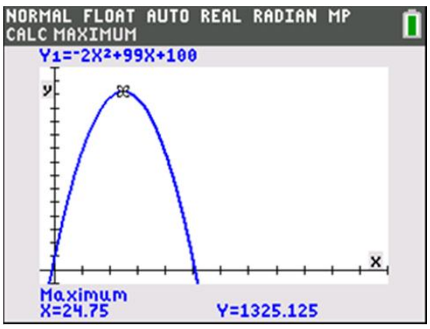
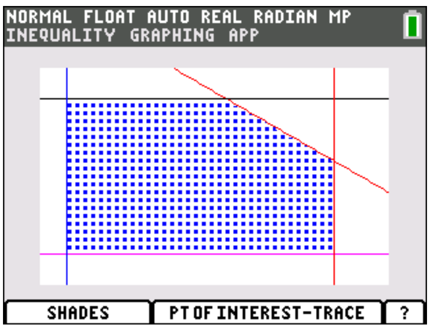
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 43

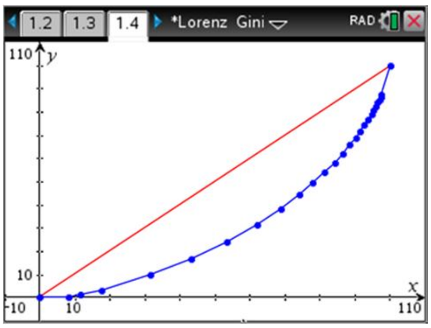
Wiskunde in een economische context

Economische begrippen en vraagstukken voor de tweede graad

Walter De Volder (†)
Guido Herweyers
Dominiek Ramboer







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Inhoud

Eerstegraadsfuncties en marginale waarden

Voor een algemene en meer theoretische behandeling van marginale functies, verwijzen we naar het cahier 41 “Wiskunde in een economische context, economische begrippen en vraagstukken voor de derde graad”. Dit cahier voor de tweede graad behandelt enkel marginale waarden van eerstegraadsfuncties.

Definitie uit de economie

De marginale waarde van een functie is de toename van de functiewaarde wanneer de waarde van de onafhankelijke veranderlijke met 1 eenheid toeneemt.

Voorbeeld:

De marginale kost van een kostenfunctie bij een productie van 200 eenheden is de extra kost om 1 eenheid meer te produceren.
Zo kunnen we ook spreken over de marginale opbrengst of marginale winst bij de totale opbrengstenfunctie of de winstfunctie.

Wiskundige interpretatie bij een eerstegraadsfunctie

De grafiek van een eerstegraadsfunctie $y = m \cdot x + q$ is een rechte. Kies twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) op de rechte en stel $x_2 = x_1 + \Delta x$, $y_2 = y_1 + \Delta y$, dan geldt $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Stellen we $\Delta x = 1$, dan wordt $m = \Delta y$. De richtingscoëfficiënt m is dus de toename in de ordinaat indien de abscis met 1 toeneemt. Voor een eerstegraadsfunctie is de marginale waarde constant en gelijk aan de richtingscoëfficiënt m!

Voorbeelden

Wanneer een fabrikant een product op de markt brengt, moet hij rekening houden met een drietal factoren:

- de totale productiekosten: $K(x) = \begin{pmatrix} \text{variabele} \\ \text{kosten} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{vaste} \\ \text{kosten} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{kost per} \\ \text{eenheid} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \text{vaste} \\ \text{kosten} \end{pmatrix}$,
- de inkomsten (opbrengst): $O(x) = \begin{pmatrix} \text{opbrengst per} \\ \text{eenheid} \end{pmatrix} x$,
- de gemaakte winst:

$$W(x) = O(x) - K(x) = \begin{pmatrix} \text{variabele} \\ \text{winst} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{vaste} \\ \text{winst} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{winst per} \\ \text{eenheid} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \text{vaste} \\ \text{winst} \end{pmatrix},$$

met x het aantal geproduceerde eenheden.

Voorbeeld 1

Gegeven:

Voor een fabrikant van GSM's is de totale kostenfunctie en de totale opbrengstenfunctie gegeven door:

$$\begin{aligned} K(x) &= 200x + 3500 \\ O(x) &= 450x \end{aligned} \quad \text{(in euro).}$$

Gevraagd:

a) Wat is de vaste kost bij de productie van GSM's?

b) Wat is de marginale kost bij een productie van 100 GSM's en 300 GSM's?

c) Wat is de marginale opbrengst?

d) Wat is de vaste winst?

e) Wat is de marginale winst?

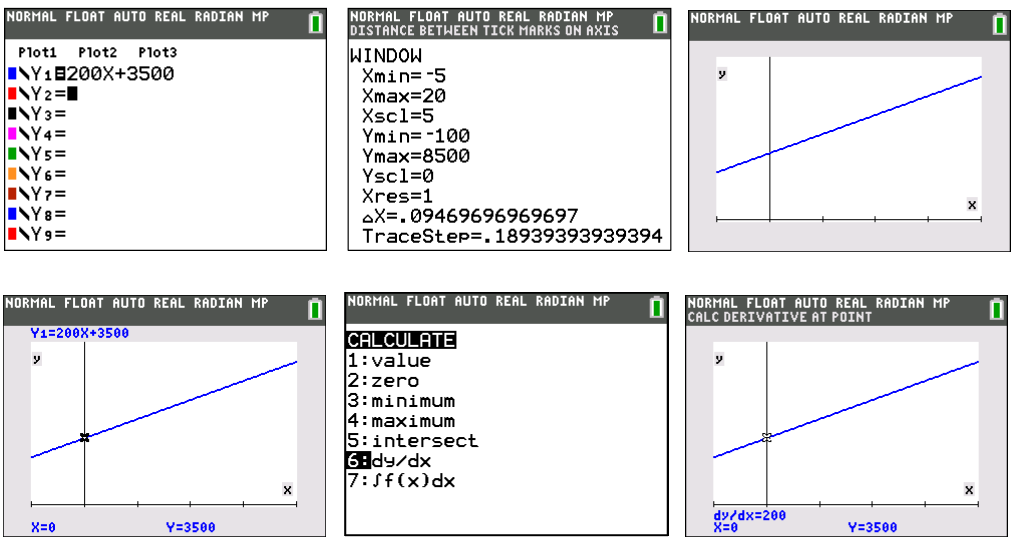
f) Hoeveel GSM-toestellen moet de fabrikant verkopen om winst te maken?

Oplossing:

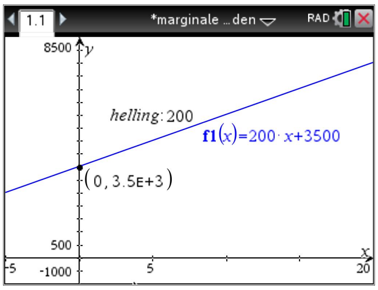
a) De ordinaat van het snijpunt van de grafiek met de y-as: 3500 euro.

b) De richtingscoëfficiënt van de grafiek van de totale kostenfunctie: 200 euro.

TI-84 Plus C



TI-Nspire CX CAS



c) De richtingscoëfficiënt van de grafiek van de opbrengstenfunctie is 450 euro.

d) De winstfunctie wordt gegeven door $W(x) = O(x) - K(x)$:

$W(x) = (450x) - (200x + 3500)$ of $W(x) = 250x - 3500$

De vaste winst is -3500 euro. Dit betekent dat de fabrikant 3500 euro verlies lijdt als hij geen enkele GSM kan verkopen.

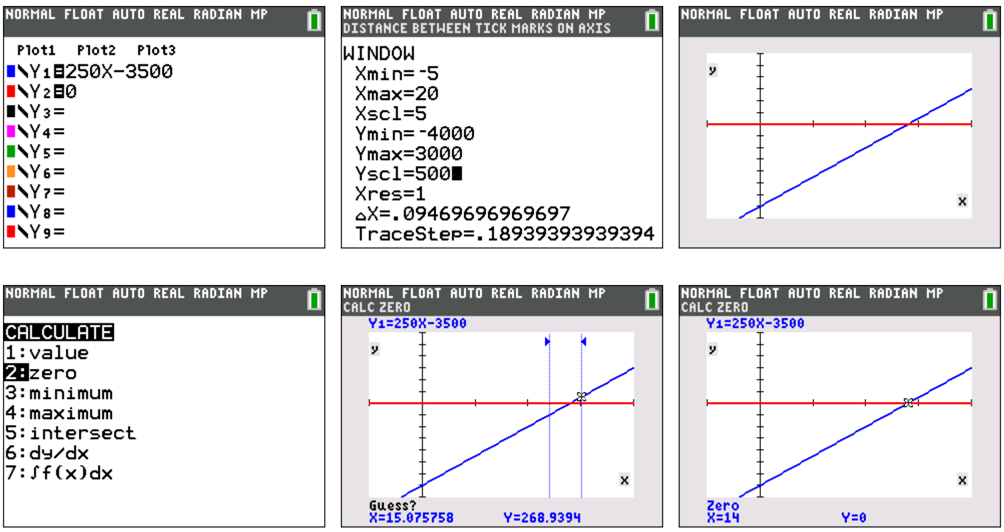
e) De marginale winst bedraagt 250 euro.

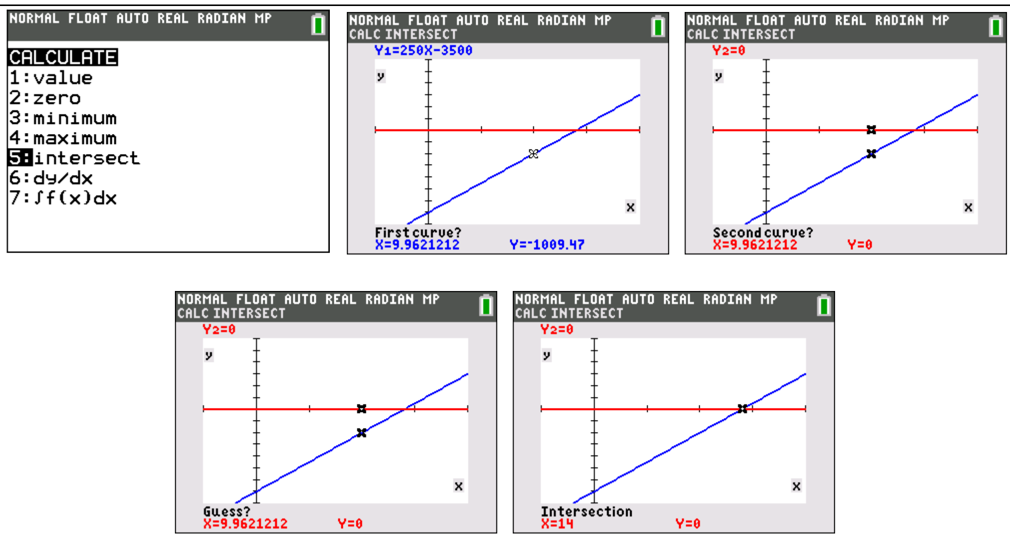
f) Er is winst als:

$$\begin{aligned} W(x) > 0 &\Leftrightarrow 250x - 3500 > 0 \\ &\Leftrightarrow 250x > 3500 \\ &\Leftrightarrow x > 14 \end{aligned}$$

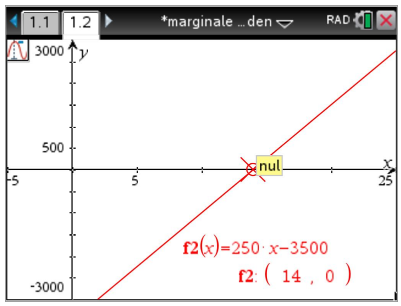
De fabrikant moet minstens 15 toestellen verkopen als hij winst wil maken.

TI-84 Plus C





TI-Nspire CX CAS



Voorbeeld 2

Gegeven:

De marginale kost bij het produceren van een computer is 250 euro. De vaste kosten bedragen 4000 euro. De opbrengstenfunctie wordt gegeven door $O(x) = 750x$, met x het aantal geproduceerde eenheden.

Gevraagd:

a) Bepaal de marginale winst.

b) Bepaal de vaste winst.

c) Bepaal het minimale aantal computers dat de fabrikant moet verkopen om uit de schulden te zijn.

Oplossing:

a) De winstfunctie wordt gegeven door $W(x) = O(x) - K(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} K(x) = 250x + 4000 \\ O(x) = 750x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} W(x) = (750 - 250)x - 4000 \\ = 500x - 4000 \end{array}.$$

De marginale winst bedraagt 500 euro.

b) De vaste winst bedraagt -4000 euro.

c) De fabrikant moet minstens 8 computers verkopen om uit de schulden te zijn.

Grafieken en transformaties

Voorbeeld:

Een vraagfunctie wordt gedefinieerd als:

$q_v = -30p + 0,05i + 2r + 4t$.

met

p: de prijs van het goed,

i: het inkomen,

r: de prijs van een gerelateerd goed,

t: de voorkeur van de consument voor dit goed.

Vragen:

1 Kan men een grafiek van de functie construeren? Waarom wel of niet?

2 Stel dat: $i = 5000$, $r = 25$ en $t = 30$. Construeer de grafiek van de functie. Zorg ervoor dat de verschillende parameters kunnen worden gewijzigd.

3 Wat gebeurt er met de grafiek als de prijs *p* van 5 naar 6 verandert?

4 Wat gebeurt er met de grafiek als *i* de waarde 7400 krijgt i.p.v. 5000?

5 Wat zal de invloed op de grafiek zijn als een andere parameter wijzigt?

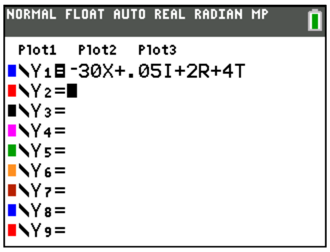
6 In de economie is het gebruikelijk om de prijs op de verticale as uit te zetten en de hoeveelheid op de horizontale as. Maak de nodige omvormingen om, volgens deze afspraak in de economie, een grafiek te construeren.

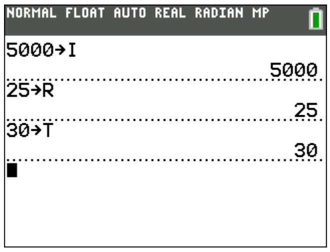
Oplossing:

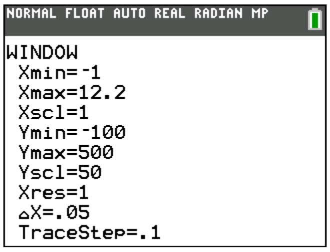
1 Neen dit kan niet omdat er vier variabelen zijn die de waarde van q_v vastleggen. We kunnen slechts grafieken in het vlak maken van functies met één onafhankelijke veranderlijke.

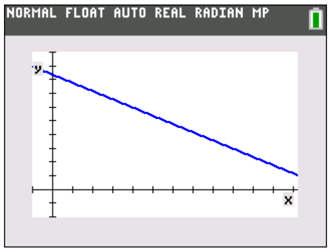
2 We zullen in het voorschrift gebruik maken van parameters waaraan we vooraf een bepaalde waarde toekennen. Zo moeten we het functievoorschrift niet telkens aanpassen voor andere waarden van de parameters. Vervang de waarde van de parameters door andere waarden en de grafiek wordt onmiddellijk getekend met de nieuwe waarden. De onafhankelijke veranderlijke is hier de prijs van het goed.

TI-84 Plus C

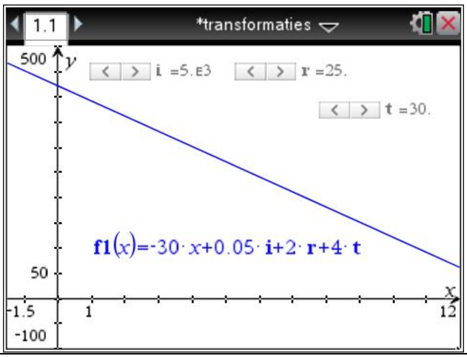






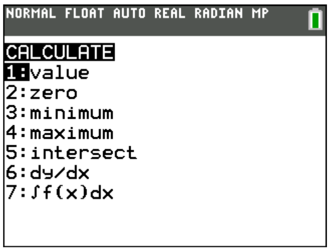


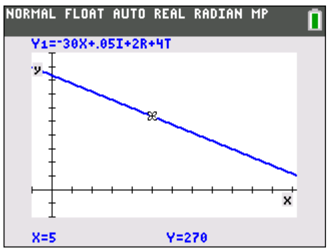
TI-Nspire CX CAS

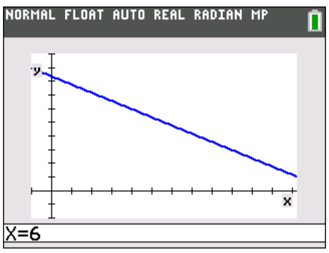


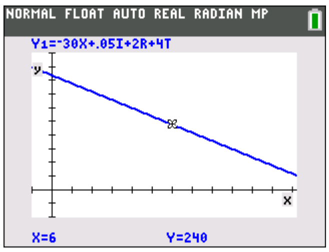
3 Het blijft dezelfde grafiek. We krijgen enkel een ander punt van de grafiek.

