

Tävlande funktioner

I det första problemet ska vi titta lite närmare hur olika typer av funktioner uppför sig för stora värden på den oberoende variabeln. Vi jämför potensfunktioner och exponentialfunktioner och intresserar oss särskilt för hur snabbt de växer.

Övningen passar bäst för kurs 3 i samband med att man behandlar derivatabegreppet. Förutsätts att man vet lite om egenskaper hos de nämnda funktions-typerna.

I det andra problemet så förutsätts att man känner till begreppet regression och regressionsmodeller, som behandlas i kurs 2.



Tävlande funktioner – vilka växer snabbast?

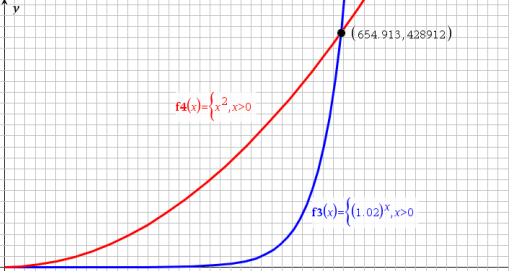
*The mathematics of uncontrolled growth are frightening. A single cell of the bacterium E. coli would, under ideal circumstances, divide every twenty minutes. That is not particularly disturbing until you think about it, but the fact is that bacteria multiply geometrically: one becomes two, two become four, four become eight, and so on. In this way it can be shown that in a single day, one cell of E. coli could produce a super-colony equal in size and weight to the entire planet Earth.**

Michael Crichton (1969) *The Andromeda Strain*

Du har kanske hört att exponentiell tillväxt kan betyda att något växer farligt snabbt. I början ser tillväxten så "snäll" ut men på längre sikt blir den "farlig". Vi ska på de följande sidorna undersöka exponentialfunktioner och deras tillväxt och jämföra med tillväxten hos andra typer av funktioner.

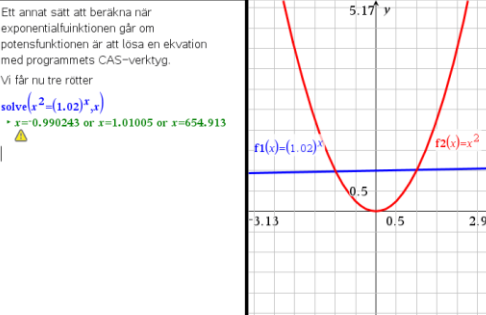
Vi tittar också på några data från den verkliga världen och undersöker enligt olika modeller vad som kan handa på sikt med halten av koldioxid i atmosfären.

Sid 3: Vi ser att exponentialfunktionen går om potensfunktionen när $x \approx 655$. Vi har då inte räknat med den första skärningspunkten för $x > 0$.



Efter lite trixande med koordinatsystemet så upptäcker vi att exponentialfunktionen går om potensfunktionen. Det sker när $x \approx 655$. Ett annat sätt att visa detta är att beräkna kvoten mellan funktionerna. Se nästa sida.

Här har vi löst en ekvation som ger *alla* skärningspunkterna.



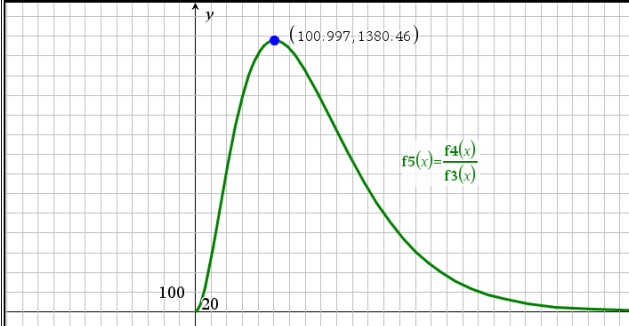
Ett annat sätt att beräkna när exponentialfunktionen går om potensfunktionen är att lösa en ekvation med programmets CAS-verktyg.

