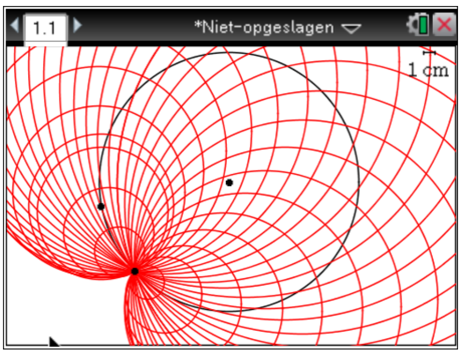
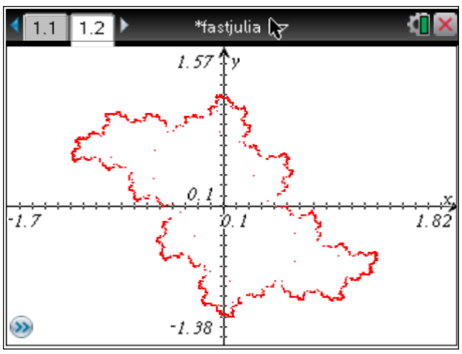
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 33

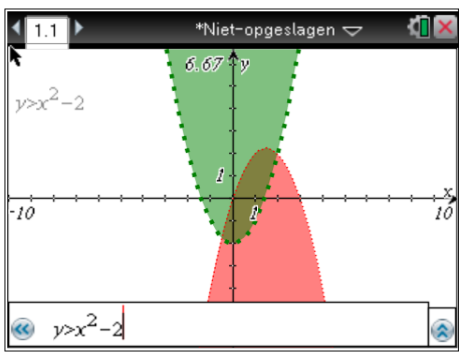
Voorbeelden met TI-Nspire uit de Analyse

Uitgewerkte voorbeelden voor de 3de graad ASO

Didier Deses







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Voorbeelden met de **TI-Nspire** uit de analyse van de 3de graad ASO

Dr Didier Deses[1]

[1]Leerkracht wiskunde K. A. Koekelberg, medewerker aan het departement wiskunde van de VUB

Voorwoord

Dit cahier is bedoeld als inspiratiebron voor leerkrachten. Het is de herwerkte versie van cahier 14: "Voorbeelden met de **TI-84+** uit de analyse". Dezelfde voorbeelden die vroeger met de **TI-84+** werden gemaakt, worden hier met de **TI-Nspire** (met software versie 3.1.0) gegeven. Het kan nuttig zijn om beide cahiers naast elkaar te leggen.

Inhoudelijk staan er een groot aantal opdrachten in, met als centraal thema de leerstof analyse van de 3de graad ASO. De opdrachten zijn hoofdzakelijk gericht naar leerlingen uit de wetenschappelijke richtingen, maar kunnen mits eventuele aanpassingen ook gebruikt worden in andere klassen. De opdrachten werden met oog op de praktijk gekozen. De meesten kunnen probleemloos ingelast worden in de lessen analyse, als oefening of als voorbeeld en werden reeds in echte klassituaties getoetst. Bij de opdrachten staat telkens het betrokken onderwerp vermeld, deze zijn ook terug te vinden in de index achteraan, samen met alle toetsen en menu's van de **TI-Nspire** die gebruikt worden in deze bundel. Na elke opdracht wordt een mogelijke oplossingswijze behandeld waarbij de **TI-Nspire** gebruikt wordt. Sommige opdrachten kunnen als inspiratie dienen voor de onderzoekscompetenties, gewoon als voorbeeld, als implementering van ICT of als oefening. Het is aan de leerkracht om te zien wat hij met zijn klas kan behandelen en op welke manier.

De verschillende hoofdstukken bevatten opdrachten die gaandeweg iets moeilijker worden.

Er wordt eerst een zeer bondige inleiding gegeven over het gebruik van de **TI-Nspire** in de analyse, onmiddellijk gevolgd door de meest eenvoudige oefeningen.

Bij de "iets moeilijkere" opdrachten staan de meeste klassiekers alsook oefeningen met de **TI-Nspire** die in de meeste klassen kunnen behandeld worden en erop gericht zijn om tegelijkertijd inzicht te geven en leuke voorbeelden te bieden. Er zijn tevens een aantal oefeningen opgenomen die met de **TI-**

Nspire een fluitje van een cent lijken, maar die wiskundig wel wat meer in hun mars hebben.

