Tillämpningar på differentialekvationer

I denna aktivitet tar vi upp modeller från naturvetenskapen. Vi utnyttjar TI-Nspire´s grafiska/numeriska analysverktyg för differentialekvationer.

Problem 1

Logistisk tillväxt

En differentialekvatione $y´=k·y$ innebär att tillväxten är proportionell mot populationens storlek. Vi har då en exponentiell tillväxt. En nackdel med tillväxten i denna modell är att antalet individer växer över alla gränser. Det är inte särskilt realistiskt. Det är då rimligare att anta att det finns en maximal storlek på populationen som motsvarar livsbegränsande betingelser, t.ex. tillgänglig mängd mat eller utrymme.

I den matematiska modellen låter vi då derivatan också vara proportionell mot skillnaden mellan populationens maximala värde och aktuell mängd, Vi kallar maximala värdet *M*. Detta brukar kallas kallas *Logistiska tillväxtekvationen*. Effekten av den nya termen (M - y) innebär att den efter hand begränsar tillväxten y´ för att helt avstanna då y = M. Tillväxten blir då noll, y´ = 0. En tillväxtmodell kan då skrivas:

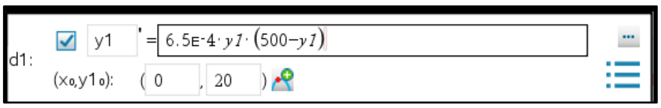
$y´=k·y·(M-y)$ där k är en proportionalitetskonstant.

Vi visar här ett exempel på en sådan tillväxtekvation, taget från en lärobok för gymnasiet.

Man släpper ut 20 kaniner på en isolerad ö. *y*(*t*) är antalet kaniner efter *t* månader. Man uppskattar att högst 500 kaniner kan livnära sig på ön enligt den logistiska tillväxtmodellen. Proportionalitetskonstanten *k* är 0,00065. Rita en lösningskurva för hur populationen utvecklas.

Vi visar nu hur man kan lösa denna *icke linjära* differentialekvation med Eulers metod.

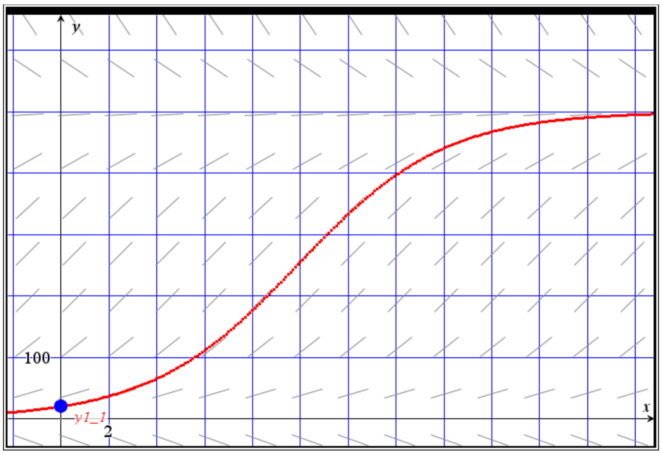
Ekvationen skrivs nin så här i editorn:



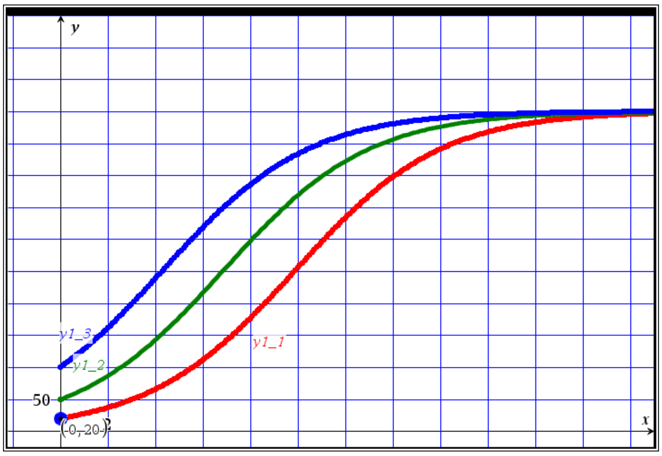
Vi har använt Eulers metod med plottningssteget 0,1.