Vi får nu tre rötter

$$\text{solve}(x^2 = (1.02)^x, x)$$

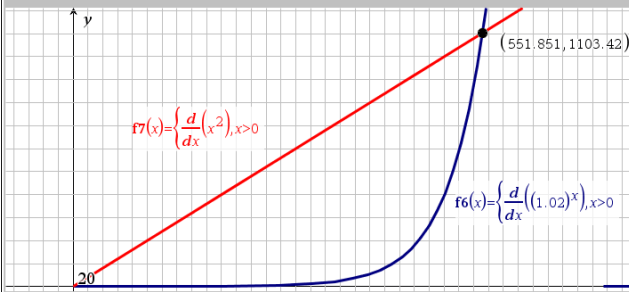
$x = 0.990243$ or $x = 1.01005$ or $x = 654.913$

Sid 4: Vi tar nu till ett trick. Vi tittar närmare på kvoten av funktionerna. Vi får ett maxvärde när $x \approx 101$. Då är kvoten ≈ 1380 . Sedan avtar värdet och går mot 0 när x växer.



Som mest är potensfunktionen ca 1380 gånger större än exponentialfunktionen. Sedan avtar kvoten och vid $x \approx 654$, som vi såg på föregående sida, så är de lika "stora". Sedan avtar kvoten mot noll. Kanske kan vara intressant av undersöka funktionerna *derivator*?

Sid 5: här tittar vi hur derivatafunktionerna växer. En kvadratisk funktion växer ju linjärt så exponentialfunktionens derivata, som också är en exponentialfunktion hinner ikapp. Jämför med grafen på sid 3.

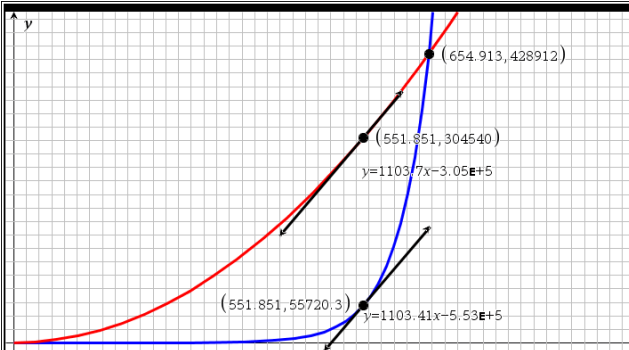


Derivatan av x^2 är en linjär funktion, medan derivatan av en exponentialfunktion också är en exponentialfunktion, så den hinner ikapp. Vid $x \approx 552$ är denna exponentialfunktion ikapp.

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2 \cdot x \quad \frac{d}{dx}((1.02)^x) = 0.019802627296 \cdot (1.02)^x$$

$\text{solve}(2 \cdot x = 0.0198 \cdot (1.02)^x, x) \rightarrow x = 0.009901941426$ or $x = 551.873174277$


Vi ser att riktningskoefficienterna är lika vid x -värdet för derivatafunktionernas skärningspunkt. Tangenterna är ritade med geometriska verktygen, som är tillgängliga i grafapplikationen.



Efter lite trixande med koordinatsystemet så upptäcker vi att exponentialfunktionen går om potensfunktionen. Det sker när $x \approx 655$. Ett annat sätt att visa detta är att beräkna kvoten mellan funktionerna. Se nästa sida.

Problem 2

Modellering med data från den verkliga världen



På nästa sida visar vi i ett kalkylark med årsmedelvärden för halten av CO₂ (i ppm) i atmosfären från 1959 till 2014. Vi har också en lista som visar *differensen* mot föregående år.

Vi gör en del beräkningar och ser vad som händer med koldioxidhalten i framtiden om vi antar att halten av CO₂ fortsätter att växa enligt olika *modeller*. Koldioxidhalten varierar under året och det är därför man får en kurva nedan om man plottar värden för varje månad.