In het volgende hoofdstuk worden de opdrachten “nog iets moeilijker”. De eerste paragraaf echter bevat zeer eenvoudige oefeningen, maar is bedoeld om inzicht te geven op de wijze waarop grafische rekenmachines werken. Rekenmachines zijn immers één van de meest succesvolle toepassingen van de wiskunde. Deze paragraaf is essentieel voor het verantwoord gebruiken van de **TI-Nspire** (of een ander grafisch rekentoestel). Hierna volgt een korte introductie over het programmeren van een **TI-Nspire** samen met enkele eenvoudige programma’s. De laatste paragraaf toont hoever men eigenlijk wel kan gaan dmv een beetje programmeren op de **TI-Nspire** .

Het laatste hoofdstuk tenslotte bevat enerzijds een beschrijving van een aantal functies van de **TI-Nspire** die soms wel handig kunnen zijn tijdens de lessen analyse. Anderzijds zitten er ook een aantal extra meer ge avanceerde voorbeelden in.

Neem nu maar uw **TI-Nspire** ter hand. Veel lees- en oefenplezier!

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

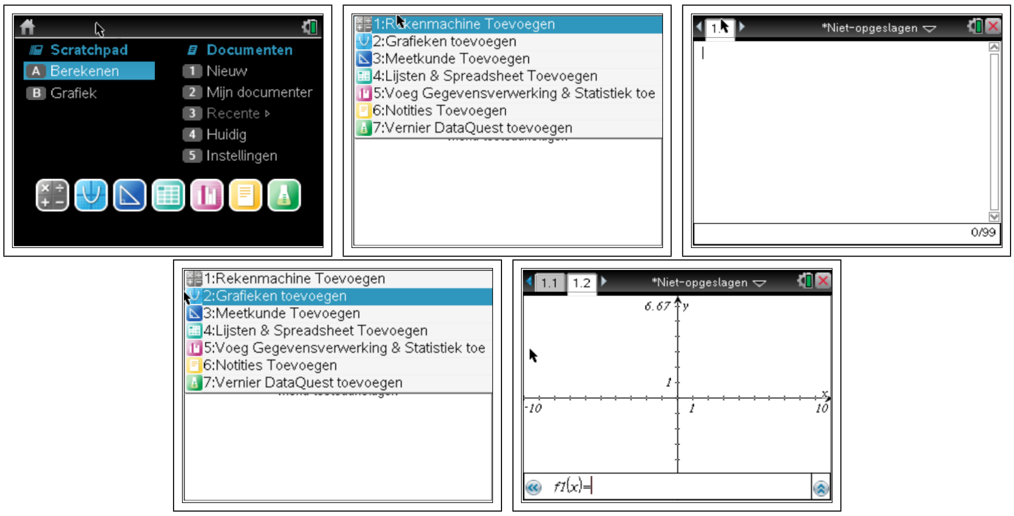
Inleiding

We zullen regelmatig dingen intikken op de **TI-Nspire** *. We gebruiken hier* `esc` *om een knop aan te duiden en* `ctrl` `[+page]` *om een keuze aan te duiden die met behulp van de* `ctrl` *knop kan worden gevonden. De notatie* `menu` `[algebra]` `[oplossen]` *gebruiken we dan weer om een selectie uit een menu te maken. Er zijn enkele toetsen met icoontjes, die zullen we volgende namen geven.*

icoontje	*naam*
huisje	*home*
rekenmachine	*scratch (van scratchpad)*
boekje	*cat (van catalogus)*
sjabloon (links naast het boekje)	*sjabloon*