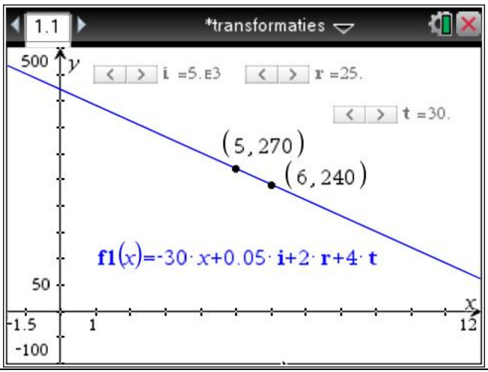
TI-84 Plus C



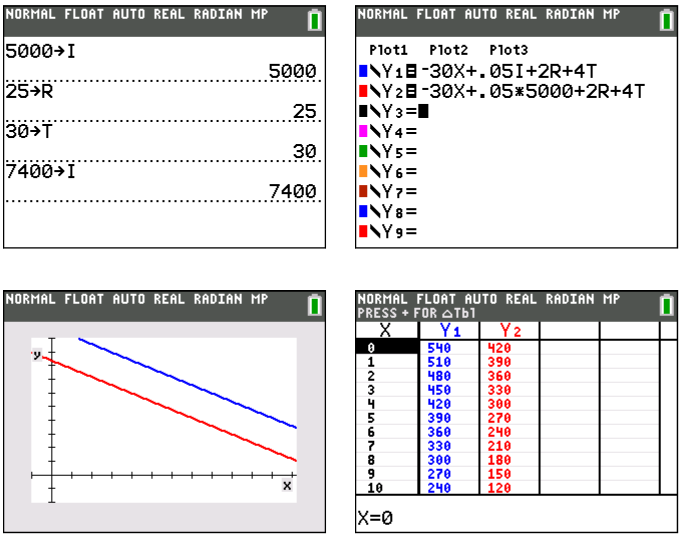




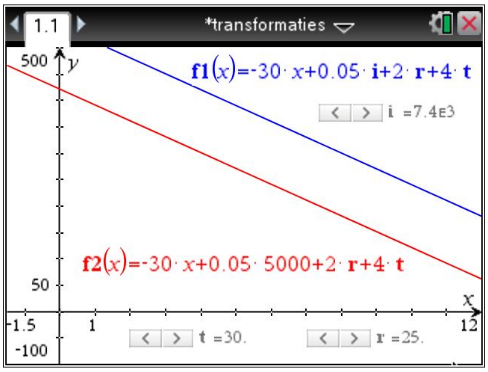


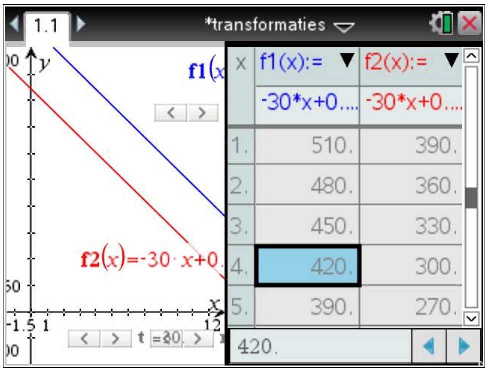
TI-Nspire CX CAS


4 Om het effect duidelijk te maken, is het aangeraden om de grafiek van het oorspronkelijke voorschrift ook nog af te beelden, daartoe vervangen we *i* door 5000 in een nieuw functievoorschrift.
De grafiek maakt een verschuiving volgens de *y*-as naar boven over een bepaalde afstand. Hoe kun je nu die afstand bepalen? De afstand zal gelijk zijn aan $0,05\cdot(7400-5000)=120$.

TI-84 Plus C


TI-Nspire CX CAS





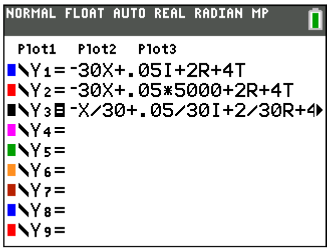
5 Zelf eens experimenteren.

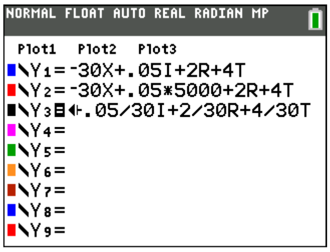
6 We moeten het voorschrift omvormen.

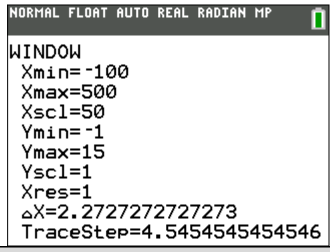
$$q_v = -30p + 0,05i + 2r + 4t \Leftrightarrow 30p = -q_v + 0,05i + 2r + 4t$$

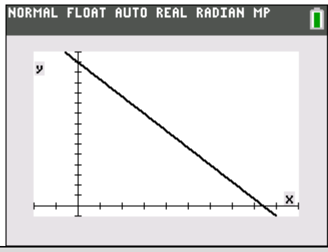
$$\Leftrightarrow p = \frac{-q_v + 0,05i + 2r + 4t}{30}$$

TI-84 Plus C

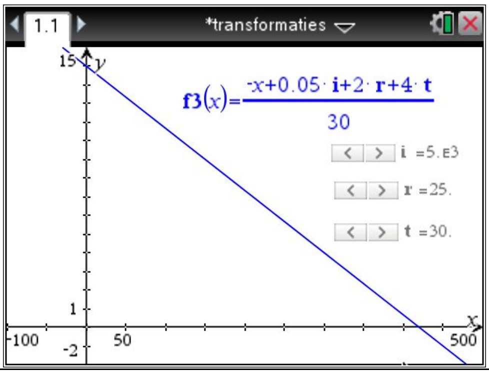








TI-Nspire CX CAS



Opgaven:

1 Stel $q_v = -4p + 0,01i - 5r + 10t$ met $\begin{cases} i = 8000 \\ r = 8 \\ t = 4 \end{cases}$

a) Welke invloed heeft de waarde van *r* op de grafiek van de vraagfunctie?

b) De waarde van *t* verandert van 4 naar 12. Wat gebeurt er met de grafiek?

c) Maak een grafiek van de vraagfunctie volgens de afspraken in de economie.

2 Een persoon beschikt over € 150 voor de aankoop van twee goederen (X,Y). Het ene goed kost € 3 en het andere € 5.

a) Maak een grafiek waarbij alle mogelijke combinaties staan afgebeeld.

b) Wat gebeurt er met de oorspronkelijke budgetlijn als het budget met 25 % afneemt?

c) Wat gebeurt er met de oorspronkelijke budgetlijn als de prijs van het eerste goed verdubbelt?

d) Wat gebeurt er met de oorspronkelijke budgetlijn als de prijs van het tweede goed daalt tot €4?

3 Beschouw een economie bestaande uit de sectoren consumptie *C* en investeringen *I*. Het evenwichtsinkomen (een evenwicht tussen inkomen enerzijds en consumptie en investering anderzijds) wordt gegeven door de volgende formule:

$Y = C + I$ met $\begin{cases} C = 50 + 0,8Y \\ I = 50 \end{cases}$ (*Y* het inkomen, *C* de consumptie en *I* de investering).

a) Construeer de grafiek van de consumptiefunctie. Op welke as wordt het inkomensniveau uitgezet en op welke as het consumptieniveau?

b) Construeer de grafiek van de functie *C*+*I*. Wat is er gebeurd met de grafiek uit (a) om de grafiek uit (b) te verkrijgen?

c) Bepaal het evenwichtsinkomen op een grafische en algebraïsche manier.

d) Onderzoek de invloed van het investeringsniveau op het evenwichtsinkomen.

Niveauverzamelingen

Probleem 1

Gegeven:

De totale ontvangsten (TO) van een bedrijf (in eenheden van € 100 000) bij de productie van een hoeveelheid q (in eenheden van 100 exemplaren) worden gegeven door: $TO(q) = -q^2 + 5q$.

Gevraagd:

a) Hoe groot zijn de ontvangsten bij de productie van 125 eenheden?

b) Hoe groot moet de productie zijn om een totale ontvangst te realiseren van € 600000?

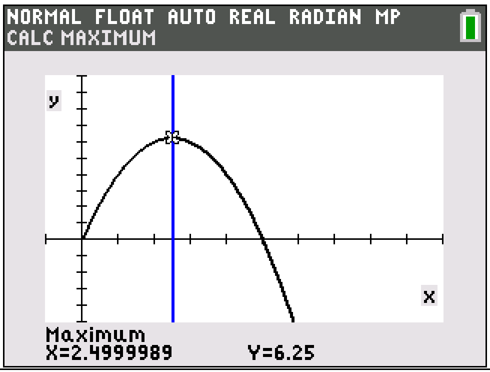
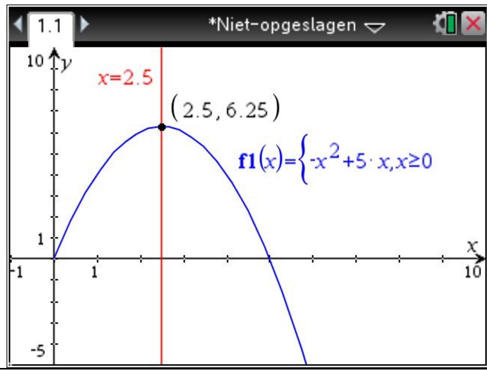
Oplossing:

a) De productie bedraagt 125 eenheden: $q = \frac{125}{100} = 1,25$.

dan wordt:

$$\begin{aligned} TO(1,25) &= -(1,25)^2 + 5 \cdot 1,25 \\ &= 4,6875 \end{aligned}$$

Antwoord: de totale ontvangsten bedragen $4,6875 \times 100000 = 468750$ EUR.

TI-84 Plus C	TI-Nspire CX CAS
	

Interpretatie: het is logisch dat de totale ontvangsten stijgen naarmate het aantal geproduceerde goederen tot 250 toeneemt. Het is wel merkwaardig dat de totale ontvangsten gaan dalen van zodra het aantal geproduceerde goederen groter wordt dan 250.

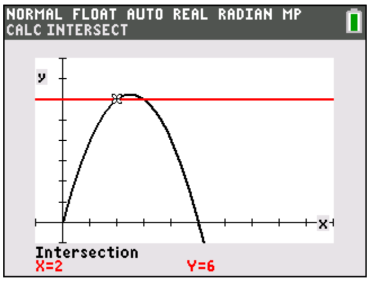
Een verklaring kan worden gezocht in het feit dat een grotere productie ook een grotere omzet vergt. Een grotere omzet van een product wordt maar verkregen door de prijs van het product te verlagen.

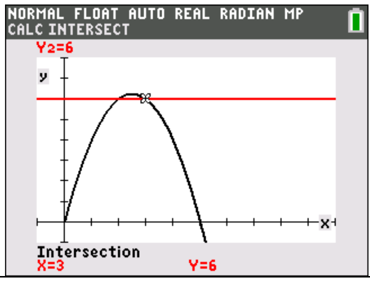
b) $TO = 600000$ betekent dat $6 = -q^2 + 5q$.

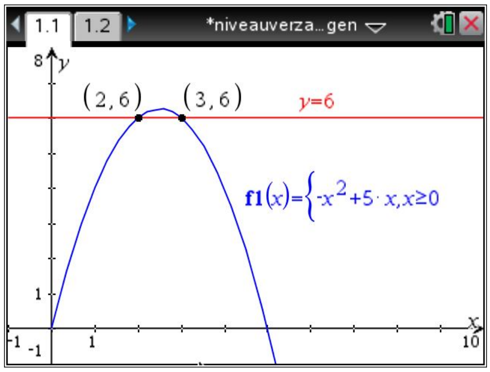
Analytische oplossing:

$$q^2 - 5q + 6 = 0 \Leftrightarrow (q-2)(q-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow q = 2 \text{ of } q = 3$$

Grafische oplossing:

<table>
<tr><th>TI-84 Plus C</th><th>TI-Nspire CX CAS</th></tr>
<tr><td>




</td><td>


</td></tr>
</table>

De verzameling van de waarden van q die TO op niveau 6 brengen noemt men de niveauverzameling van niveau 6 van de functie $TO(q)$: $\{2,3\}$.

Probleem 2

Gegeven:

Men koopt q_1 eenheden van goed 1 en q_2 eenheden van goed 2. De eenheidsprijs van de goederen bedraagt respectievelijk 25 en 50 euro. De kost van deze goederenbundel (q_1, q_2) wordt gegeven door: $K = 25q_1 + 50q_2$.

Gevraagd:

a) Wat is de kostprijs van de goederenbundel (20, 40)?

b) Welke goederenbundels kunnen worden gekocht als men over 1000 euro beschikt?

c) Welke goederenbundels leveren een kost lager dan 1200 euro?

Oplossing:

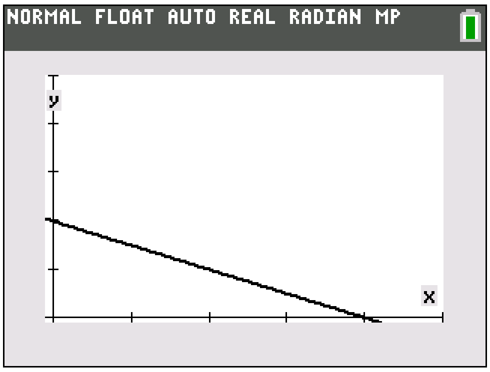
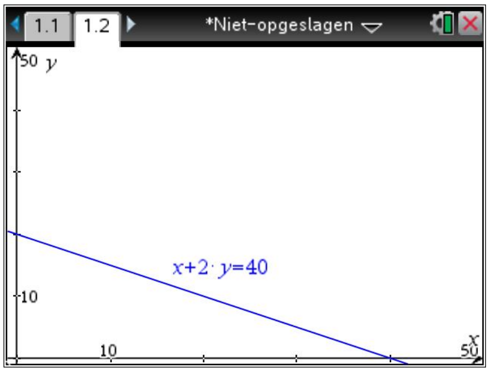
a) $\left.\begin{aligned} q_1 &= 20 \\ q_2 &= 40 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K = 25 \cdot 20 + 50 \cdot 40$

$$= 500 + 2000$$
$$= 2500$$

Antwoord: De kostprijs bedraagt € 2500.

b) Het bedrag dat ter beschikking is, bedraagt € 1000.We zoeken de aantallen van elk goed dat we kunnen aankopen voor dit bedrag. Er zijn meerdere mogelijkheden.

De voorwaarde is $1000 = 25q_1 + 50q_2$ of na vereenvoudiging $40 = q_1 + 2q_2$. Dit is de vergelijking van een rechte in het vlak. Rekening houdend met de beperkingen van q_1 en q_2, vormen de mogelijke combinaties een lijnstuk (in het eerste kwadrant) met grenspunten (0,20) en (40,0). De grenspunten zijn goederenbundels waarbij de aankoop beperkt blijft tot één goed.

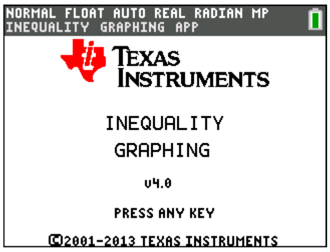
TI-84 Plus C	TI-Nspire CX CAS
	

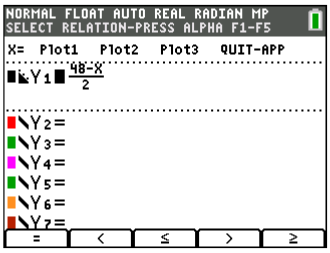
Antwoord: De verschillende goederenbundels worden gegeven door:

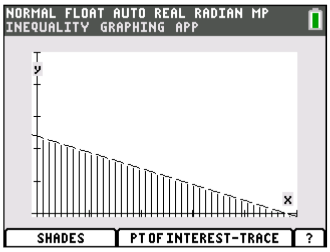
$$\left(k, \frac{40-k}{2}\right) \text{ met } k \in [0,40]$$

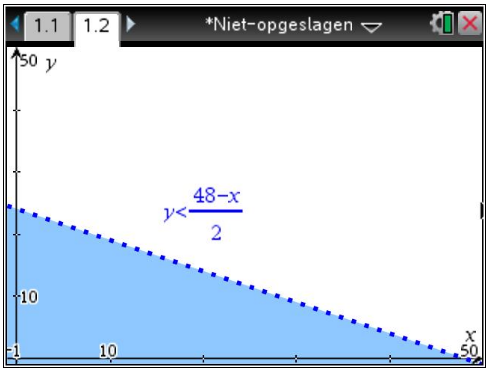
De niveauverzameling van niveau 1000 bij $K(q_1, q_2)$ wordt gegeven door het lijnstuk met vergelijking $25q_1 + 50q_2 = 1000$, $0 \leq q_1 \leq 40$ of $q_1 + 2q_2 = 40$, $0 \leq q_1 \leq 40$.

c) De voorwaarde is $1200 > 25q_1 + 50q_2$ of $48 > q_1 + 2q_2$.

<table>
<tr><th>TI-84 Plus C</th><th>TI-Nspire CX CAS</th></tr>
<tr><td>






</td><td>


</td></tr>
</table>

Oefening

De totale ontvangsten (TO) in EUR bij een verkoop van q exemplaren van een tijdschrift worden gegeven door: $TO(q) = 2{,}5q$. De vaste productiekosten bedragen 1425 euro. De variabele kosten zijn evenredig met q, de evenredigheidsfactor per tijdschrift is 0,25 euro. Bepaal het break-even punt (het aantal tijdschriften dat moet verkocht worden om noch winst noch verlies te maken).

Optimale taksheffing

Dit voorbeeld gaat over het heffen van een eenheidsbelasting bij een gegeven vraag- en aanbodfunctie.

Beschouw:

$\begin{cases} q_v = 12 - p \\ q_a = p - 4 \end{cases}$ met p de prijs voor één geproduceerd goed, q_v de grootte van de vraag, q_a de grootte van het aanbod.

Vraag:

Welke taks t (per eenheid) moet men heffen om de belastinginkomsten te maximaliseren (deze taks wordt gedragen door de consument)?