Så här ser lösningskurvan ut. Den blå punkten är begynnelsevärdena. Man kan dra i denna pukt för att få andra startvärden.

Vi har lagt in ett riktningsfält också. Om man klickar på beteckningen för lösningskurvan, i detta fall *y1_1*, får man upp fönstret för inmatning och inställningar.



I inställningarna kan man maximalt ha fyra olika begynnelsevillkor. Då får man fyra kurvor ritade. Nedan har vi ritat tre st med begynnelsevillkoren (0, 20), (0, 50) och (0, 100)



Här har vi beräknat den exakta lösningen.

Vi löser här d.e. exakt med begynnelsevillkoret y(0)=20.

deSolve($y'=6.5\text{E-}4\cdot y\cdot(500-y)$ and $y(0)=20,x,y$)

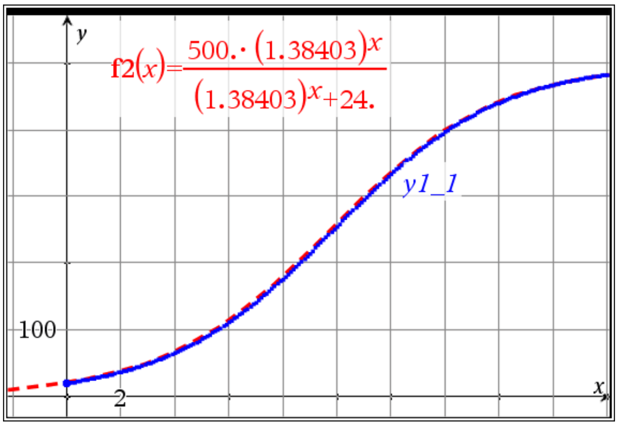
$$\blacktriangleright\; y=\frac{500.\cdot(1.38403)^x}{(1.38403)^x+24.}$$

Vi definierar nu lösningen som en funktioin **f(x)**:

$$\text{Define } f(x)=\frac{500.\cdot(1.38403)^x}{(1.38403)^x+24.} \;\blacktriangleright\; \textit{Klar}$$

Vi kan direkt beräkna funktionsvärden: $f(0) \blacktriangleright 20.$
$f(18) \blacktriangleright 467.675$

Vi prövar nu att plotta lösningskurvan med Eulers metod och den exakta lösningen samtidigt. Se nästa sida.

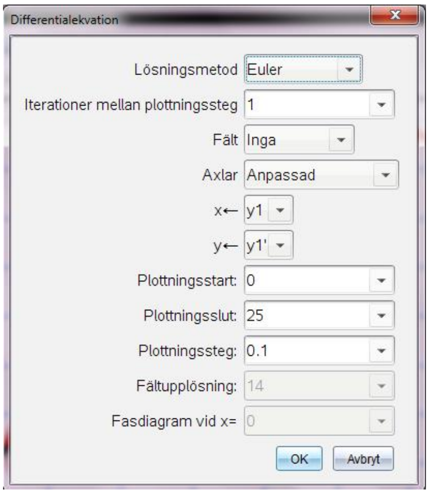


Vi ser att kurvorna överlappar varandra. Eulers metod fungerar alltså utmärkt här.