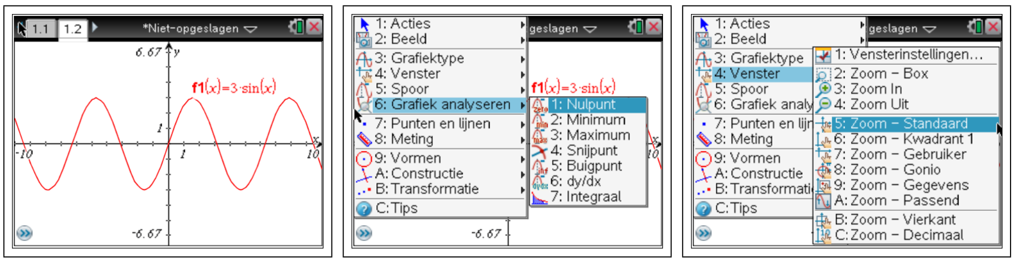
Zo vind je bijvoorbeeld in de catalogus onder `cat` `[dms]` *het commando om hoeken om te zetten van radialen naar graden, minuten en seconden. Soms zullen we ook de opeenvolgende stappen op de* **TI-Nspire** *geven door "screenshots". Deze moeten dan gelezen en uitgevoerd worden op de manier van een strip-verhaal: van links naar rechts en van boven naar onder.*

De meeste nuttige functies die kunnen dienen in de lessen analyse van de derde graad zullen in een rekenvenster of een grafisch venster gevonden worden. We maken nu een document aan dat bestaat uit een rekenvenster en een grafisch venster. Dit doe je door `home` `[nieuw]` te drukken, kies dan een rekenvenster. Om een nieuw venster aan te maken in een document gebruik je `ctrl` `[+page]`, je kan nu een grafisch venster toevoegen.



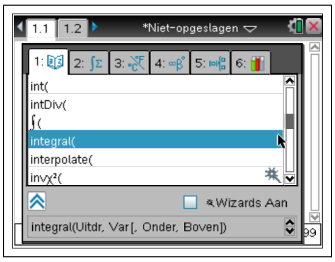
Nadat je de grafiek van een functie hebt gemaakt in een grafisch venster kan je de meest gebruikte functies in een menuutje terugvinden. Dit doe je als volgt.

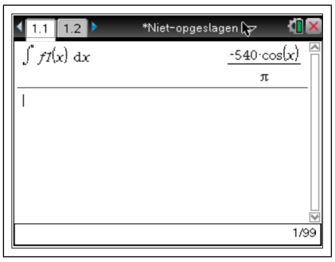
In het grafisch venster geef je de functie in, daarna gebruik je `menu` `[grafiek analyseren]`. Je kan het grafisch venster aanpassen door `menu` `[venster]` te gebruiken. De keuze `[zoom - standaard]` geeft een orthonormaal assenkruis, dat meestal wel geschikt is.



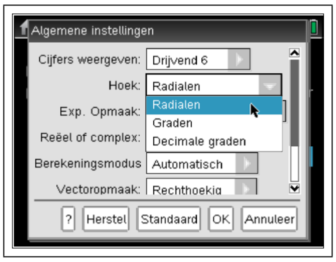
Bij de grafiek van een functie wordt telkens het voorschrift erbij gezet, wanneer je meerdere functies tekent, kan dit wel tot een overvol scherm leiden. Je kan dit afzetten via `home` `[instellingen]` `[grafieken & meetkunde]`.

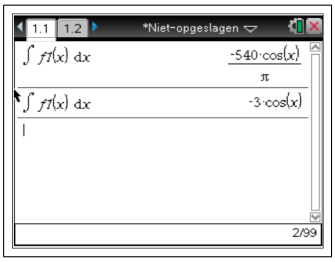
Een handige tip: als je een commando niet meer terugvindt in het bos van de verschillende menu's, gebruik dan de toets met het boekje `cat`. Je krijgt hier een volledige lijst van alle commando's die de **TI-Nspire** kent. Door de beginletter te drukken ga je onmiddellijk naar alle commando's die met deze letter beginnen. Onderaan staat een bondig overzicht van de parameters die de geselecteerde functie verwacht. In dit verband is het nuttig om te weten of je een **TI-Nspire CAS** hebt (Computer Algebra System) of niet. De symbolische commando's (zoals afleiden en integreren) werken enkel op de **CAS** versie.





Waarom is dit een primitieve van de functie $f_1(x) = 3\sin(x)$? Als je dit hebt uitgezocht wil je misschien de **TI-Nspire** met radialen laten rekenen. Dit doe je door `home` `[instellingen]` `[algemeen]`. Nadien verschijnt wel het verwachte antwoord.