Oplossing:

Wanneer we de taks in rekening brengen, worden de bovenstaande vergelijkingen aangepast tot:

$$\begin{cases} q_v = 12 - (p + t) \\ q_a = p - 4 \end{cases}.$$

Door de invoering van de taks zal de vraag naar het product verminderen.

We spreken van een evenwicht als $q_v = q_a$ en van een evenwichtspunt dat de oplossing is van de evenwichtsvoorwaarde:

$$\begin{aligned} 12 - p - t = p - 4 &\Leftrightarrow 2p = 16 - t \\ &\Leftrightarrow p = 8 - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

De evenwichtsprijs $\overline{p}$ is $8 - \frac{t}{2}$ en de evenwichtsvraag $\overline{q} = 12 - 8 + \frac{t}{2} - t = 4 - \frac{t}{2}$.

Het evenwichtspunt heeft dus als coördinaten $\left(\overline{q}, \overline{p}\right) = \left(4 - \frac{t}{2}, 8 - \frac{t}{2}\right)$.

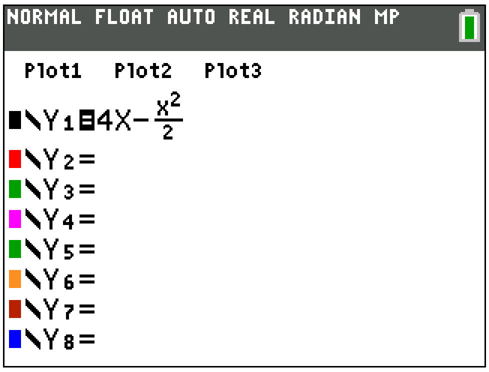
Het totaalbedrag aan inkomsten van belastingen is

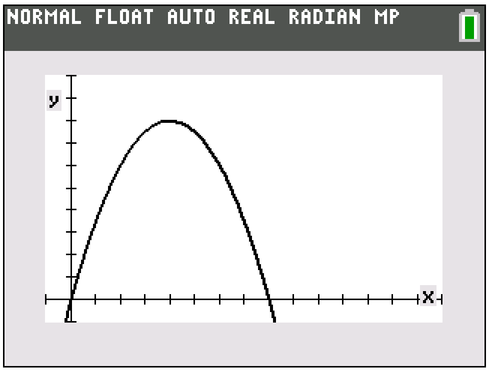
$T = \overline{q} \cdot t = \left(4 - \frac{t}{2}\right)t$ of $T = 4t - \frac{t^2}{2}$.

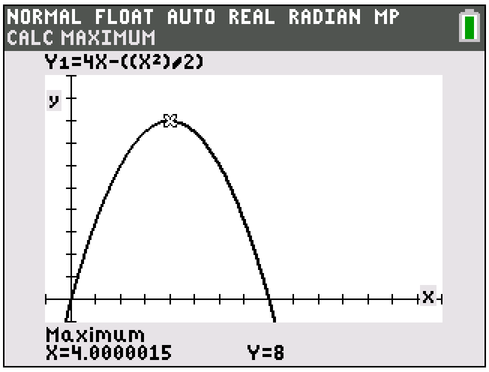
Dit is een bergparabool, de functie bereikt haar maximale waarde in de top als

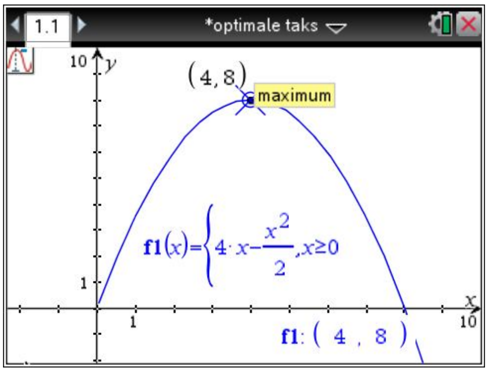
$$t = \frac{-4}{2\left(\frac{-1}{2}\right)} = 4.$$

Grafisch:

<table>
<tr><th>TI-84 Plus C</th><th>TI-Nspire CX CAS</th></tr>
<tr><td>






</td><td>


</td></tr>
</table>

Algemener (leerstof van de derde graad) voor een willekeurige functie $T(t)$ met afgeleiden:

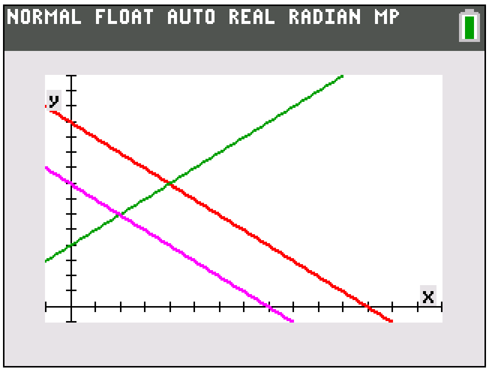
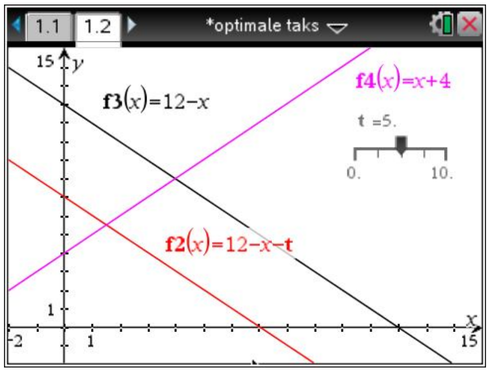
- $\frac{dT}{dt} = 0$ en een tekenwissel
- $\frac{dT}{dt} = 0$ en $\frac{d^2T}{dt^2} < 0$ voor de t-waarde waarvoor de eerste afgeleide nul is.

Dit wordt dan:

$$\frac{dT}{dt} = 4 - t = 0 \Rightarrow t = 4$$

$\frac{d^2T}{dt^2} = -1$ voor iedere t-waarde, waaruit volgt dat $t = 4$ een maximum oplevert voor de totale belastinginkomsten. De bijhorende evenwichtshoeveelheid q is 2.

Men kan ook de theorie van transformaties van grafieken illustreren. De grafiek van de oorspronkelijke vraagfunctie ondergaat een verticale verschuiving naar beneden over een afstand t om samen te vallen met de grafiek van de nieuwe vraagfunctie. Zoals gebruikelijk in de economie zetten we p uit op de verticale as:

TI-84 Plus C	TI-Nspire CX CAS
	

Lineaire programmering

Inleiding

Een probleem van lineaire programmering valt onder de ruimere groep van optimaliseringsproblemen. Ze hebben als doel om de grootste of kleinste waarde van een bepaalde grootheid (bijvoorbeeld: winst, verlies, kosten, …) te berekenen, rekening houdend met verscheidene beperkingen (bijvoorbeeld: beperkte voorraad, beperkt budget, …).
Bij lineaire programmering kunnen de te optimaliseren grootheid en alle voorwaarden geschreven worden met lineaire vergelijkingen en/of ongelijkheden.
Het aantal variabelen beperken we hier tot twee, om de oplossing van het gestelde probleem grafisch te kunnen oplossen. Hierdoor kan dit onderwerp aan bod komen in de tweede graad als oefening op ongelijkheden van de eerste graad in twee onbekenden. Naast de meetkundige oplossing bestaat er ook een algebraïsche methode, namelijk de simplexmethode, om die problemen oplossen. Daarbij kunnen dan meer dan twee variabelen worden beschouwd. Dit valt buiten de context van dit cahier.
Voorbeeld:

Maximaliseer: $2x_1 + 3x_2$ (de doelfunctie)

Onder de voorwaarden:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$ (gestelde voorwaarden) en $x_1, x_2 \geq 0$ (aangenomen voorwaarden)

De variabelen x_1, x_2 worden de beslissingsveranderlijken genoemd.

De verzameling van alle punten (x_1, x_2) die voldoen aan de beperkingen (voorwaarden) maar niet noodzakelijk de doelfunctie optimaliseren is meetkundig meestal een *n*-hoek in het (x_1-x_2)-vlak, dit is het oplossingsgebied. Indien dit geen veelhoek is, kan men ervan uitgaan dat er een fout is gebeurd bij het formuleren van het probleem.

Beschouw de doelfunctie $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, zo is $f(1,2) = 8$ en ook $f(4,0) = 8$.

De rechte $2x_1 + 3x_2 = 8$ in het (x_1-x_2)-vlak noemt men een niveaulijn of isolijn. Alle punten (x_1, x_2) op deze rechte leveren voor de doelfunctie de waarde $f(x_1, x_2) = 8$ op.

De niveaulijnen zijn evenwijdige rechten met een vergelijking van de vorm $2x_1 + 3x_2 = c$, met c een constante waarde van de doelfunctie. Naarmate de rechte naar rechts opschuift, vergroot de waarde c van de doelfunctie. De waarde van de doelfunctie wordt maximaal in een hoekpunt van het oplossingsgebied.
In een hoekpunt van het oplossingsgebied is minstens aan 2 ongelijkheden voldaan. Dit wordt een basisoplossing genoemd. De optimale oplossing van het probleem is de dus de basisoplossing waarbij de doelfunctie een maximale waarde bereikt.
Uitzonderlijk kan de maximale niveaulijn van de doelfunctie samenvallen met een zijde van de *n*-hoek van het oplossingsgebied. Alle punten van die zijde leveren dan verschillende alternatieven om de doelfunctie te maximaliseren.
In bepaalde gevallen kunnen er voorwaarden voorkomen die het oplossingsgebied niet veranderen. Dit zijn overbodige voorwaarden die mogen worden weggelaten.

Praktische voorbeelden

1. Een boer heeft een flink stuk land waarop hij suikerbieten en gerst wil verbouwen. De twee variabelen zijn:
   - x: het aantal te verbouwen hectaren suikerbieten
   - y: het aantal te verbouwen hectaren gerst.

   De beperkingen (voorwaarden) worden in de volgende tabel weergegeven:

	Suikerbieten	Gerst	Maximaal beschikbaar
(1) aantal werkdagen per ha	2	1	10
(2) kosten landarbeider per ha	45	30	270
(3) kosten kunstmest per ha	30	15	180

Dit levert de volgende ongelijkheden in x en y :

$$\begin{cases} (1) \quad 2x + y \leq 10 \\ (2) \quad 45x + 30y \leq 270 \\ (3) \quad 30x + 15y \leq 180 \end{cases}$$

Er zijn nog twee bijkomende beperkingen (voor de hand liggende voorwaarden):

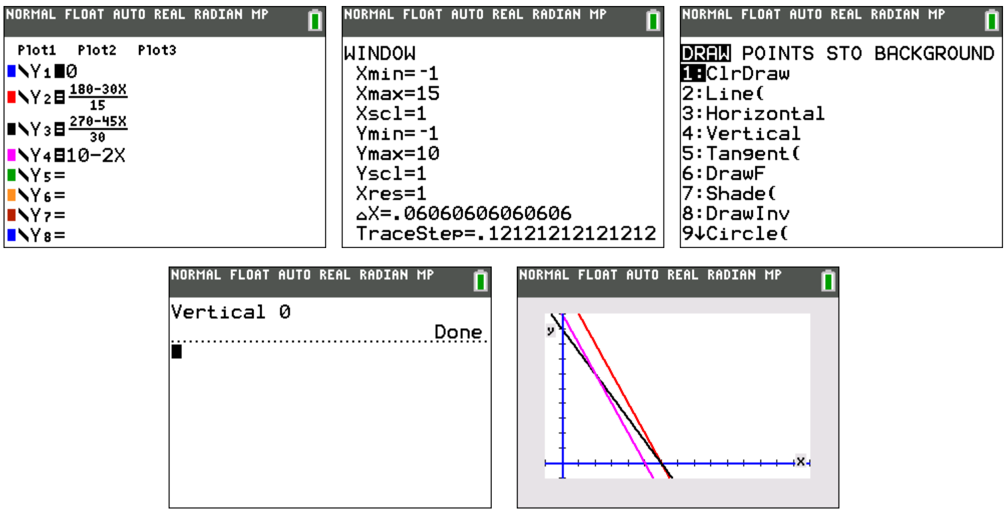
$$\begin{cases} (4) \quad x \geq 0 \\ (5) \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Elke ongelijkheid stelt grafisch een halfvlak voor, het oplossingsgebied is de doorsnede van vijf halfvlakken. De vergelijkingen van de grensrechten zijn:

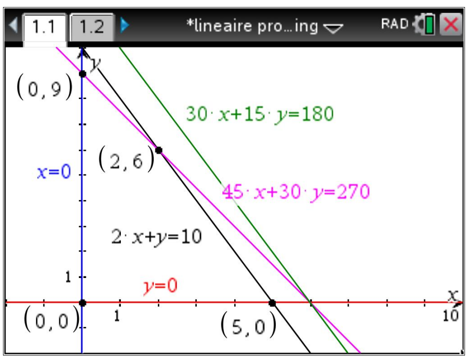
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + y = 10 \\ 45x + 30y = 270 \\ 30x + 15y = 180 \end{cases}$$

Om het oplossingsgebied te vinden, construeren we eerst deze verschillende grensrechten. Het punt (0,0) voldoet aan alle ongelijkheden en is dus een punt van het oplossingsgebied. Zo zijn de verschillende halfvlakken gekend.

TI-84 Plus C



TI-Nspire CX CAS



Wanneer we de halfvlakken bepalen die horen bij de ongelijkheden, stellen we vast dat de voorwaarde $30x+15y\leq 180$ geen nieuwe beperking oplegt. Deze ongelijkheid kunnen we dus weglaten. De hoekpunten van het oplossingsgebied worden gevonden door de volgende stelsels op te lossen:

$$(a)\quad \begin{cases} x=0 \\ 45x+30y=270 \end{cases} \qquad (b)\quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} y=0 \\ 2x+y=10 \end{cases} \qquad (d)\quad \begin{cases} 2x+y=10 \\ 45x+30y=270 \end{cases}.$$

De oplossingen zijn:

$(a)\quad (0,9) \qquad (b)\quad (0,0) \qquad (c)\quad (5,0) \qquad (d)\quad (2,6)$.

Er wordt hier in het vraagstuk geen beperkende voorwaarde opgelegd voor de totaal te verbouwen oppervlakte $x+y$.

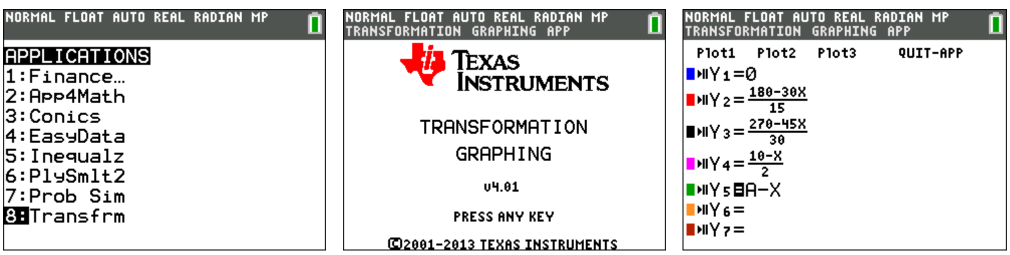
Wat is het grootste gebied dat kan beplant worden? De doelfunctie die we moeten maximaliseren is $f(x,y)=x+y$.

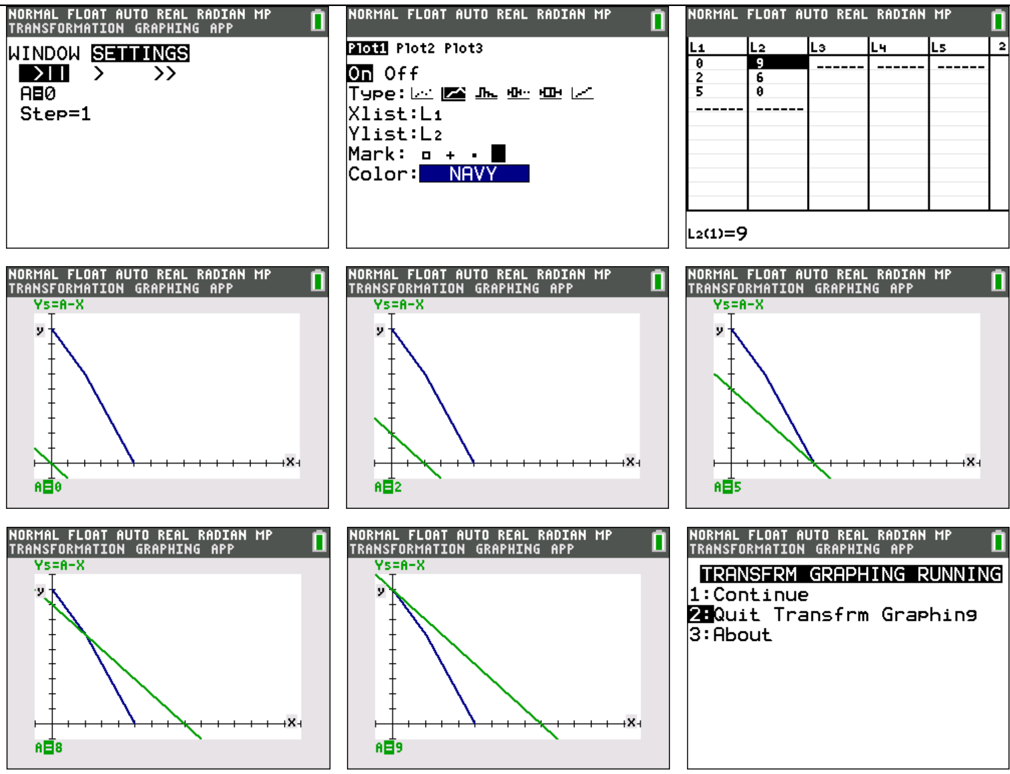
Hiervoor gebruiken we een zogenaamde iso-oppervlaktelijn of oppervlakte-niveaulijn. Dit is een rechte van de punten (x,y) waarvoor geldt dat $x+y$ dezelfde waarde oplevert. Deze waarde moet hier zo groot mogelijk zijn. Om dit grafisch op te lossen maken we gebruik van de rechte $x+y=a$ met a als parameter. De parameter is de totaal te verbouwen oppervlakte. We zoeken nu de grootst mogelijke waarde a waarbij er nog net een punt (x,y) voldoet aan het gemeenschappelijke oplossingsgebied.

