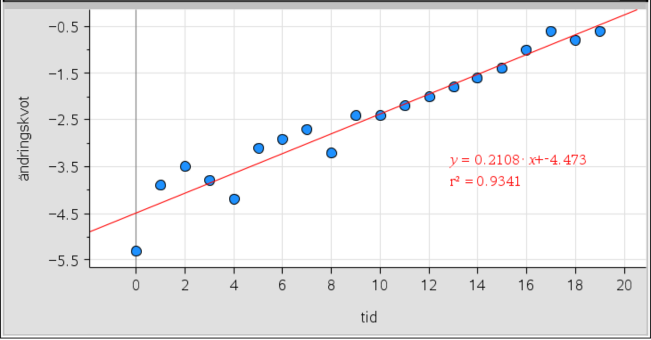
Ändringskvoten beräknas så här: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Vi gör nu beräkningen med **h=1**: $\frac{f(x+1)-f(x)}{1}$ ▸ $0.204\cdot x-4.391$

Vi kontrollerar hur det stämmer med TI−Nspires inbyggda verktyg för linjär regression. Se nästa sida.

Vi gör nu en jämförelse med de data vi har på ändringskvoten från kalkylarket. Vi får att bästa räta linjen har ekvationen $y=0{,}2108x-4{,}473x$.

Nu gör vi en regressionsanalys på hur ändringskvoten beror av tid. Stämmer ganska bra med beräkningen på förra sidan. Lägg gärna in det framräknande funktionen från förra sidan.



Ekvationerna skiljer sig lite åt. Först beräknade vi ekvationen med hjälp av ändringskvoten för den framräknade andragradsfunktionen.

I det andra fallet gjorde vi en linjär regressionsanalys på data från kalkylarket.

Avslutningsvis så betraktar vi ändringskvoten för en andragradsfunktion mer allmänt. Vi visar också hur man beräknar den *symmetriska* ändringskvoten. Det blir dock många termer att hålla reda på om man gör beräkningen för hand. 12 st termer blir det här.

För en allmän andragradsfunktion som vi kallar g(x) blir det så här. Först definierar vi funktionen

Define $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ▸ *Klar*

Vi beräknar ändringskvoten:

$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ▸ $2.\cdot(a\cdot x+0.5\cdot(a\cdot h+b))$ ⚠

Vi förenklar:

expand$(2.\cdot(a\cdot x+0.5\cdot(a\cdot h+b)))$

Ibland använder man den s.k. *symmetriska* ändringskvoten. Den ger oftast ett bättre värde. Vi prövar nu den på vår allmänna andragradsfunktion.

$g(x)$ ▸ $a\cdot x^2+b\cdot x+c \Rightarrow \frac{g(x+h)-g(x-h)}{2\cdot h}$ ▸ $2.\cdot(a\cdot x+0.5\cdot b)$ ⚠

Uttrycket förenklas till $2\cdot a\cdot x+b$. *Varför blir det så?*

expand$(g(x+h))$ ▸ $a\cdot x^2+2.\cdot a\cdot h\cdot x+b\cdot x+a\cdot h^2+b\cdot h+c$

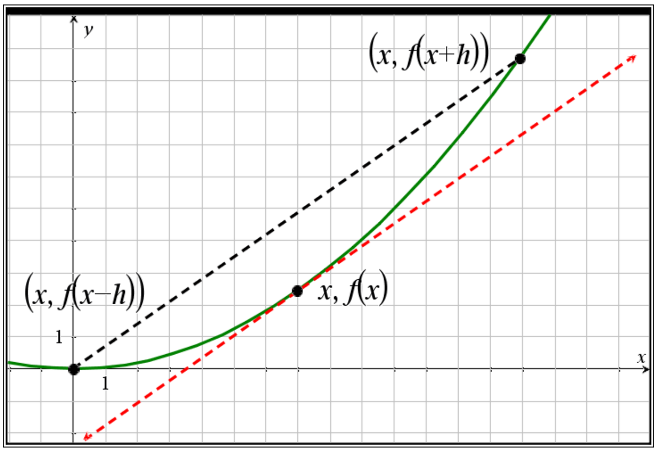
expand$(g(x-h))$ ▸ $a\cdot x^2-2.\cdot a\cdot h\cdot x+b\cdot x+a\cdot h^2-b\cdot h+c$

$$\frac{a\cdot x^2+2.\cdot a\cdot h\cdot x+b\cdot x+a\cdot h^2+b\cdot h+c-a\cdot x^2+2.\cdot a\cdot h\cdot x-b\cdot x-a\cdot h^2+b\cdot h-c}{2\cdot h}$$

De flesta termer försvinner och kvar blir bara $2\cdot a\cdot x+b$.
Ändringskvoten beror alltså inte alls på värdet på h.

Man kan också resonera kring den symmetriska ändringskvoten ur ett geometriskt perspektiv.

så



För att gå vidare med derivator så tittar man nu på uttrycken för ändringskvoten när värdet på h går mot noll.