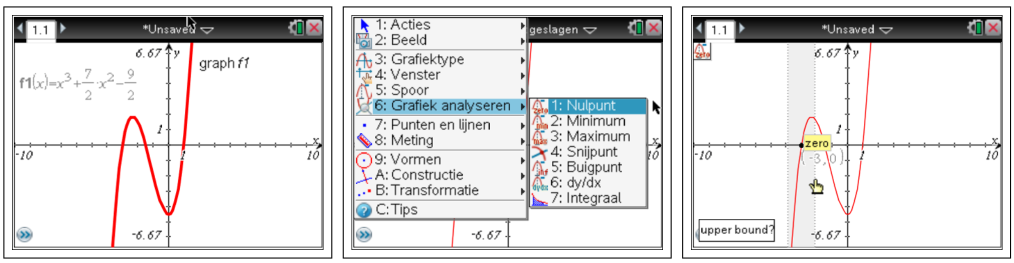


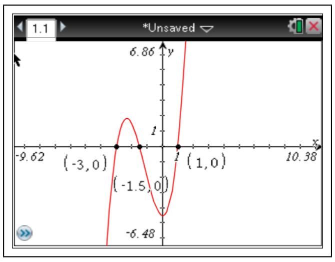
Hoofdstuk 2

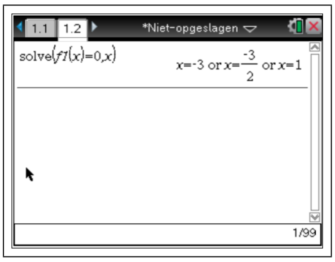
Eenvoudige opdrachten

Opdracht 1. *Nulwaarden bepalen*
Soms vergt het bepalen van de nulwaarden van een veelterm inzicht en kan de **TI-Nspire** helpen. Maak de grafiek van de reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{2}$. Bepaal de nulwaarden zowel manueel als met de **TI-Nspire** .

Oplossing 1. Om de nulwaarden te vinden kan men de veelterm ontbinden in factoren. Door op te merken dat de som van de coëfficiënten nul is, weten we dat de veelterm deelbaar is door $(x-1)$. Deling of de methode van Horner geeft dan de andere factor die van de tweede graad is en kan worden ontbonden via de discriminant methode. De nulwaarden $1, -3$ en $\frac{3}{2}$ kunnen aldus gevonden worden. Met de **TI-Nspire** gebeurt dit als volgt. Geef het voorschrift in een grafisch venster en maak de grafiek. We kunnen daarna driemaal een nulwaarde benaderen via `menu` `[grafiek analyseren]` `[nulpunt]`. Je kan ook gebruik maken van een rekenvenster om met het **CAS** de nulwaarden te bepalen.

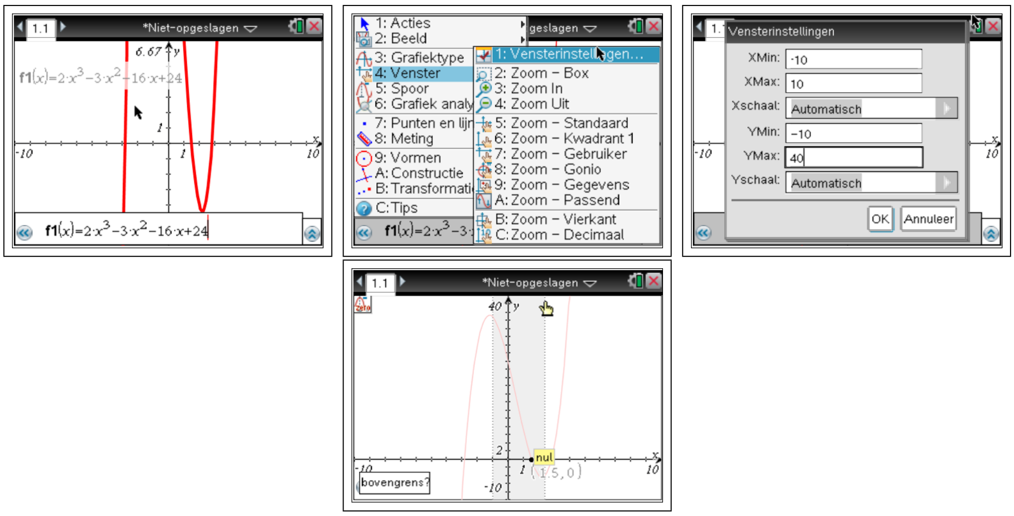




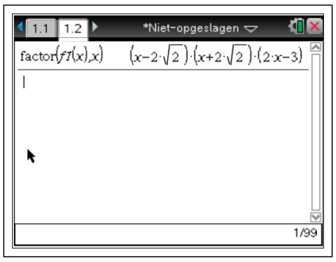


Opdracht 2. *Ontbinden in factoren*
Soms is een veelterm moeilijk ontbindbaar en kan de **TI-Nspire** een grote hulp zijn. Ontbind de veelterm $2x^3 - 3x^2 - 16x + 24$ in factoren. De discriminant methode is hier niet van toepassing en Horner niet onmiddellijk omdat er geen gehele nulwaarden zijn.