We kunnen de applicatie Transfrm gebruiken van de TI-84 Plus of in de definitie van de rechte (eerstegraadsfunctie) een variabele gebruiken. We illustreren beide manieren. Met TI-Nspire kunnen we de rechte dynamisch laten bewegen door een schuifbalk te gebruiken voor de variabele a als parameter.

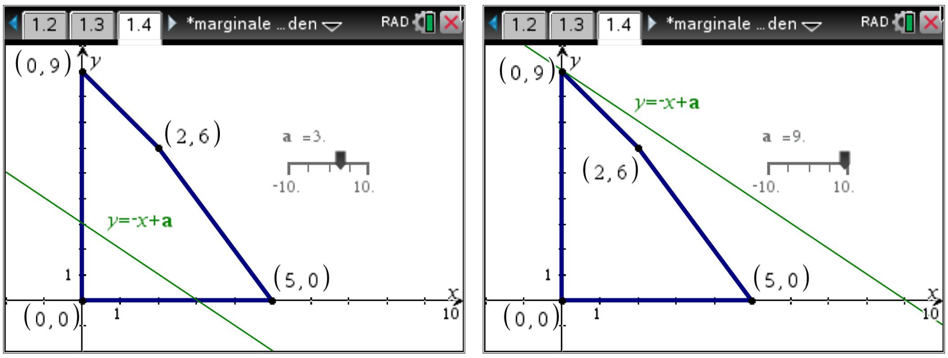
Eerste manier:

TI-84 Plus C



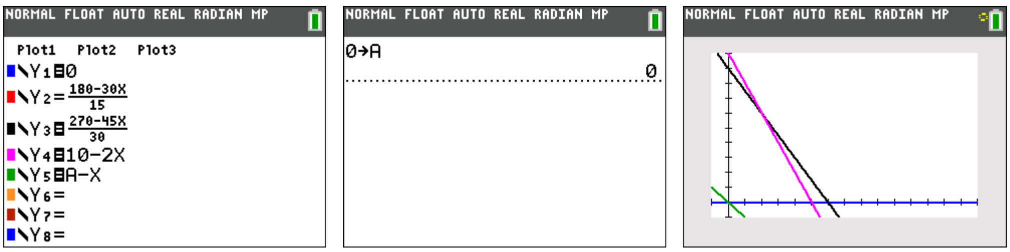


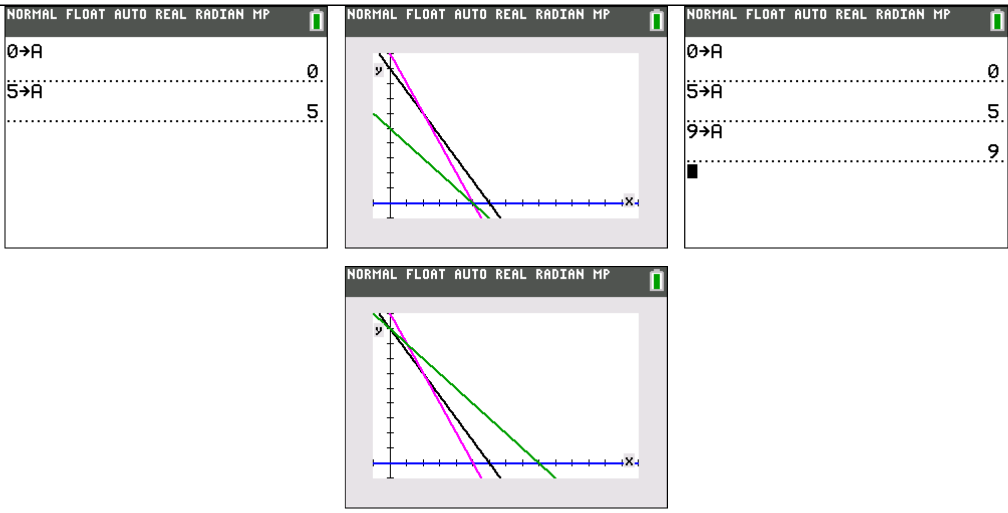
TI-Nspire CX CAS



Tweede manier:

TI-84 Plus C





De maximale oppervlakte verbouwde grond is 9 ha, enkel met gerst.

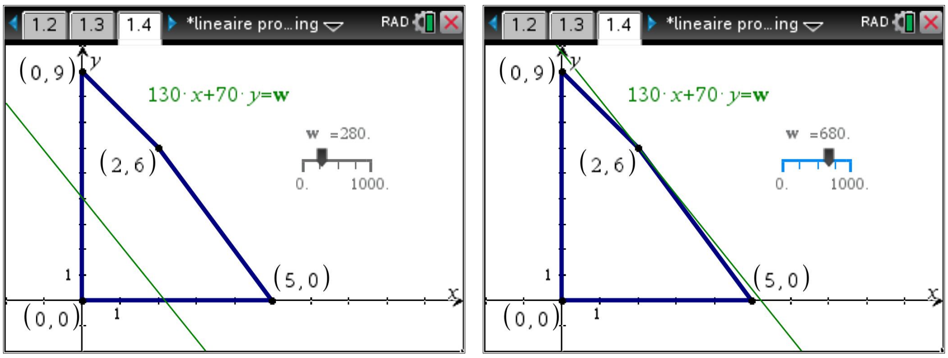
Onderstel dat de boer per ha voor suikerbieten 130 euro en voor gerst 70 euro krijgt. Wat is de maximale winst voor de boer?

De winstfunctie wordt gegeven door $W = 130x + 70y$.

Op dezelfde manier kunnen we met behulp van verschillende iso-winstlijnen de waarden voor x en y bepalen waarbij de winst maximaal wordt.

De maximale winst wordt verkregen in het punt (2,6). Als de boer 2 ha suikerbieten en 6 ha gerst plant, is zijn maximale winst $130 \cdot 2 + 70 \cdot 6 = 680$ euro.

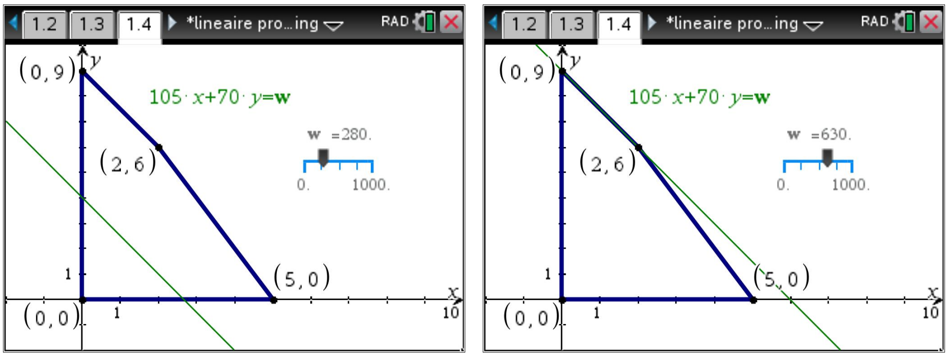
TI-Nspire CX CAS



Onderstel dat de boer per ha voor suikerbieten 105 euro en voor gerst 70 euro krijgt.

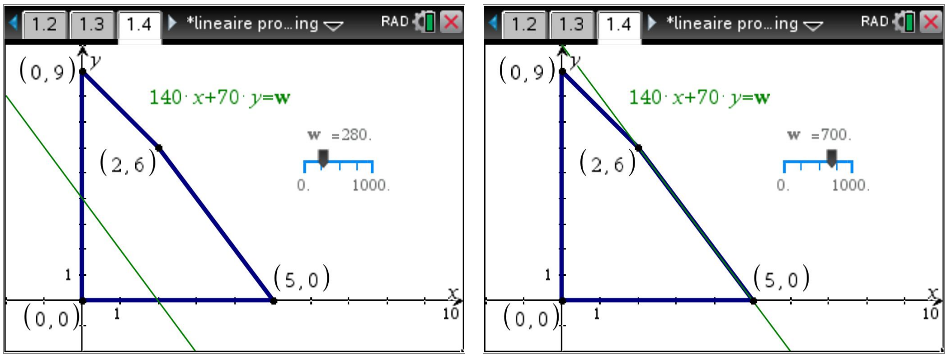
De winst $W = 105x + 70y$ wordt maximaal 630 euro. Dit maximum wordt bereikt voor alle punten (x, y) van het grenslijnstuk $105x + 70y = 630$ of $45x + 30y = 270$ met $0 \leq x \leq 2$.

TI-Nspire CX CAS



Onderstel dat de boer per ha voor suikerbieten 140 euro en voor gerst 70 euro krijgt. De winst $W = 140x + 70y$ wordt dan maximaal 700 euro. Dit maximum wordt bereikt voor alle punten (x, y) van het grenslijnstuk $140x + 70y = 720$ of $2x + y = 10$ met $2 \leq x \leq 5$.

TI-Nspire CX CAS



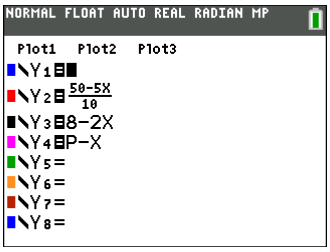
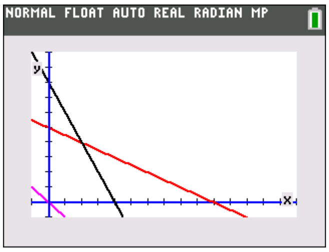
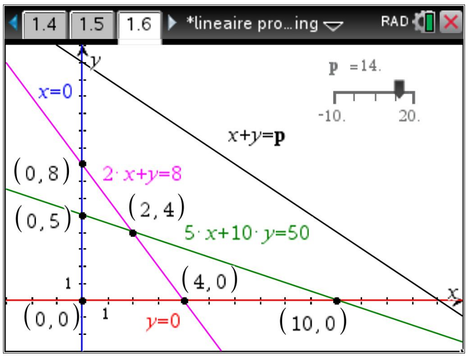
2. Een patiënt heeft een tekort aan kalk en ijzer in zijn lichaam. Hij krijgt minstens 50 mg kalk en minstens 8 mg ijzer per dag voorgeschreven om het tekort weg te werken.
   Bij de apotheek krijgt de patiënt een keuze uit twee soorten pillen:
   - merk A: bevat 5 mg kalk en 2 mg ijzer,
   - merk B: bevat 10 mg kalk en 1 mg ijzer.

   De patiënt wil zo weinig mogelijk pillen slikken per dag.
   Welke keuze moet de patiënt dan maken?
   Stel x het aantal pillen van merk A en y het aantal pillen van het merk B.

Voorwaarden (de eerste twee zijn vanzelfsprekend):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 10y \geq 50 \;\text{ of }\; y \geq \dfrac{50-5x}{10} \\ 2x + y \geq 8 \;\text{ of }\; y \geq 8 - 2x \end{cases}$$

De doelfunctie $f(x,y) = x + y$ moet minimaal zijn. Om de niveaulijnen te kunnen tekenen, definiëren we een functie met een parameter p: $y = p - x$

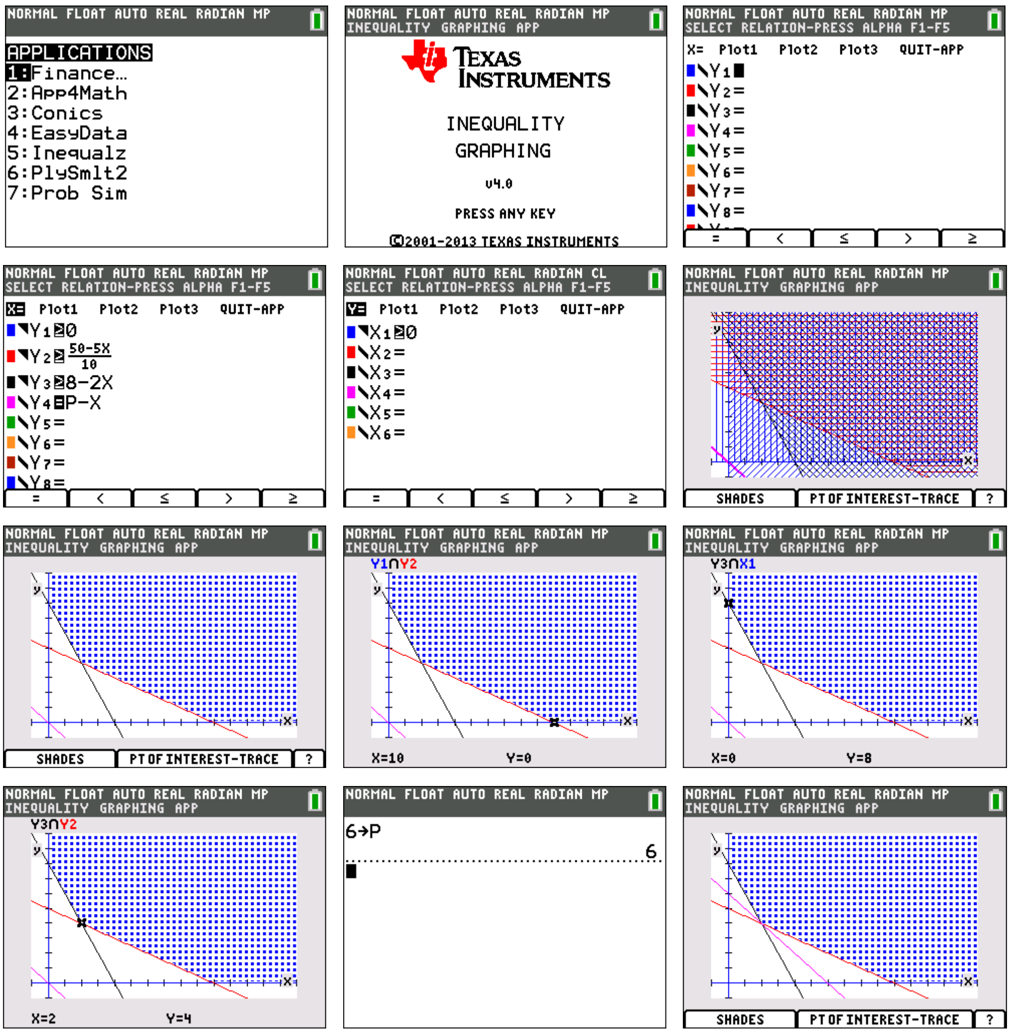
TI-84 Plus C
 
TI-Nspire CX CAS


De verschillende snijpunten van de grensrechten zijn (0,0), (0,5), (0,8), (4,0) ,(10,0) en (2,4). Enkel de grenspunten (0,8), (10,0) en (2,4) voldoen aan alle voorwaarden (ga dit na). De doelfunctie $f(x,y) = x + y$ bereikt een minimale waarde in één van deze grenspunten. Nu is $f(0,8) = 0 + 8 = 8$, $f(10,0) = 10 + 0 = 10$, $f(2,4) = 2 + 4 = 6$.

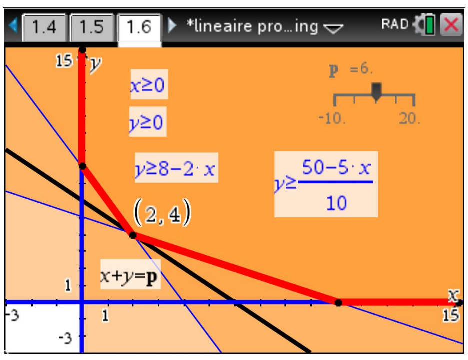
Het minimaal aantal pillen dat de man moet slikken is dus 6, waarvan 2 van het merk A en 4 van het merk B. Dit betekent 2×5 mg$+4 \times 10$ mg $= 50$ mg kalk en 2×2 mg$+4 \times 1$ mg $= 8$ mg ijzer.

Voor de grafische constructie van het oplossingsgebied met de TI-84 gebruiken we de applicatie INEQUALZ, deze kan men downloaden van de website education.ti.com.

TI-84 Plus C



TI-Nspire CX CAS



De niveaulijn $x + y = 6$ heeft nog net het punt (2,4) gemeen met het oplossingsgebied.

3. Een onderneming gebruikt twee grondstoffen om twee producten A en B te produceren. Om een eenheid van A te produceren zijn er 20 eenheden van de eerste grondstof en 15 eenheden van de tweede grondstof nodig. Voor een eenheid van B zijn er van elke grondstof 30 eenheden nodig. Van de eerste grondstof zijn 7200 eenheden beschikbaar en van de tweede grondstof 2400 eenheden.
Verder wordt gesteld dat er van product A maximaal 100 en van B maximaal 50 eenheden zullen geproduceerd worden.
De gemaakte winst per eenheid van A is € 45 en € 60 voor product B.

a) Construeer het oplossingsgebied, bepaald door de voorwaarden.

b) Als men verder nog eist dat de productie van B minstens het dubbel moet zijn van die van A, bepaal dan het nieuwe gebied. Voor welke hoeveelheden van A en B wordt een maximale winst bereikt?

Oplossing:
a) Bij de TI-84 Plus en TI-84 Plus C gebruiken we hiervoor de applicatie INEQUALZ. Deze is te downloaden van de website education.ti.com.