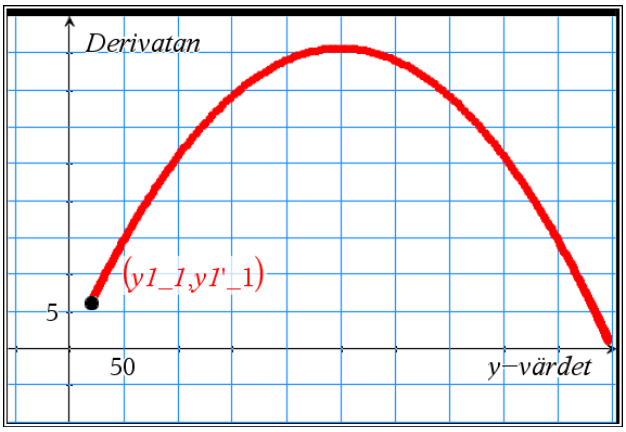
Pröva också att öka värdet på proportionalitets-konstanten och se hur det påverkar lösningskurvan.

Problem 2

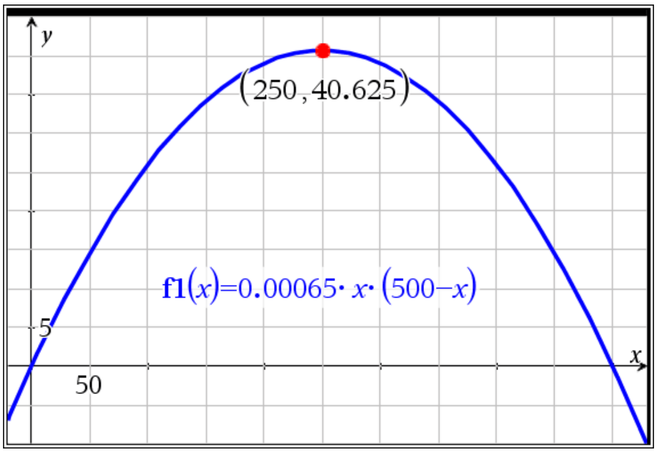
En fråga man kan ställa i det här problemet är när *tillväxten* är som *störst*, alltså när är y´ som störst. Man kan då ställa in på en anpassad visning och ha *y* som vågrät axel och *y*´som lodrät axel. Se inställningarna nedan.



Här har vi ritat y´mot y och vi kan grafiskt eller med spårning se maxvärdet. Genom att ställa in ett bra fönster får vi då denna kurva. Vi ser att maxvärdet verkar vara 250.



Vi kan ju också se den ursprungliga ekvationen som ett ett andragradsuttryck i y där y´är tillväxthastigheten. Då kan vi rita en vanlig funktion. Vi ser att maxvärdet, alltså maxvärdet för y´, är 250. Om vi tittar på lösningskurvan ser vi att det svarar mot ett *x*-värde på 10. Det är lösningskurvans inflexionspunkt.



Problem 3

Kroppar som faller

Ett föremål som faller utan begynnelsehastighet följer följande diferentialekvation:

$$\frac{dy}{dt}=9{,}8-0{,}0025y^2 \quad y(0)=0$$

där *y* är hastigheten efter tiden *t* sekunder.

a) hur stor är hastigheten efter 2 sekunder, 4 sekunder?

b) Hur snabbt kommer föremålet upp i hastigheten 20 m/s?

Den matematiska modellen härleds lätt ifrån fysikens lagar:

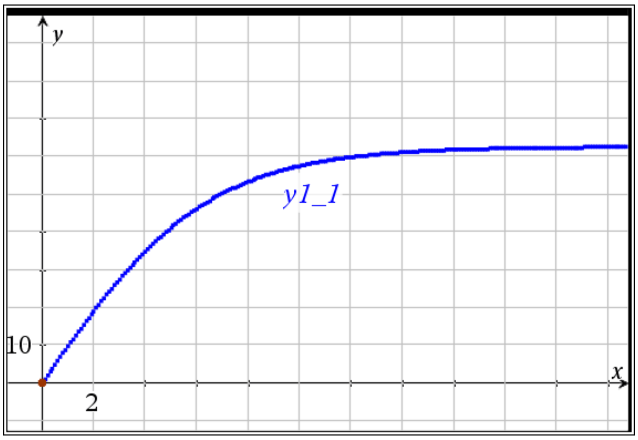
$$m\cdot\frac{dv}{dt}=m\cdot g-k\cdot v^2$$

Där *k* är en proportionalitetskonstant och *m* är massan. Förenkling av uttrycket ger

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\cancel{m}\cdot g}{\cancel{m}}-\frac{k}{m}\cdot v^2$$

k/m blir då en ny konstant.