Oplossing 2. Maak eerst de grafiek in een grafisch venster en pas daarna via `menu` `[venster]` `[vensterinstellingen]` de schaal op de y-as aan tot je een mooi beeld krijgt. Via `menu` `[grafiek analyseren]` `[nulpunt]` kan je nu de nulwaarden zoeken. Eén ervan is $x = \frac{3}{2}$, controleer dit handmatig.

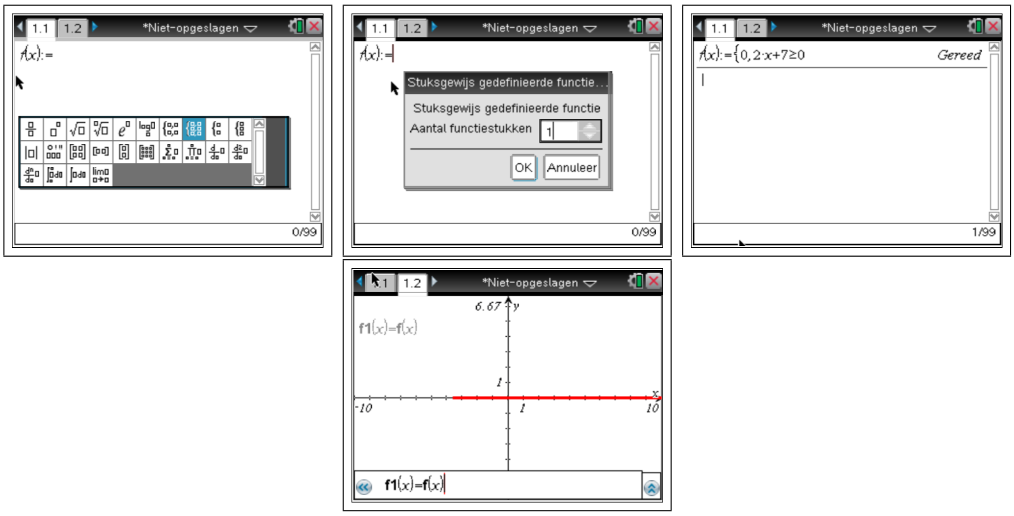


Pas nu Horner toe zodat je de factor $(x - \frac{3}{2})$ kan buitenbrengen. Het overgebleven deel is nu van de tweede graad en kan ontbonden worden via de discriminant methode. De uiteindelijke ontbinding is $2(x - \frac{3}{2})(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$. Met het **CAS** kan je dit natuurlijk ook door de **TI-Nspire** laten uitrekenen.



Opdracht 3. *Ongelijkheden*
Los de ongelijkheid $2x + 7 \geq 0$ grafisch op in $\mathbb{R}$.

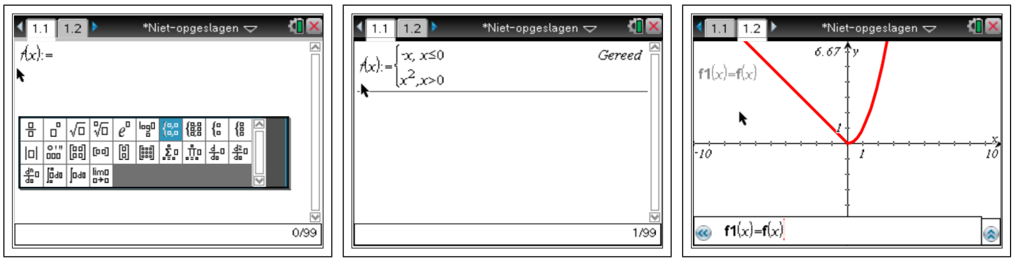
Oplossing 3. We gebruiken hiervoor een rekenvenster en een grafisch venster. In het rekenvenster geef je een stuksgewijs gedefinieerde functie in dmv `sjabloon`, let op het gebruik van `:=` om een functie de definiëren. Deze functie bestaat enkel uit één enkele voorwaarde: de waarde 0 als $2x + 7 \geq 0$. In het grafisch venster tekenen we nu de oplossing van de ongelijkheid.