1) Voorwaarden formuleren:

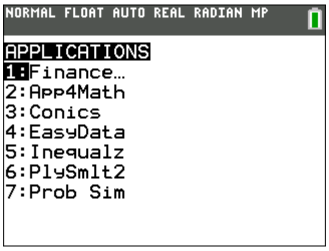
$$\begin{cases} 0 \le x \le 100 & \text{(productieaantal product A)} \\ 0 \le y \le 50 & \text{(productieaantal product B)} \\ 20x + 30y \le 7200 & \text{(hoeveelheid nodig grondstof 1)} \\ 15x + 30y \le 2400 & \text{(hoeveelheid nodig grondstof 2)} \end{cases}$$

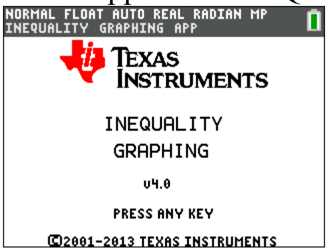
De voorwaarden moeten worden herschreven om ze in te voeren in de applicatie.

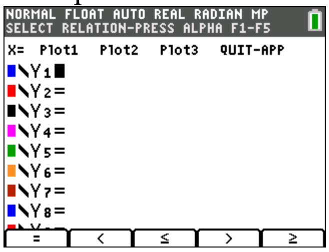
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 100 \\ y \ge 0 \\ y \le 50 \\ y \le \dfrac{7200}{30} - \dfrac{20x}{30} \Leftrightarrow y \le 240 - \dfrac{2}{3}x \\ y \le \dfrac{2400}{30} - \dfrac{15x}{30} \Leftrightarrow y \le 80 - \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

TI-84 Plus C

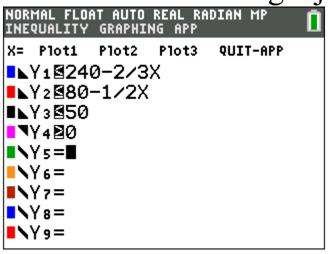
Start de applicatie INEQUALZ op.

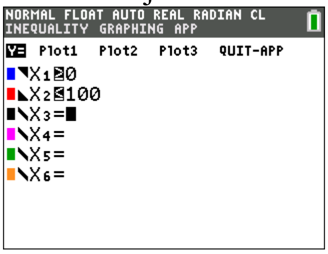




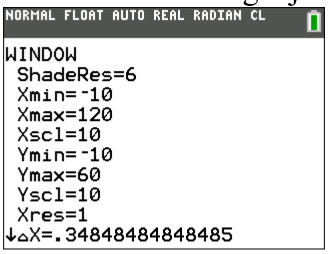


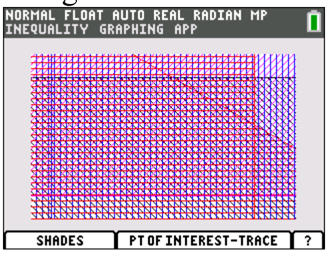
Voer de ongelijkheden in bij Y= of X=.



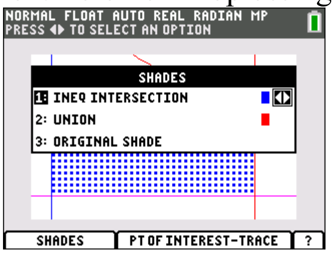


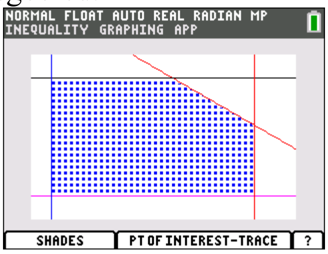
Druk op GRAPH om de ongelijkheden grafisch voor te stellen.





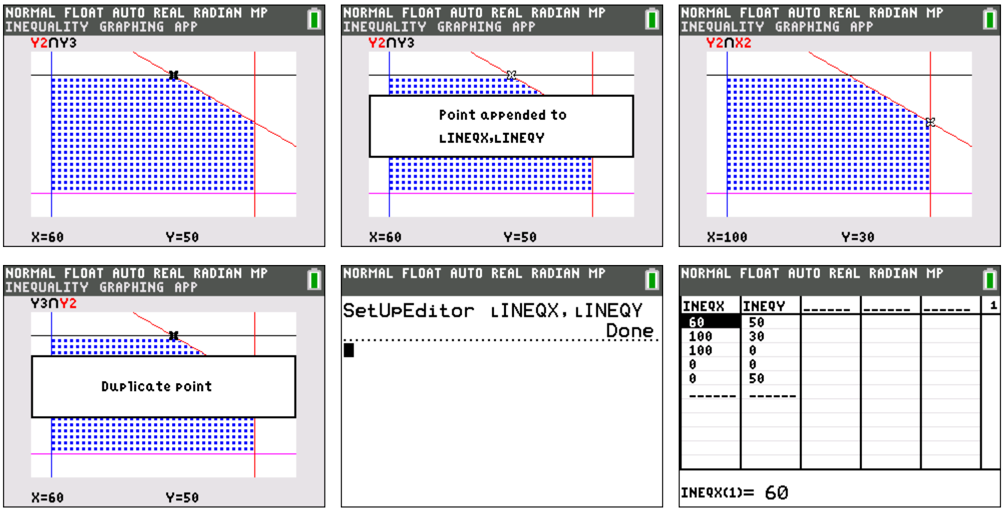
Kies SHADES (ALPHA Y= of WINDOW) en selecteer 1: ineq intersection. Zo ontstaat oplossingsgebied.





Om de verschillende hoekpunten van het oplossingsgebied te berekenen kun je de optie PT OF INTEREST – TRACE kiezen. Met de pijltjestoetsen kun je de verschillende snijpunten aanduiden. Door STO▶ in te drukken worden de coördinaten van de punten opgeslagen in twee lijsten. Het is niet mogelijk om twee maal hetzelfde punt in de lijsten op te nemen.

TI-84 Plus C

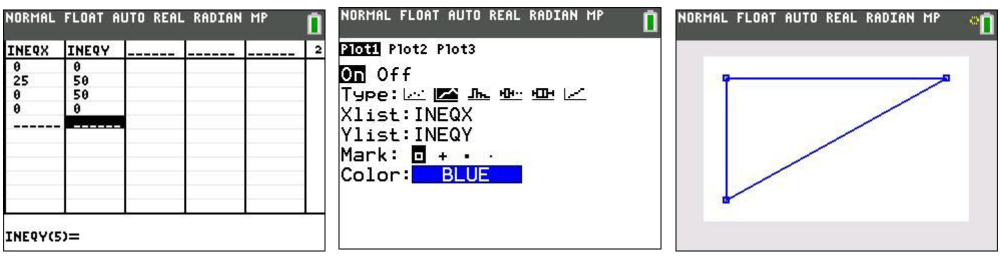


b) Voeg de voorwaarde $y \geq 2x$ toe.

We gebruiken de applicatie TRANSFRM om de niveaulijn te laten bewegen. Daartoe moet eerst de applicatie INEQUALZ afgesloten worden, waardoor je echter het oplossingsgebied van de voorwaarden verliest.

- Het oplossingsgebied kan hersteld worden door middel van de lijsten INEQX en INEQY, die je eerst bepaalt met de applicatie INEQUALZ
- Vul beide lijsten nog aan met de coördinaten van het eerste geselecteerde punt. Selecteer STAT PLOT, kies voor een puntenwolk verbonden door lijnstukken en sluit af met ZOOMSTAT.

TI-84 Plus C



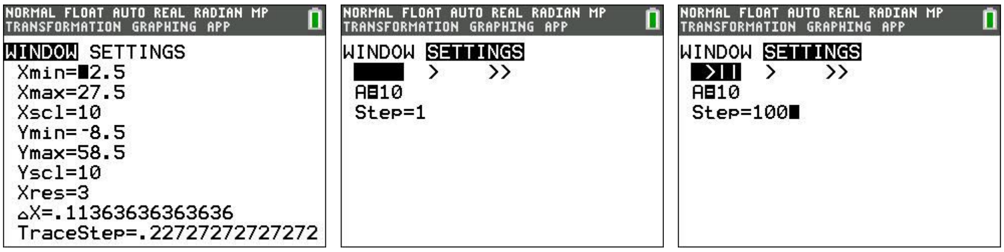
Start dan de applicatie TRANSFRM op en voer de winstfunctie in bij Y=.

Voorzie een parameter voor de waarde van de winst.

TI-84 Plus C

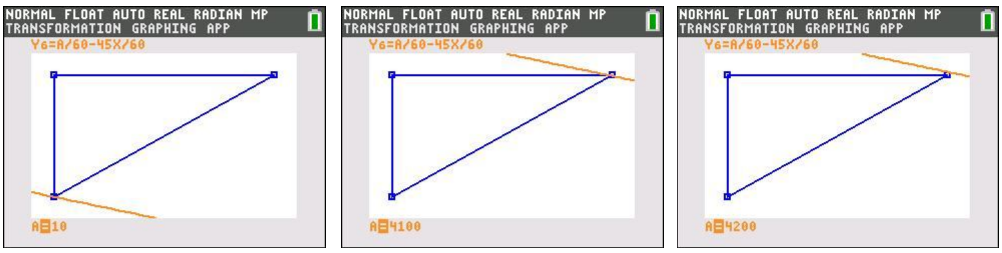
Bij WINDOWS SETTINGS kan de beginwaarde van de parameter en de stapgrootte waarmee de parameter moet toenemen worden ingevoerd. Kies voor het manueel laten toenemen van de parameterwaarde. De beginwaarde en de stapgrootte kunnen worden aangepast.

TI-84 Plus C



Bepaal nu de parameterwaarde waarbij de niveaulijn nog net het oplossingsgebied snijdt. Door eventueel de stapwaarde te verkleinen kan een betere benadering gevonden worden. De correcte waarde kan berekend worden door de coördinaten van het dichts bijgelegen hoekpunt in te vullen in de winstfunctie $W = 45 \cdot x + 60 \cdot y$.

TI-84 Plus C

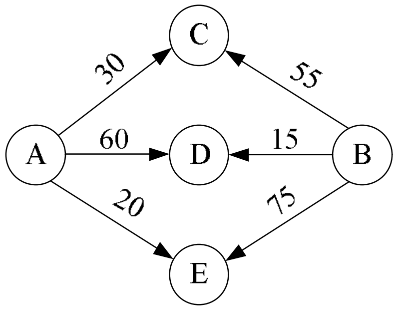


Bij een productie van 25 eenheden van A en 50 van B wordt een maximale winst bereikt. De opbrengst is dan $45 \cdot 25 + 60 \cdot 50 = 4125$ euro.

Een transportprobleem

Soms kunnen problemen die op het eerste gezicht niets met lineaire programmering te maken hebben, toch worden opgelost met de technieken van lineaire programmering.

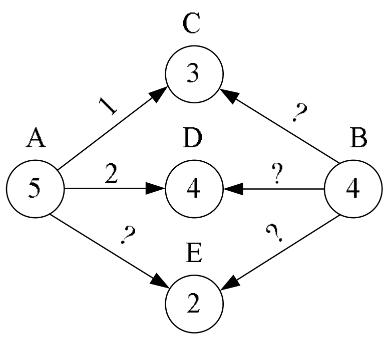
Twee fabrieken A en B van eenzelfde type product, moeten 3 filialen C, D en E bevoorraden. De vermelde hoeveelheden moeten met honderd worden vermenigvuldigd. Dit werd gedaan om de getallen eenvoudig te houden. Als een fabriek 500 stuks van een goed in voorraad heeft, noteren we dit met 5.
In onderstaand schema worden de kosten aangegeven die gepaard gaan met een transport per honderd goederen (in euro):



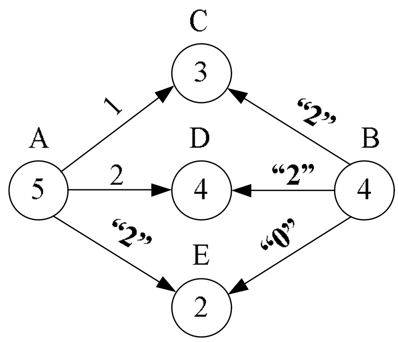
In de tabel worden de voorraad van de fabrieken en de noden van de filialen aangegeven:

Voorraad	Noden
A = 5 B = 4	C = 3 D = 4 E = 2

Merk op dat de fabrieken A en B hun volledige voorraad moeten leveren om aan de noden te voldoen. Beschouw de situatie in het onderstaande levering schema. Vul de ontbrekende cijfers aan. Is dit mogelijk? Zijn er verschillende mogelijkheden?



De oplossing is eenduidig bepaald. Het schema ligt volledig vast door het aangeven van deze twee getallen.



De totale kosten worden gegeven door:

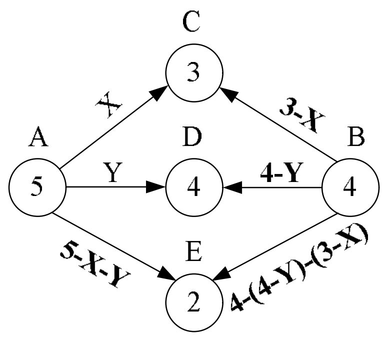
$$TK = 1\times30 + 2\times60 + 2\times20 + 2\times55 + 2\times15 + 0\times75$$
$$= 330$$

Zijn de totale kosten minimaal?

Daar we slechts twee waarden moeten bepalen voor fabriek A om het schema volledig vast te leggen, veralgemenen we de werkwijze van het vorige voorbeeld.

Fabriek A levert X goederen aan filiaal C en Y goederen aan filiaal D. De andere goederenstromen kunnen worden uitgedrukt als functie van X en Y. In onderstaande tabel staan de verschillende goederenstromen:

Van	Naar	Goederenstroom
A	C	X
A	D	Y
A	E	5-X-Y
B	C	3-X
B	D	4-Y
B	E	4-(4-Y)-(3-X) of X+Y-3



Na wat rekenwerk vinden we voor de totale kosten van het transport:

$$TK = 30X + 100Y + 100$$

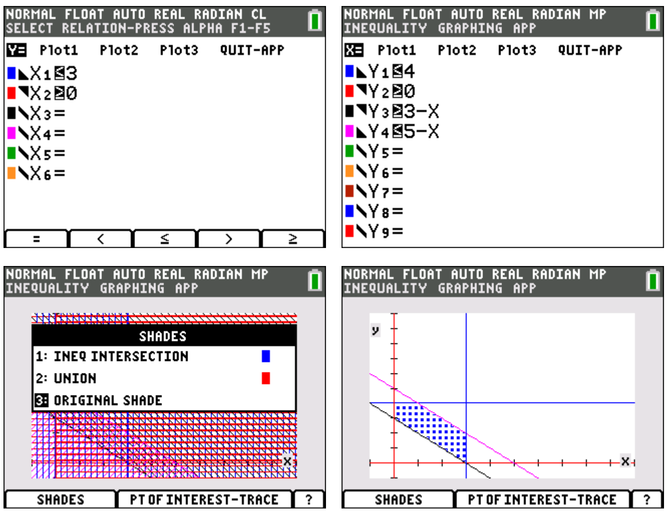
Dit is de doelfunctie die we moeten minimaliseren, rekening houdend met de volgende voorwaarden:

$$\begin{cases} (X \le 3) \wedge (X \le 5) \Rightarrow X \le 3 \\ (Y \le 4) \wedge (Y \le 5) \Rightarrow Y \le 4 \\ 5 - X - Y \le 2 \Rightarrow Y \ge 3 - X \\ 3 - X \le 3 \Rightarrow X \ge 0 \\ 4 - Y \le 4 \Rightarrow Y \ge 0 \\ X + Y - 3 \le 2 \Rightarrow Y \le 5 - X \end{cases}$$

Deze zes voorwaarden bepalen het oplossingsgebied. De functie $Y = -1 - 0{,}3X + A/100$ met parameter A stelt de niveaulijn voor waarbij de totale kosten A bedragen. We zoeken de kleinste waarde van de parameter A waarbij de niveaulijn nog juist het oplossingsgebied snijdt in één van zijn hoekpunten.

We gebruiken de applicatie INEQUALZ om het oplossingsgebied te bepalen. Eerst moeten de verschillende voorwaarden worden ingevoerd.

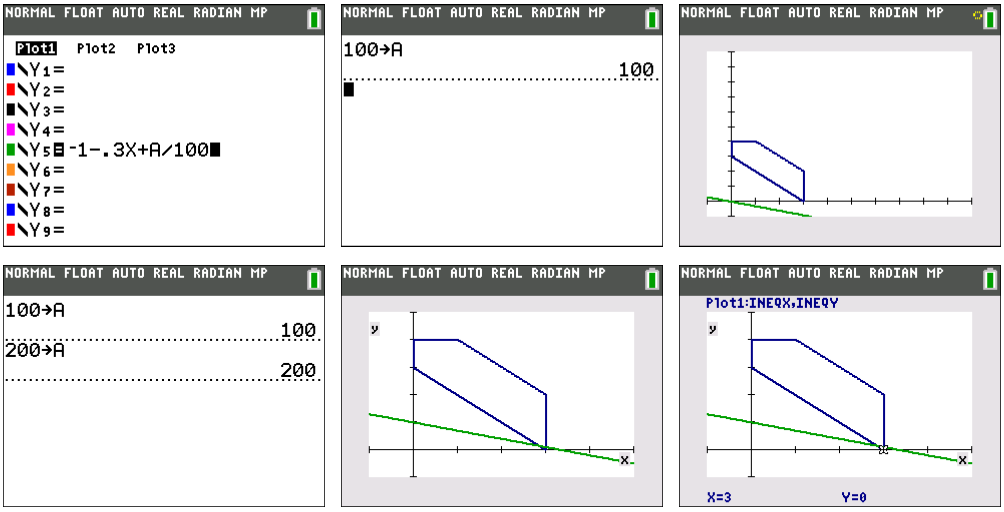
TI-84 Plus C



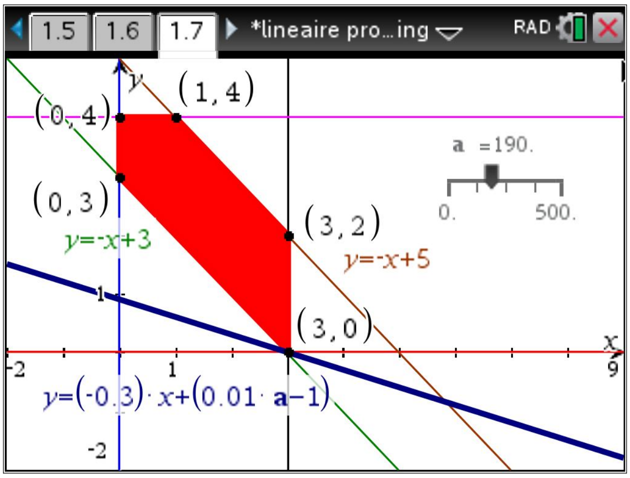
Met de optie PT OF INTEREST-TRACE kunnen we met veel geduld alle hoekpunten in een cyclische volgorde bepalen en met STO▸ opslaan in twee lijsten. Vergeet niet achteraf de lijsten aan te vullen met de coördinaten van het eerst aangeduide hoekpunt. Door nu van beide lijsten een spreidingsgrafiek te maken kunnen we het oplossingsgebied ook buiten de applicatie INEQUALZ tonen.