Plottning av lösningskurvan med steglängden 0,1 ger följande resultat. Se nästa sida.



Vi kan direkt uppskatta hastigheterna efter 2 resp. 4 sekunder till 20 m/s och 35 m/s.

Hur stor är nu gränshastigheten? Den ksn ju lätt beräknas ur differentialekvationen när man sätter y´ lika med noll. Vi får då

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}0025}} \approx 63 \text{ m/s}$$

Problem 4

En fallskärmshoppare med fallskärm har farten 30 m/s precis då fallskämen utvecklas. Hopparen påverkas nedåt av sin tyngd och uppåt av en bromskraft som kan antas vara proportionell mot hastigheten i kvadrat.

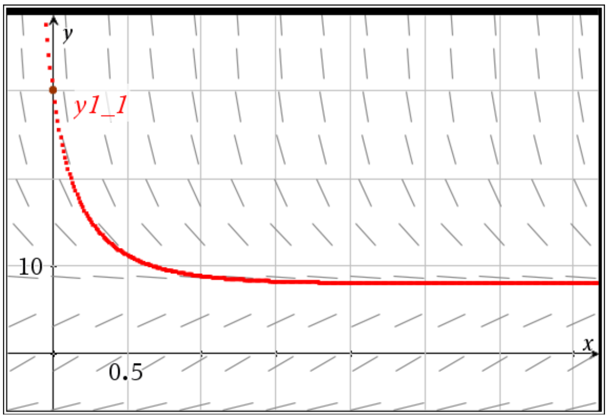
Hopparens acceleration som funktion av hastigheten kan skrivas

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}15v^2$$

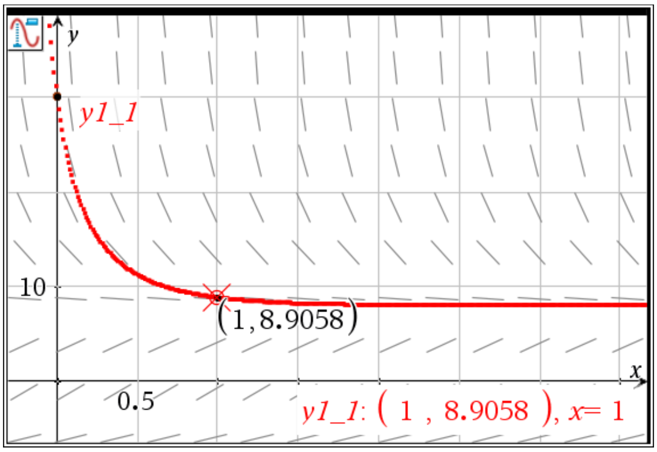
a) Beräkna hopparens hastighet efter 1 sekund.

b) Vilken är hopparens högsta hastighet (gränshastighet).

Vi använder Eulers metod med steglängden 0,01. Så här ser lösningskurvan ut.



Spårning i lösningskurvan ger hastigheten 8,9 m/s efter 1 sekund.



Gränshastigheten beräknas ur ekvationen $9{,}8 - 0.15v^2 = 0$ som ger $v \approx 8{,}1$ m/s.

Problem 5

Åter till kaninerna.

Tillbaka till kaninerna i Problem 1

Nu går vi vidare och ökar värdet på proportionaliteskonstanten. Vi varierar värdet på konstanten från 0,001 till 0,015 genom att införa ett stegreglage. Se till att steglängden är 0,0001.

Dra försiktigt i stegreglaget mot större värden och observera vad som händer. Hur ser lösningskurvan ut för värdet 0,04, 0,05 och sedan större värden.

Vad är det som händer??