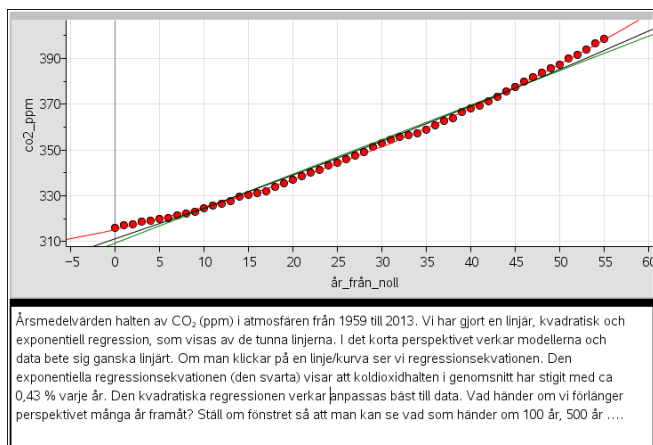
http://co2now.org/

Tidigare sidor vara bara en liten uppvärmning. Ni ska vi titta på verklighetens modeller. Koldioxid (CO₂) är den mest betydelsefulla växthusgasen från mänsklig aktivitet och orsakar global uppvärmning och klimatförändringar. En bra indikator på tillståndet är att titta på aktuella data från Mauna Loa Observatory på Hawaii.

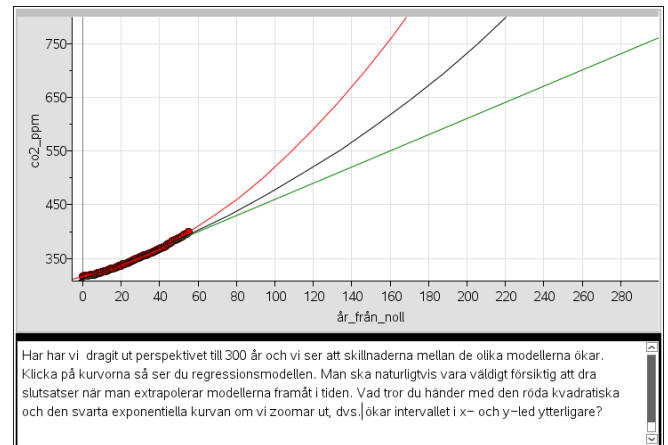
Sid 2: På denna sida visar vi i ett kalkylark med årsmedelvärden för halten av CO₂ (i ppm) i atmosfären från 1959 till 2014. Vi har också en lista som visar differensen mot föregående år. Vi får den listan genom att cell D2 skriva =C2-C1, kopiera denna cellformel och sedan markera ner till D56 och klistra in.

år	år_från_noll	co2_ppm	differens
	=år-1959		
1959	0	315.97	
1960	1	316.91	0.94
1961	2	317.64	0.73
1962	3	318.45	0.81
1963	4	318.99	0.54
1964	5	319.62	0.63
1965	6	320.04	0.42
1966	7	321.38	1.34
1967	8	322.16	0.78
1968	9	323.04	0.88
1969	10	324.62	1.58

Sid 3: Här har vi ritat ett spridningsdiagram och sedan utfört regressionsanalys med tre olika modeller. Regression finns under Analysera i verktygsmenyn.

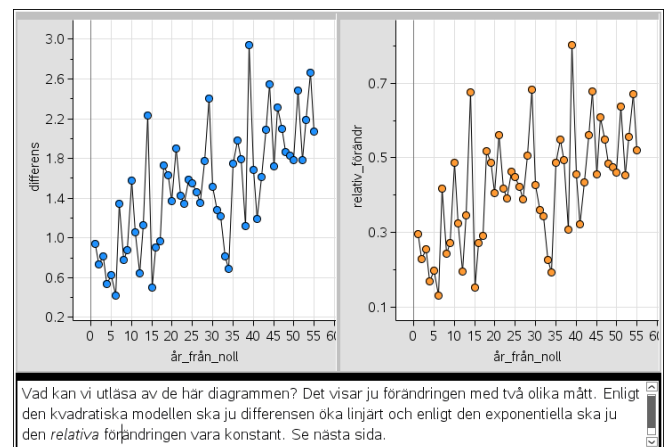


Sid 4: Här har vi zoomat ut och vi ser hur skillnaderna mellan de tre modellerna ökar.



Sid 5-6: Förutom data för differensen har vi även skapat data i en kolumn *relativ_förändr*. På sid 6 plottar vi nu dessa data mot tid i spridningsdiagram.

Vad kan vi utläsa från dessa diagram? En linjär modell verkar det inte vara om man ser på trenden.



Det kan naturligtvis vara vanskligt att modellera så här, speciellt om man extrapolerar modellen lång tid framåt. Den nuvarande ökningstakten är i alla fall oroande.