We dienen nu enkel nog de niveaulijn in te voeren in Y=. Vergeet de parameter niet om de totale kosten aan te geven.

TI-84 Plus C



TI-Nspire CX CAS



Met TRACE kunnen we de hoekpunten van het oplossingsgebied doorlopen om zo de coördinaten te vinden van het hoekpunt dat het dichtst bij de niveaulijn ligt.

Ga zelf na dat de totale kosten minimaal 190 euro zijn als fabriek A 300 goederen levert aan filiaal C en geen enkel goed aan filiaal D.

Een productie maximaliseren

Een productiefunctie in een firma wordt gegeven door $Q = K + A + K \cdot A$.

Hierbij stelt Q de geproduceerde hoeveelheid voor, K de ingebrachte hoeveelheid kapitaal en A de ingebrachte hoeveelheid arbeid. De productiekosten worden gegeven door $C = K + 2A$. Veronderstel dat we over 100 geldeenheden beschikken. Bepaal hoeveel eenheden men van elke productiefactor moet inzetten om zoveel mogelijk te kunnen produceren.

Dit is een gebonden extremumvraagstuk: maximaliseer $Q = K + A + K \cdot A$ (1), onder de beperking $100 = K + 2A$ of $K = 100 - 2A$ (2).

Eerste methode

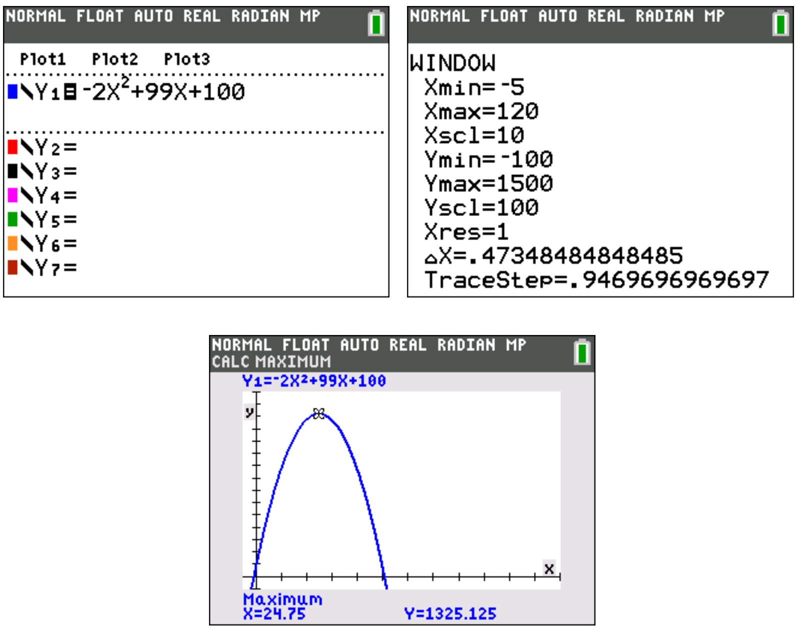
Substitutie van (2) in (1) levert $Q = (100 - 2A) + A + (100 - 2A) \cdot A$ of $Q = -2A^2 + 99A + 100$.

Deze kwadratische functie bereikt een maximum voor $A = \dfrac{-99}{-4} = 24,75$. Dan is

$K = 100 - 2 \cdot 24,75 = 50,5$ en $Q = 50,5 + 24,75 + 50,5 \cdot 24,75 = 1325,125$.

Deze werkwijze is de eenvoudigste ; ze is haalbaar in de tweede graad zodra men de kwadratische functie heeft bestudeerd.

TI-84 Plus C



Tweede methode

Voor de combinatie $(A, K) = (40, 20)$ is $Q = 860$. Voor de combinatie $(A, K) = (30, 40)$ is $Q = 1270$. Hoe moet men (A, K) kiezen, met inachtneming van de beperking (2), om een maximale productie Q te realiseren? Deze aanpak is exploratief en daarom wellicht het meest verhelderend.

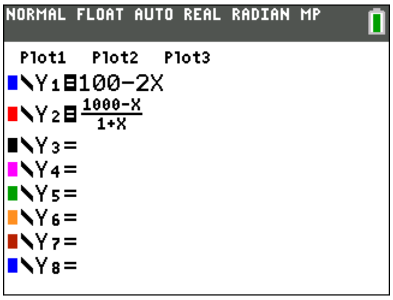
Om de grafieken te tekenen met een grafische rekenmachine stellen we $x = A$ en $y = K$. Dan is $Q = y + x + y \cdot x$ en $y + 2x = 100$. De grafiek van de laatste vergelijking is een rechte die de x-as snijdt in (50,0) en de y-as in (0,100). Kies bv. als vensterinstelling $[-5, 50] \times [-10, 100]$

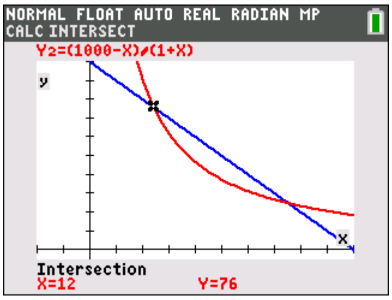
Kan men met 100 geldeenheden een productie van 1000 halen? Daartoe moet men het stelsel

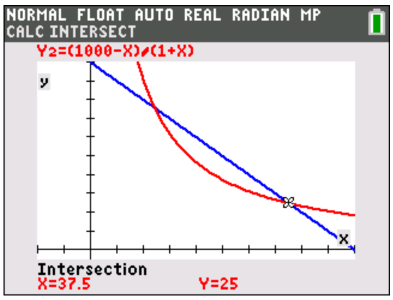
$$\begin{cases} y = 100 - 2x \\ 1000 = y + x + y \cdot x \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} y = 100 - 2x \\ y = \dfrac{1000 - x}{1 + x} \end{cases}$$ oplossen.

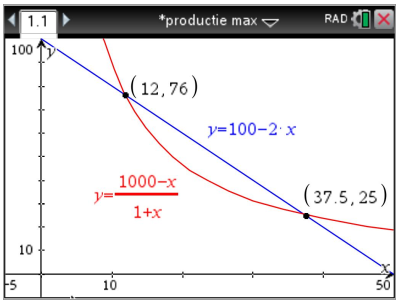
Teken de grafieken van beide functies en bepaal de snijpunten grafisch.

TI-84 Plus C





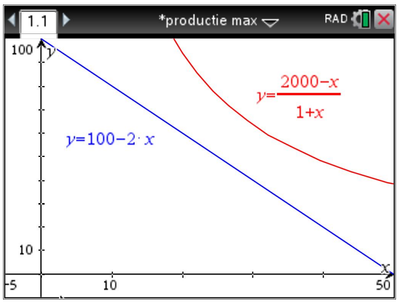
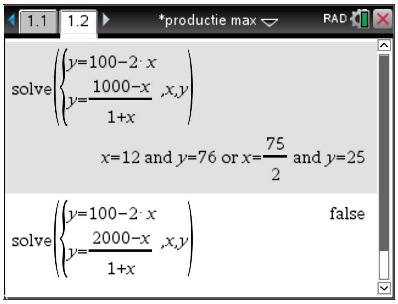


TI-Nspire CX CAS


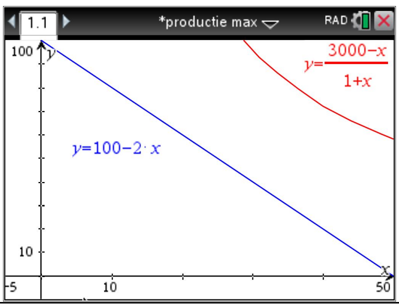
Er zijn twee snijpunten (37,5 ; 25) en (12, 76), dit levert de twee mogelijkheden om met 100 geldeenheden een productie van 1000 te halen.

Kan men met 100 geldeenheden een productie van 2000 halen?

Het stelsel $\begin{cases} y = 100 - 2x \\ y = \dfrac{2000 - x}{1 + x} \end{cases}$ heeft geen oplossing in het eerste kwadrant ; de grafieken snijden elkaar niet meer.

TI-Nspire CX CAS
 

Voor een gewenste productie 3000, 4000, … gaat de grafiek van de kromme steeds verder weg liggen van de rechte. Het is onmogelijk om 2000, 3000, 4000, … eenheden te produceren met 100 geldeenheden.

TI-Nspire CX CAS


Het is duidelijk dat $Q_{\max}$ tussen 1000 en 2000 moet liggen.

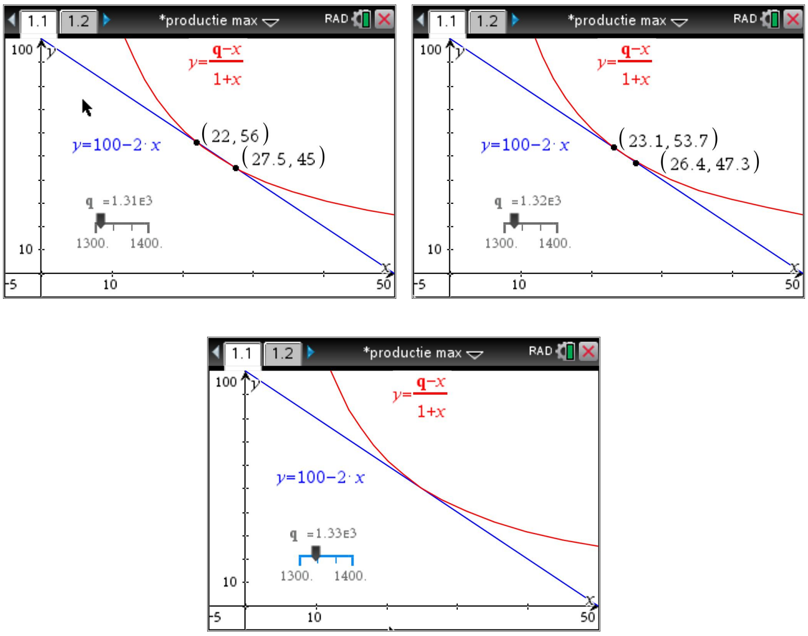
Laat de gewenste productie oplopen van 1000 naar 1100, 1200, 1300, 1400, …. en ga na of er nog snijpunten zijn in het eerste kwadrant, dan zien we dat $Q_{\max}$ tussen 1300 en 1400 moet liggen. Men kan nog verfijnen met 1310, 1320, 1330, … en zo een vrij goede benadering verkrijgen van $Q_{\max}$.

Om de exacte waarde $Q_{\max}$ te vinden zoeken we een kromme die nog juist punten gemeen heeft met de rechte, voor die situatie raakt de rechte aan de kromme (twee samenvallende snijpunten). Dan moet $100-2x=\dfrac{Q-x}{1+x}$ of $2x^2-99x+(Q-100)=0$ een dubbele wortel hebben. Daartoe moet de discrimant van de vierkantsvergelijking nul zijn:

$99^2-8(Q-100)=0$ of $8Q=10601$ zodat $Q=1325{,}125$.

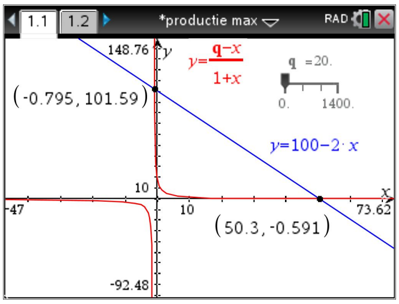
We vinden uiteraard dezelfde oplossing als in de eerste methode, maar deze werkwijze is een dynamisch proces dat meer inzicht geeft, men ziet de oplossing steeds beter benaderen. Het dynamisch proces wordt het best geïllustreerd met een schuifknop waarbij Q de parameter is. De eerste methode is statisch: men vindt onmiddellijk het juiste punt.

TI-Nspire CX CAS



Opmerking

Voor welke x en y verkrijgen we de kleine productie $Q = 20$?

TI-Nspire CX CAS


Het stelsel $\begin{cases} y = 100 - 2x \\ y = \dfrac{20 - x}{1 + x} \end{cases}$ heeft twee verschillende oplossingen, afgerond $(-0{,}8\ ;101{,}6)$ en $(50{,}3\ ;-0{,}6)$. Binnen de context van deze economische opgave moeten de grootheden x en y echter positief zijn, een productie $Q = 20$ is dus onmogelijk!

Derde methode

De derde methode wordt bestudeerd in het hoger onderwijs en wordt hier niet uitgewerkt. Het vraagstuk wordt behandeld als een gebonden extremumprobleem van een functie met meerdere variabelen. Deze methode is zeer algemeen en statisch. Hier komen begrippen als multiplicator van Lagrange en Hessiaanse determinant op de proppen. Omdat de binding $K + 2A = 100$ gemakkelijk kan worden opgelost naar K waren de twee eerste methoden mogelijk. Als dat onmogelijk wordt levert de multiplicatorenmethode van Lagrange een oplossing. De werkwijze steunt op het feit dat de normalen aan de rechte en de kromme in een snijpunt samenvallen wanneer daar een extremum optreedt.

Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt

Inleiding

In de economie worden verschillende modellen gebruikt om fenomenen te beschrijven, te bestuderen en te verklaren.

Hier komen vragen aan bod zoals:

- Hoe is het nationaal inkomen van een land verdeeld over de diverse inkomstentrekkers?
- Hoe is het besteedbare inkomen van een land verdeeld over de huishoudens in dat land?
- Hoe is de vermogensverdeling in een land?
- Hoe zijn de marktaandelen van de verschillende ondernemers op een bepaalde markt verdeeld?

De Lorenzkromme is een middel om die verdelingen op een eenvoudige en inzichtelijke manier voor te stellen. Deze kromme is vernoemd naar Jacob Lorenz, een Zwitserse socioloog (1883-1946). De Ginicoëfficiënt meet de ongelijkheid in zo'n verdeling.

Inleidend voorbeeld:

Veronderstel dat de brouwerijen kunnen worden onderverdeeld in drie categorieën: multinationals, middelgrote en ambachtelijke brouwerijen.

In onderstaande tabel worden de (fictieve) gegevens samengevat:

	Aantal brouwerijen	Percentage van het totaal aantal brouwerijen	Percentage van de omzet
Ambachtelijk	95	84,82%	3%
Middelgroot	15	13,39%	12%
Multinational	2	1,79%	85%
Totaal	**112**	**100%**	**100%**

Om de Lorenzkromme te construeren, hebben we de cumulatieve percentages nodig:

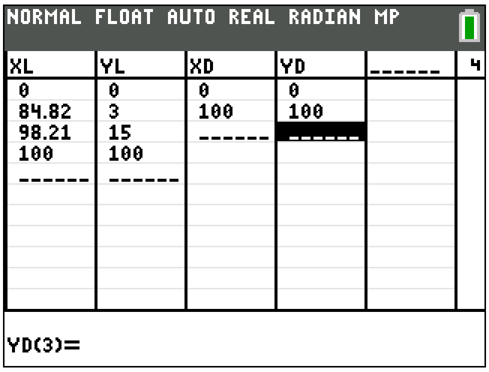
	Cumulatief percentage totaal aantal brouwerijen	Cumulatief percentage omzet
Ambachtelijk	84,82%	3%
Middelgroot	98,21%	15%
Multinational	100%	100%

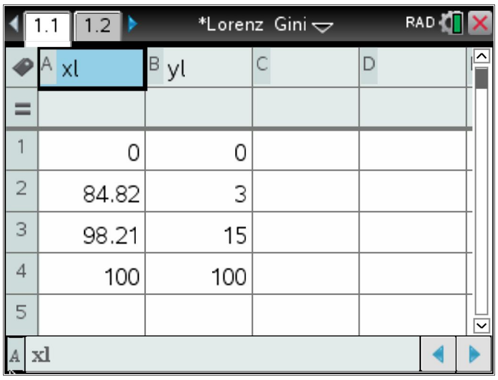
Deze punten worden in een grafiek geplaatst, het cumulatief percentage totaal aantal brouwerijen komt op de x-as en het cumulatief percentage omzet op de y-as. Door de opeenvolgende punten (start met de oorsprong) te verbinden met lijnstukken ontstaat de Lorenzkromme.