Opdracht 4. *Meervoudige voorschriften*
Maak de grafiek en onderzoek grafisch de continuïteit van

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x \leq 0 \\ x^2 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Oplossing 4. De functie wordt ingegeven op dezelfde wijze als de vorige oefening.



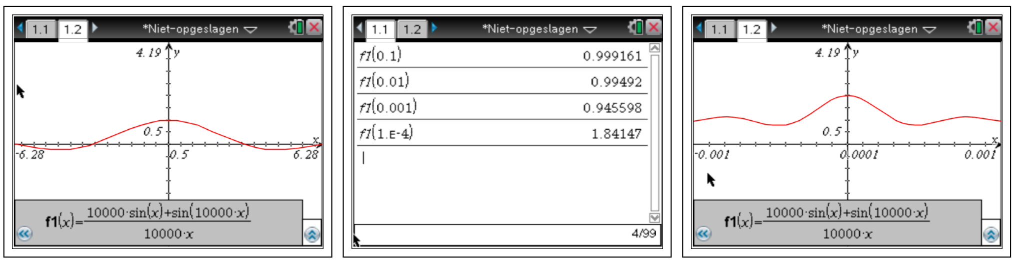
Aan de hand van de grafiek kan je inzien dat f continu is op $\mathbb{R}$.

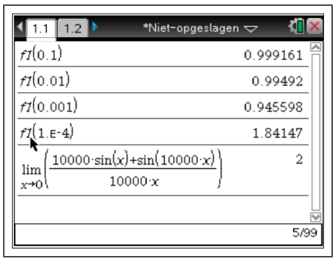
Opdracht 5. *Limieten*
Soms leidt het gebruik van de **TI-Nspire** tot een verkeerde conclusie. We behandelen een klassieker. Maak de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \frac{10000 \sin x + \sin 10000x}{10000x}$, met de grenzen uit `menu` `[venster]` `[zoom - gonio]`. Gebruik een rekenvenster om na te gaan welke beelden de **TI-Nspire** geeft voor waarden rond 0 (bijvoorbeeld $0.1, 0.01$ en 0.001). Vergelijk met de grafiek. Maak de grafiek opnieuw door via `window` de grenzen van de x-as te veranderen in `xmin=-0.2` en `xmax=0.2`. Bereken natuurlijk ook de limiet.

Oplossing 5. De limiet is eenvoudig te berekenen als men beschikt over $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{10000 \sin x + \sin 10000x}{10000x} &= \lim_{x\to 0} \frac{10000 \sin x}{10000x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin 10000x}{10000x} \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Met de **TI-Nspire** bekomt men echter een grafiek waarop men zonder de grenzen aan te passen niets van het gedrag van f ziet.

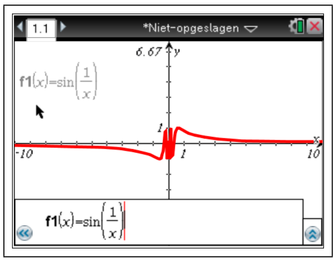


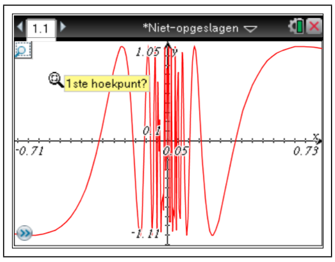


Merk hier op dat de **TI-84+** de grafiek reeds foutief maakte bij een coëfficiënt 100. De **TI-Nspire** begaat dezelfde fout, maar pas vanaf een coëfficiënt 10000. Er moet ook gezegd worden dat de limiet manueel uitrekenen leerrijk is, maar dat het gebruik van de **CAS** om de limiet uit te rekenen op zich niets bijbrengt. Dit kan echter wel als controle dienen.

Opdracht 6. *Limieten*
De limiet $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ bestaat niet. Gebruik de **TI-Nspire** om grafisch te achterhalen wat er precies gebeurt.