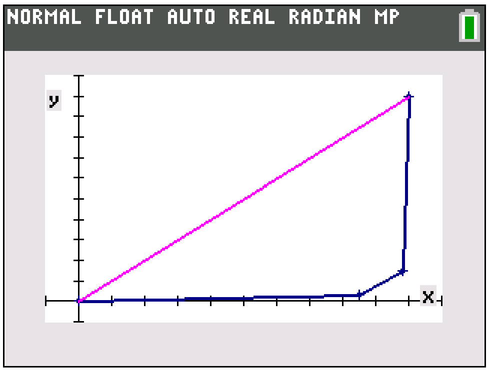
Ook de eerste bissectrice wordt getekend.

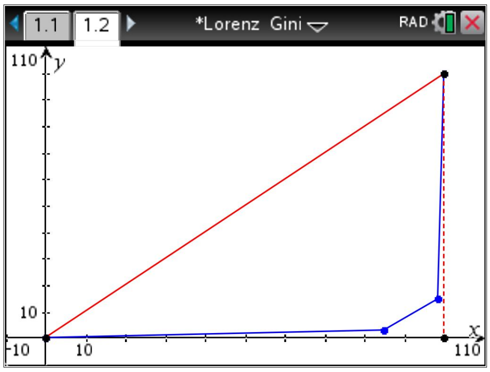
Om dit te realiseren kunnen we gebruik maken van een spreidingsgrafiek:

- maak vier lijsten aan: de eerste lijst bevat de x-coördinaat van de punten van de Lorenzkromme, de tweede lijst de y-coördinaten. In een derde lijst plaatsen we de x-coördinaten van het begin- en eindpunt van de diagonaal en in de vierde lijst de y-coördinaten.

<table>
<tr><th>TI-84 Plus C</th><th>TI-Nspire CX CAS</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

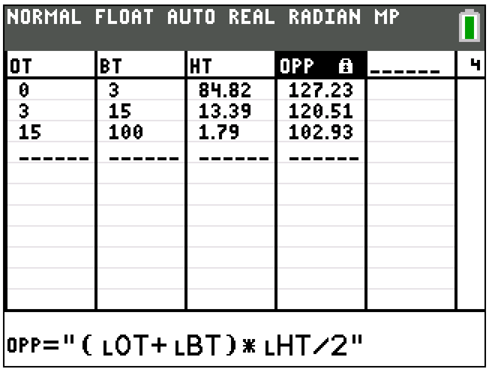
De Ginicoëfficiënt is de verhouding van de oppervlakte tussen de diagonaal en de Lorenzkromme enerzijds en de oppervlakte onder de diagonaal anderzijds:

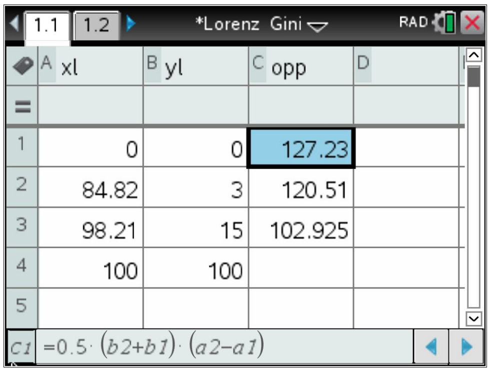
- de oppervlakte onder de Lorenzkromme is de som van oppervlakten van verschillende trapezia: $Opp = \frac{3+0}{2}84,82 + \frac{15+3}{2}13,39 + \frac{100+15}{2}1,79$
  $= 350,665$
- de oppervlakte onder de diagonaal is altijd 5000 (oppervlakte van het vierkant met zijde 100 gedeeld door 2).

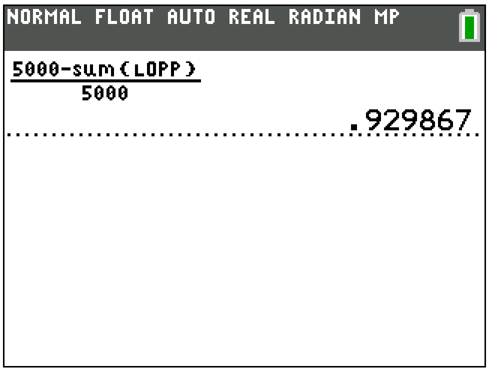
- De Ginicoëfficiënt wordt dan: $G = \dfrac{5000 - 350{,}665}{5000}$.

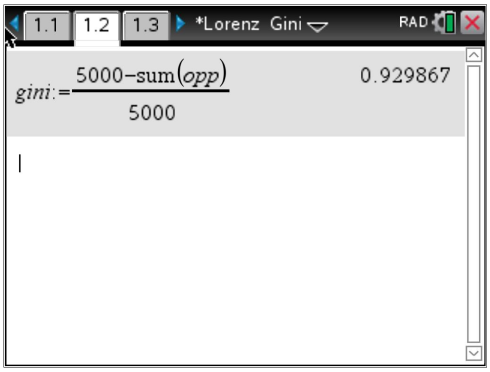
$$= \frac{4649{,}335}{5000}$$
$$= 0{,}929867$$

TI-84 Plus C	TI-Nspire CX CAS









Voorbeeld

De onderstaande tabel toont de verdeling van het totaal netto belastbaar inkomen in België. De tabel is afgeleid van de werkelijke cijfers voor het aanslagjaar 2012 van het Nationaal Instituut van de Statistiek, Fiscale Inkomens

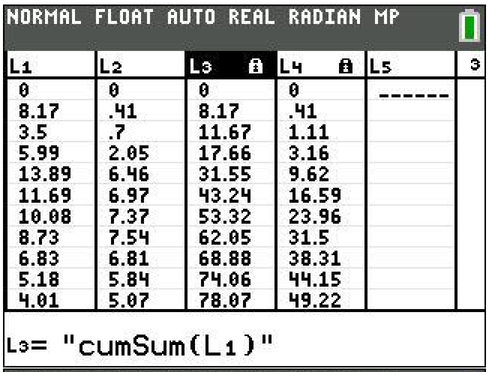
De eerste kolom toont de inkomensklassen (per € 4000). De tweede kolom bevat het aantal personen per inkomensklasse. De derde kolom toont het procentuele aandeel van de klasse binnen het totaal aantal belastingplichtigen. De vierde kolom geeft het totaal netto belastbaar inkomen per klasse weer. De laatste kolom drukt het procentuele aandeel in het totaal cijfer van het netto belastbaar inkomen uit van iedere klasse.

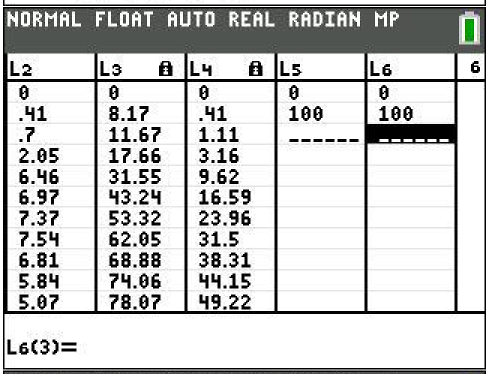
Inkomensklasse per €1000	Totaal netto belastbaar inkomen			
	Aantal	%	Bedrag	%
Totaal	***6.157.995***	***100,00%***	***184.813.912.381***	***100,00%***
0-4	503.206	8,17%	743.487.973	0,41%
4-8	215.762	3,50%	1.295.011.574	0,70%
8-12	368.633	5,99%	3.796.100.138	2,05%
12-16	855.570	13,89%	11.940.357.636	6,46%
16-20	719.648	11,69%	12.883.358.974	6,97%
20-24	620.916	10,08%	13.622.733.406	7,37%
24-28	537.318	8,73%	13.934.383.254	7,54%
28-32	420.875	6,83%	12.587.589.800	6,81%
32-36	318.872	5,18%	10.809.876.813	5,84%
36-40	246.853	4,01%	9.362.595.771	5,07%
40-44	206.613	3,36%	8.667.315.061	4,69%
44-48	169.762	2,76%	7.799.194.471	4,23%
48-52	144.474	2,35%	7.215.867.939	3,90%
52-56	123.087	2,00%	6.639.471.611	3,59%
56-60	103.069	1,67%	5.972.144.782	3,23%
60-64	87.209	1,42%	5.402.188.395	2,92%
64-68	73.789	1,20%	4.866.050.843	2,63%
68-72	63.619	1,03%	4.449.486.624	2,41%
72-76	52.853	0,86%	3.908.064.328	2,11%
76-80	44.597	0,72%	3.475.778.522	1,88%
80-84	37.751	0,61%	3.093.543.844	1,68%
84-88	31.727	0,52%	2.726.411.579	1,48%
88-92	26.871	0,44%	2.416.650.284	1,31%
92_96	22.275	0,36%	2.092.574.057	1,13%
96-100	18.968	0,31%	1.857.961.882	1,01%
>100	143.678	2,33%	23.255.712.819	12,58%

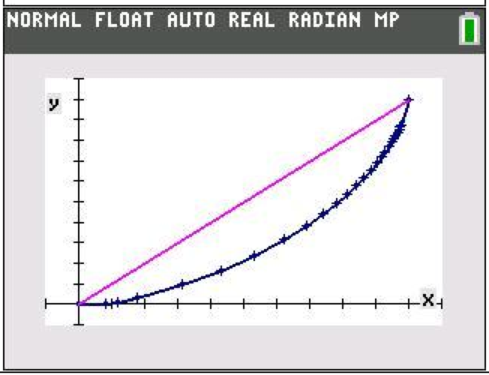
(http://statbel.fgov.be/nl/modules/publications/statistiques/arbeidsmarkt_levensomstandigheden/Statistique_fiscale_des_revenus.jsp).

Om de Lorenzkromme te construeren zijn de cumulatieve percentages nodig van de derde en vijfde kolom (% aantal en % bedrag).
Plaats daarom het cijfermateriaal in twee lijsten. Zorg ervoor dat het eerste element in beide lijsten gelijk is aan nul. Genereer twee nieuwe lijsten met de cumulatieve percentages van de eerste twee lijsten. Maak een spreidingsgrafiek van de laatste twee lijsten. Deze grafiek is dan de Lorenzkromme.

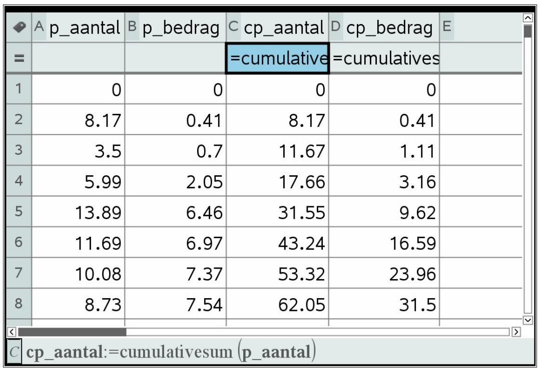
TI-84 Plus C

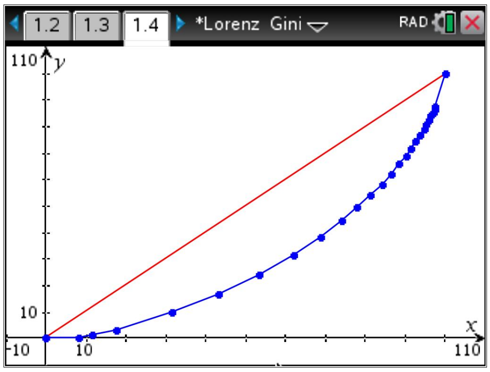






TI-Nspire CX CAS





De armste 8,1% van de belastingplichtigen beschikt slechts over 0,41% van het netto belastbaar inkomen. De verdeling van het aantal belastingplichtigen wijkt dus duidelijk af van de verdeling van het netto belastbaar inkomen. Indien iedereen hetzelfde inkomen zou hebben, dan zou de “armste” 10% van de belastingplichtigen beschikken over 10% van het inkomen, de “armste” 20% over 20% van het inkomen, enz. De eerste bissectrice geeft de situatie weer waarbij iedereen hetzelfde inkomen heeft. Om deze in de figuur weer te geven kunnen we 2 lijsten aanmaken met de waarden 0 en 100 en de spreidingsgrafiek tekenen.
Om de mate van ongelijkheid aan te geven, wordt het begrip concentratie gebruikt. Als grafisch meetinstrument van die concentratie kan de Lorenzkromme worden gebruikt. Om de concentratie als getal vast te leggen, wordt de Ginicoëfficiënt berekend. Deze coëfficiënt is vernoemd naar de Italiaans statisticus en socioloog Corrado Gini (1884-1965).

De Ginicoëfficiënt G wordt gedefinieerd als:

$$G = \frac{\text{de oppervlakte tussen Lorenzkromme en diagonaal}}{\text{de oppervlakte onder de diagonaal}}.$$

Dit levert een getal op tussen 0 en 1. De Ginicoëfficiënt is gelijk aan nul als de Lorenzkromme samenvalt met de diagonaal, er is dan geen concentratie. Is de Ginicoëfficiënt gelijk aan 1 (of 100%), dan is de concentratie volledig (één persoon beschikt over alle inkomsten).

Hier volgen een aantal alternatieven voor de berekening van de Ginicoëfficiënt:

$$G = \frac{\text{de oppervlakte tussen de Lorenzkromme en de diagonaal}}{5000}$$

$$G = 1 - \frac{\text{de oppervlakte onder de Lorenzkromme}}{5000}$$

$$G = 1 - \frac{2 \times \text{de oppervlakte onder de Lorenzkromme}}{10000}$$

De laatste berekeningswijze van G is handig voor de praktische berekening van de Ginicoëfficiënt.

De oppervlakte onder de Lorenzkromme kan worden beschouwd als de som van de oppervlakten van verscheidene trapezia. Zo wordt de oppervlakte van het trapezium horend bij de i-de klasse gegeven door:

$$\text{oppervlakte } Tr_i = \frac{1}{2}\left(cum\%(NBI)_{i-1} + cum\%(NBI)_i\right) \times \%\left(aant\right)_i$$

In woorden de oppervlakte van het i-de trapezium is gelijk aan de helft van de som van het cumulatief percentage van de (i-1)-de klasse en van de i-de klasse van het netto belastbaar inkomen, vermenigvuldigd met het percentage van het aantal van de i-de klasse.

Voor de derde klasse wordt dit bijvoorbeeld:

$$Tr_3 = \frac{1}{2}\left(1{,}11 + 3{,}16\right) \times 5{,}99 = 12{,}7887$$

Zo wordt de oppervlakte onder de Lorenzkromme gegeven door:

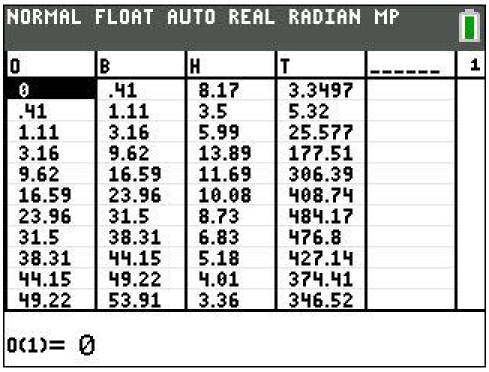
$$\text{oppervlakte onder de Lorenzkromme} = \sum_{i=1}^{n} Tr_i$$

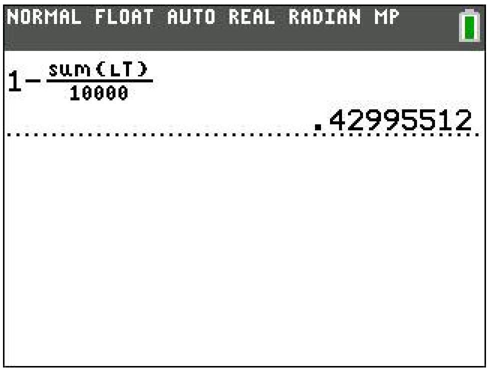
Toegepast op het oorspronkelijke probleem levert dit (TI-84 Plus):

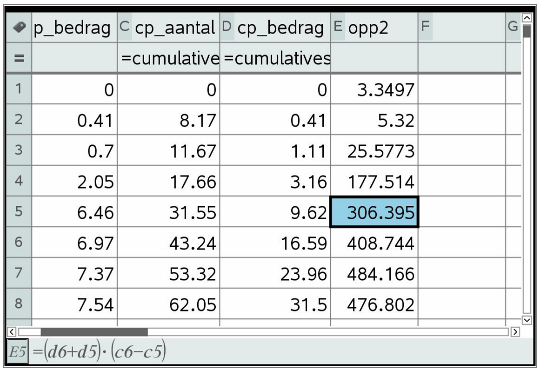
- maak een lijst O met de ondergrenzen van de cumulatieve % per klasse
- maak een lijst B met de bovengrenzen van de cumulatieve % per klasse
- maak een lijst H met de % van de aantallen van de klassen

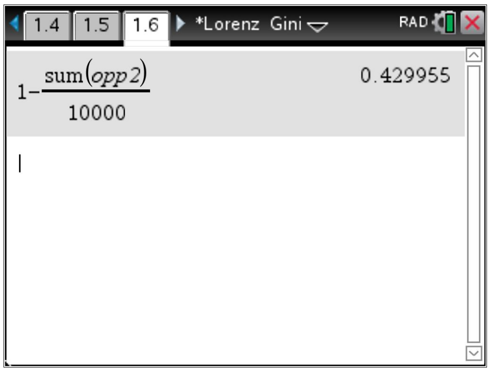
- maak een lijst T waarin de producten komen van lijst H met de som van de lijsten O en B (d.i. 2 maal de oppervlakten onder de Lorenzkromme)
- bereken de som S van alle elementen van de lijst T
- bereken $1-\dfrac{S}{10000}$.

Met TI-Nspire gaat het vlotter omdat men in de spreadsheetapplicatie formules kan ingeven in cellen en deze uitbreiden zoals in Excel.