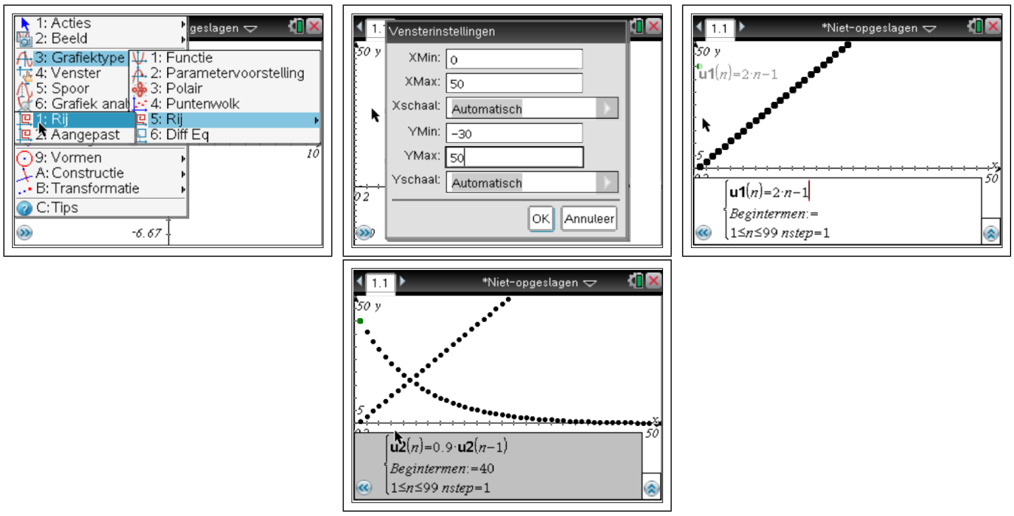
Oplossing 6. Dit is opnieuw een klassieker. Wanneer $x \to 0$ zal de functie $\sin \frac{1}{x}$ steeds sneller gaan oscilleren. Met de **TI-Nspire** kan men tenminste dit gedrag laten zien, hetgeen zonder ICT moeilijker zou zijn.





Opdracht 7. *Rijen*
Maak de grafiek van de rijen $u_n = 2n - 1$ en $v_n = 0.9v_{n-1}$ waar $v_0 = 40$, $n \in \mathbb{N}$.

Oplossing 7. Het grafisch voorstellen van rijen gaat met de **TI-Nspire** als volgt. In een grafisch venster selecteer je `menu` `[grafiektype]` `[rij]`. Nu kan je de rijen ingeven. Je kan dit doen door de algemene term of door recursie. Voor je de grafiek maakt, doe je er goed aan om met `menu` `[venster]` de gewenste grenzen correct in te stellen.



Opdracht 8. *Ongelijkheden*
Los het volgend stelsel ongelijkheden in het vlak grafisch op.

$$\begin{cases} y + x(x-3) < 0 \\ y > x^2 - 2 \end{cases}$$

Oplossing 8. Je kan op de **TI-Nspire** zeer eenvoudig de grafiek maken van ongelijkheden met twee onbekenden. Daarvoor herleid je de ongelijkheid naar de vorm $y > f(x)$ (of $y \leq f(x)$, ...). In een grafisch venster haal je het gelijkheidsteken van '$f_1(x) =$' weg. Je kan nu kiezen voor een ongelijkheid. Je kan dit meerdere keren doen om de grafiek van een stelsel ongelijkheden met twee onbekenden grafisch op te lossen.

Hoofdstuk 3

Iets moeilijkere opdrachten

3.1 Standaardoefeningen

Opdracht 9. *Even en oneven functies*
Volgende stelling laat zien dat elke functie de som is van een even en een oneven functie.

Stelling 1. *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie. Stel*

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ en } f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Dan is f_e even, f_o oneven en $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$.

Bewijs deze stelling. Werk enkele voorbeelden met veeltermen uit. Van waar komt de benaming 'even' en 'oneven'? Wat gebeurt er indien f zelf al even of oneven is, bijvoorbeeld $f(x) = \sin x$ of $f(x) = \cos x$? Gebruik de **TI-Nspire** om de grafieken van f, f_e en f_o te maken voor een willekeurige f. Indien $f(x) = e^x$ dan is $f_e(x) = \cosh x$ en $f_o(x) = \sinh x$, maak hiervan de grafieken.