<table>
<tr><th>TI-84 Plus C</th><th>TI-Nspire CX CAS</th></tr>
<tr><td>




</td><td>




</td></tr>
</table>

Economisten beweren dat een Ginicoëfficiënt boven 0,4 sociale conflicten kan veroorzaken tussen de armen en de rijken.

In de derde graad kan men via regressie het functievoorschrift zoeken van een kromme die goed aansluit bij de Lorenzkromme. Berekening van de Ginicoëficiënt met

$$G=\frac{\text{de oppervlakte tussen de Lorenzkromme en de diagonaal}}{5000}$$

is dan een economische toepassing op de berekening van de oppervlakte tussen twee krommen m.b.v. bepaalde integralen.

Oefening

Een ex-medewerker van de bank HSBC legt een internationaal systeem van fraude en witwasserij bloot, de zogenaamde SwissLeaks. Deze bank, HSBC, heeft bepaalde financiële constructies opgezet waardoor personen met een bankrekening bij de bank aan fiscale bijdragen voor hun land konden ontkomen. Dit werd mede mogelijk door het Zwitsers bankgeheim. Personen van verschillende nationaliteiten hebben voor miljarden dollars aan belastingontduiking en witwasserij kunnen doen. Ook Belgen hebben van deze constructie gebruik gemaakt.

Een overzicht van de landen met het aantal klanten en de bedragen wordt gegeven in de volgende tabel (bron: Knack nr 8 van 18 tot 24 februari 2015, 45ste jaargang):

	Land	**Aantal klant HSBC**	**Totaal bedrag (in miljarden dollars) op rekeningen in 2006/07**
1	***Zwitserland***	11235	31,2
2	***Frankrijk***	9187	12,5
3	***Verenigd Koninkrijk***	8844	21,7
4	***Brazilië***	8667	7,1
5	***Italië***	7499	7,4
6	***Israël***	6554	10,0
7	***Verenigde Staten***	4183	13,4
8	***Argentië***	3625	3,5
9	***Turkije***	3105	3,5
10	***België***	3002	6,2

Teken de Lorentzkromme horend bij bovenstaande tabel en bereken de Ginicoëfficiënt.

Oefeningen

Opbrengsten- en kostenfunctie, vraag- en aanbodfunctie

1) De totale opbrengst TO van een goed als functie van de verkochte hoeveelheid q (afzet) van dit goed wordt gegeven door:

   $TO = -5q^2 + 20q$

   Bepaal de afzet waarbij de opbrengst maximaal is. Hoeveel bedraagt de maximale totale opbrengst?

2) Gegeven:

   de totale opbrengstfunctie $TO = -10q^2 + 31000q$

   de totale kostenfunctie $TK = q^3 - 10q^2 + 1000q + 1000000$

   Gevraagd:

   a) Bepaal het voorschrift van de winstfunctie.
   b) Bepaal de afzet q waarbij de winst maximaal is.
   c) Wat is de totale opbrengst bij maximale winst?
   d) Wat is de totale kost bij maximale winst?

3) Gegeven: $TO = -0,4q^2 + 5q$ en $TK = 0,1q^2 + 8$.

   Gevraagd:

   a) Bepaal de maximale winst en de afzet bij maximale winst.
   b) Bepaal de opbrengst, de kosten en de prijs per product.
   c) Bepaal het break-even punt (kosten = opbrengst).

4) Een fabriek produceert q eenheidshoeveelheden (per 1000 stuks) van een goed.

   De prijsfunctie p (per stuk) wordt gegeven door $p = -q + 22$ en de totale kostenfunctie TK door $TK = q^2 + 2q$.

   Gevraagd:

   a) Wat is het domein van de prijsfunctie in deze context?
   b) Bepaal de maximale winst.
   c) Hoeveel stuks moeten dan geproduceerd worden?

d) Wat is de prijs van één goed bij maximale winst?

e) Bepaal de opbrengst bij maximale winst.

f) Bepaal de kosten bij maximale winst.

5) De hoeveelheid q van een goed wordt uitgedrukt per 500 stuks. De prijs p per stuk wordt bepaald door: $p = -0,5q + 100$.

De kosten K worden berekend met: $K = q^2 + 10q + 250$

Gevraagd:

a) Bepaal de maximale winst.

b) Bepaal het aantal te produceren stuks om die maximale winst te realiseren.

c) Bepaal de prijs p bij maximale winst.

d) Wat is de opbrengst bij maximale winst?

e) Wat zijn de kosten bij maximale winst?

6) De vraag q naar het aantal (x 1000) wordt bepaald door de prijs p (per stuk) die ervoor gevraagd wordt: $q = -0,5p + 1000$.

De kosten per stuk worden bepaald door het aantal geproduceerde goederen: $k = 800q$.

Gevraagd:

a) Bepaal de maximale winst

b) Bij welke afzet is dit het geval?

c) Wat is de opbrengst bij maximale winst?

d) Wat zijn de kosten bij maximale winst?

e) Wat is de prijs per stuk van het goed?

7) Een producent verdeelt hetzelfde goed op de Europese en Amerikaanse markt.

	Europese markt	Amerikaanse markt
Afzet bij maximale winst (x10^6 eenheden)	$q = 25$	$q = 55$
Prijs per stuk	$p = -4q + 300$	$p = -q + 150$
Variabele kosten	€100 / per stuk	€40 / per stuk
Totaal vaste kosten	€ 4,92 x 10^9	

Bereken de maximale winst.

8) De aanbodfunctie wordt gegeven door:

$$p = 2q + 20 \qquad (p\text{=prijs, } q\text{=hoeveelheid})$$

De vraagfunctie wordt gegeven door:

$$p = -3q + 180$$

Gevraagd:

Bepaal de hoeveelheid, de prijs en de omzet bij een marktevenwicht (vraag = aanbod).

De overheid besluit om een BTW-heffing te vragen van 19%.

Gevraagd:

Bepaal de hoeveelheid, de prijs en de omzet na invoer van de BTW-heffing.

9) Gegeven een aanbodfunctie en een vraagfunctie met de prijs als onafhankelijke veranderlijke: $\begin{cases} q_v = 140 - 2p \\ q_a = 6p - 36 \end{cases}$

a) Stel beide functies grafisch voor. Bepaal ook het evenwichtspunt van het systeem.
b) De staat legt een belasting op ten laste van de consument. Deze bedraagt €10 per stuk. Welke functie zal moeten worden gewijzigd? Geef het nieuwe voorschrift van deze functie. Hoe is de grafiek van de nieuwe functie gewijzigd in vergelijking van de grafiek van de oude functie? Wat zal er gebeuren met het evenwichtspunt?
c) De staat legt een procentuele belasting op (denk aan % BTW) aan de producent. Stel hier voor de eenvoud 15%. Dit betekent dat de producent 15% van de prijs die hij krijgt moet doorstorten aan de staatskas. Welke functie zal moeten worden aangepast? Geef het nieuwe voorschrift van deze functie? Hoe is de grafiek van de nieuwe functie gelegen t.o.v. de grafiek van de oude functie? Welke invloed heeft dit op de ligging van het evenwichtspunt?

Suggestie voor verder onderzoek:

Geval 1: is er een verschil tussen de situatie waarbij de consument €10 tol betaalt en de situatie waarbij de producent €10 tol betaalt?

Geval 2: is er een verschil tussen de situatie waarbij de consument 10% tol op de prijs betaalt en de situatie waarbij de producent 10% tol op de prijs betaalt?

Isokostlijn

1) Punten van een isokostlijn bepalen 2 inputs of factoren van productie die kunnen aangekocht worden met dezelfde kost.

   Elk van die factoren (inputs) heeft een eenheidsprijs. De fabrikant heeft een bepaald budget ter beschikking voor ieder van deze factoren.

Algemeen kunnen we stellen:

$$B = W \cdot p_W + G \cdot p_G$$

met

- B: het totale beschikbare budget
- W: aantal eenheden van de eerste factor
- p_W: prijs per eenheid van factor W
- G: aantal eenheden van de tweede factor
- p_G: prijs per eenheid van factor G

De uitdrukking $B = W \cdot p_W + G \cdot p_G$ oplossen naar W levert:

$$W = \frac{B - G \cdot p_G}{p_W}$$

$$W = \frac{B}{p_W} - \frac{p_G}{p_W} G$$

Dit verband tussen de factoren W en G is van de vorm $y = mx + q$ en zal als grafiek een rechte geven met

richtingscoëfficiënt $m = -\frac{p_G}{p_W}$ (een dalende rechte)

$q = \frac{B}{p_W}$ (intersectie met de verticale as).

Vragen:

a) Wat gebeurt er met de grafiek als het beschikbaar budget B opgetrokken wordt, zonder aanpassing van de eenheidsprijzen van de beschouwde factoren W en G?

b) Wat gebeurt er met de grafiek als enkel de eenheidsprijs van de factor G toeneemt of afneemt?

c) Wat gebeurt er als enkel de eenheidsprijs van de factor W toeneemt of afneemt?

d) Wat gebeurt er als de eenheidsprijzen van beide factoren wijzigen zonder de onderlinge verhouding te veranderen?

2) Een persoon heeft €1200 ter beschikking om 2 goederen aan te schaffen. Het eerste goed kost €25 en het tweede €20.

   a) Construeer de isobudgetlijn (isokostlijn) die alle mogelijke combinaties toont van de hoeveelheden die kunnen worden aangeschaft met hetzelfde budget.
   b) Wat gebeurt er met de grafiek als de persoon zijn beschikbaar budget wegens besparingen moet beperken tot €1000?
   c) Wat is de invloed op de grafiek van een prijsstijging van de eenheidsprijs van een goed van €25 naar €30?
   d) Wat is de invloed op de grafiek van een prijstoename van 20% op de eenheidsprijs €20?
   e) Wat is de invloed op de grafiek als beide eenheidsprijzen met €5 afnemen?

3) Zowel steenkool (S) als aardgas (G) kunnen worden gebruikt bij de productie van staal. De prijs van steenkool bedraagt €100 per hoeveelheidseenheid, voor aardgas is dit €500.

   a) Teken de isokostlijn wanneer het budget €10000 bedraagt.
   b) Wat gebeurt er als het budget met 50% toeneemt?
   c) Wat gebeurt er als de gasprijs met 20% daalt?
   d) Wat gebeurt er als de steenkoolprijs met 15% stijgt?
   (Vertrek telkens van dezelfde beginsituatie.)

Oefeningen op stelsels van vergelijkingen

1) Bepaal het break-even punt (p,q) (prijs, hoeveelheid) voor de volgende gevallen:

   a) $\begin{cases} q_v = 220 - 5p \\ q_a = -20 + 3p \end{cases}$ (v = vraag, a = aanbod)

   b) $\begin{cases} q_a = -45 + 8p \\ q_v = 125 - 2p \end{cases}$

   c) $\begin{cases} q_a + 32 - 7p = 0 \\ q_v - 128 + 9p = 0 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} 13p - q_a = 27 \\ q_v + 4p - 24 = 0 \end{cases}$

2) Gegeven 2 sets van voorwaarden voor 2 markten: vlees van een koe (K) en varkensvlees (V), één set per markt. Beide markten hebben een invloed op elkaar.
   Bepaal de break-even voorwaarde voor iedere markt.

   $\begin{cases} q_{v,K} = 82 - 3p_K + p_V \\ q_{a,K} = -5 + 15p_K \end{cases}$ en $\begin{cases} q_{v,V} = 92 + 2p_K - 4p_V \\ q_{a,V} = -6 + 32p_V \end{cases}$

   (break-even betekent $q_a = q_v$ voor iedere markt).

3) Bepaal de evenwichtsprijs en –hoeveelheid voor de volgende aanbod- en vraagfuncties:

   a) vraagfunctie: $p + q^2 - 3q - 20 = 0$

      aanbodfunctie: $p - 3q^2 + 10q = 5$

   b) vraagfunctie: $3p + q^2 - 5q - 102 = 0$

      aanbodfunctie: $p - 2q^2 + 3q + 71 = 0$

4) De vraag- en aanbodanalyse kan ook toegepast worden op meer dan 2 markten.
   Bepaal de evenwichtsvoorwaarden voor de volgende 3 markten:

   markt 1 $\leftrightarrow \begin{cases} q_{v,1} = 23 - 5p_1 + p_2 + p_3 \\ q_{a,1} = -8 + 6p_1 \end{cases}$ markt 2 $\leftrightarrow \begin{cases} q_{v,2} = 15 + p_1 - 3p_2 + 2p_3 \\ q_{a,2} = -11 + 3p_2 \end{cases}$

   markt 3 $\leftrightarrow \begin{cases} q_{v,3} = 19 + p_1 + 2p_2 - 4p_3 \\ q_{a,3} = -5 + 3p_3 \end{cases}$

Functievoorschriften bepalen

1) Bepaal een voorschrift voor de totale ontvangst *TO* die afhankelijk is van de verkochte hoeveelheid q stuks en een prijs p van €512 het stuk.

2) De prijs van een zeker goed is €75. In de solden kun je dit goed met een korting van 20% aankopen. Bepaal een voorschrift voor de totale korting *TK*. De totale korting is afhankelijk van het aantal verkochte goederen q.

3) De totale kosten *TK* bij de productie van 2 goederen is afhankelijk van de geproduceerde hoeveelheden q_1 en q_2 van deze goederen. Indien er niets geproduceerd wordt, zijn de kosten toch nog altijd gelijk aan €20. Dit worden de vaste kosten genoemd.
De productiekost per eenheid van het goed bedraagt respectievelijk €3,4 en €2,7.
Bepaal het voorschrift (formule) voor de totale kosten *TK*.

Niveauverzamelingen

1) Een totale opbrengstenfunctie *TO* uitgedrukt in eenheden van €100, wordt gegeven door :

   $TO = -q^2 + 22q$ (q in eenheden van 10).

   Bepaal de niveauverzameling van

   a) niveau 5
   b) niveau 100
   c) niveau 25 (q afgerond op 1 decimaal)

2) Een totale ontvangstenfunctie TO uitgedrukt in eenheden van 10^5 wordt gegeven door :

   $TO = 5q - 0,4q^2$ (q in eenheden van 100)

   Bepaal de niveauverzameling van

   a) niveau 10
   b) niveau 12
   c) niveau 15

Lineaire programmering

1) Een school wil voor de hoogste klassen een stageweek organiseren. De leerlingen en hun materiaal worden met huurbusjes ter plaatse gebracht. Er zijn twee soorten minibusjes beschikbaar:
   - Volkswagenbusje: 6 personen en 6 dozen materiaal.
   - Fordbusje: 8 personen en 4 dozen materiaal.

   Het huurgeld van een busje per dag bedraagt 120 euro.

   In het laatste jaar zitten 75 leerlingen en er moeten 42 dozen aan materiaal meegenomen worden. Hoeveel busjes van ieder merk moet de school bestellen om op een zo goedkoop mogelijke manier de stageweek te organiseren? Hoeveel bedragen die minimale kosten?

2) Een fabrikant wil een deel van zijn budget spenderen aan reclame op radio en/of televisie. Hij wil een aantal minuten op radio en op televisie reserveren. Hou hierbij rekening met de volgende situatie:
   - hij wil minstens 30 s zendtijd op de radio
   - hij wil minstens 3 min zendtijd op de televisie
   - reclame op de radio kost € 1000 per min
   - reclame op de televisie kost € 5000 per min
   - het totale beschikbare budget is € 25000
   - hij wil minstens 2 keer zoveel zendtijd op de televisie dan op de radio.

   Bepaal het aantal seconden zendtijd op de radio en het aantal minuten zendtijd op de televisie zodat de totale kosten minimaal zijn.

   Kun je het antwoord hier ook vinden zonder lineaire programmering?

Referentielijst

Dowling, E. T. (2012), Introduction to Mathematical Economics, New York, Schaum's Outline Series Mc Graw Hill.

Dowling, E.T. (1993), Mathematical Methods for Business and Economics, New York, Schaum's Outline Series Mc Graw Hill.

Don, E., Lerner, J. (2000), Basic Business Mathematics, New York, Schaum's Outline Series Mc Graw Hill.

Biront, C., Deprez, J (2002) Wiskundige begrippen en methoden voor het hoger onderwijs met toepassingen uit de economische wetenschappen deel 1, Antwerpen, Wolters Plantyn

Biront, C., Deprez, J (2005) Wiskundige begrippen en methoden voor het hoger onderwijs met toepassingen uit de economische wetenschappen deel 3, Antwerpen, Wolters Plantyn

Wacha, D.M. (2013) Quantative Analysis, Algebra with a Business Perspective, Bookboon.com.

de Rooij, F.M. (2010) Grafische rekenmachine in de praktijk, GRIP 2 Economie, Actua Uitgeverij.

De economie kent veel wiskundige toepassingen. In dit cahier worden verschillende economische begrippen geïntroduceerd voor de tweede graad, met bijhorende vraagstukken in een concrete economische context.
Aan bod komen economische toepassingen op richtingscoëfficiënt, stelsels van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden, tabellen en grafieken, het transformeren van grafieken. Zo worden begrippen als vraag en aanbod, winst, opbrengst, marginale kost, Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt geïntroduceerd.

De assisterende inzet van de TI-84 Plus C Silver Edition en de TI-Nspire CX CAS worden hierbij naast elkaar geplaatst.

Walter De Volder (†) was ere-pedagogisch adviseur wiskunde voor het Bisdom Brugge.

Guido Herweyers doceert wiskunde en statistiek aan de KU Leuven, Technologiecampus Oostende en wiskunde aan de Hogeschool VIVES Campus Oostende.

Dominiek Ramboer doceert wiskunde aan de Hogeschool VIVES Campus Oostende en wiskunde en fysica aan de Petrus en Paulus Scholen Campus West (VTI Oostende).

Mei 2015

Texas Instruments