Oplossing 9. Het bewijs van de stelling is een eenvoudige verificatie. Wanneer men echter de stelling als volgt formuleert is het bewijs uitdagender en leidt vanzelfsprekend tot bovenstaande formules. Dit kan gegeven worden in de betere klassen.

Stelling 2. *Elke functie is de som van een even en een oneven functie.*

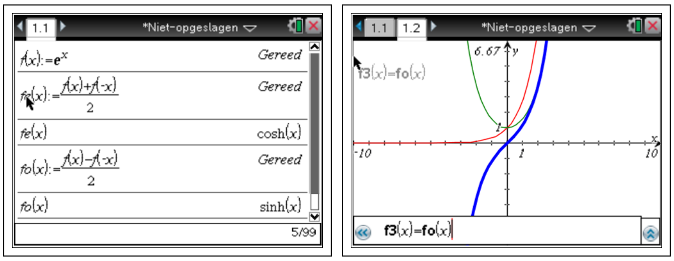
Bewijs. Stel dat $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ waarbij f_e even is en f_o oneven. Dan bekomen we:

$$\begin{cases} f(x) &= f_e(x) + f_o(x) \\ f(-x) &= f_e(x) - f_o(x) \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel naar f_e en f_o levert de bovenstaande formules. $\square$

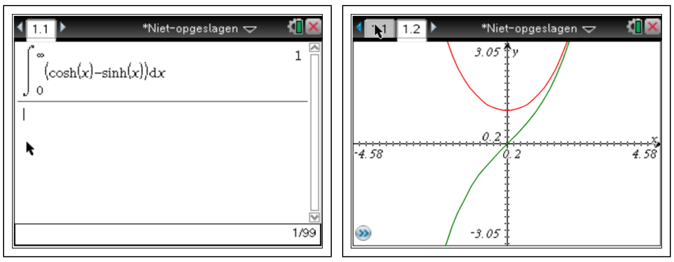
Als $f(x)$ een veelterm is, dan bestaat $f_e(x)$ uit alle termen van even graad en $f_o(x)$ uit alle termen van oneven graad. Indien f reeds even is zal $f_e(x) = f(x)$ en $f_o(x) = 0$. Eenzelfde conclusie kan getrokken worden indien f oneven is.

Deze stelling door de **TI-Nspire** laten illustreren kan op eenvoudige wijze.

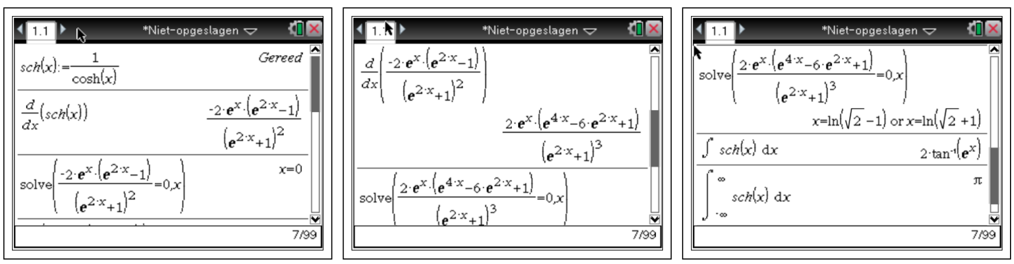


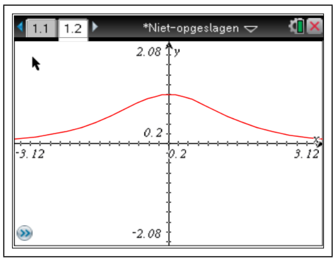
De bovenstaande aanpak laat ook toe om te spreken over sinh en cosh. Alhoewel deze functies vaak als 'vergezocht' worden betiteld hebben ze vele toepassingen bijvoorbeeld in de fysica (hangende ketting) of in de architectuur en de kunst (gewelven van Gaudi).

extra opdracht: Bepaal $\int_0^{+\infty} \cosh(x) - \sinh(x)\mathrm{d}x$. Maak de bijbehorende schets. Merk op dat dit veel interessanter is als je de integraal met de hand berekent en geen **CAS** gebruikt.



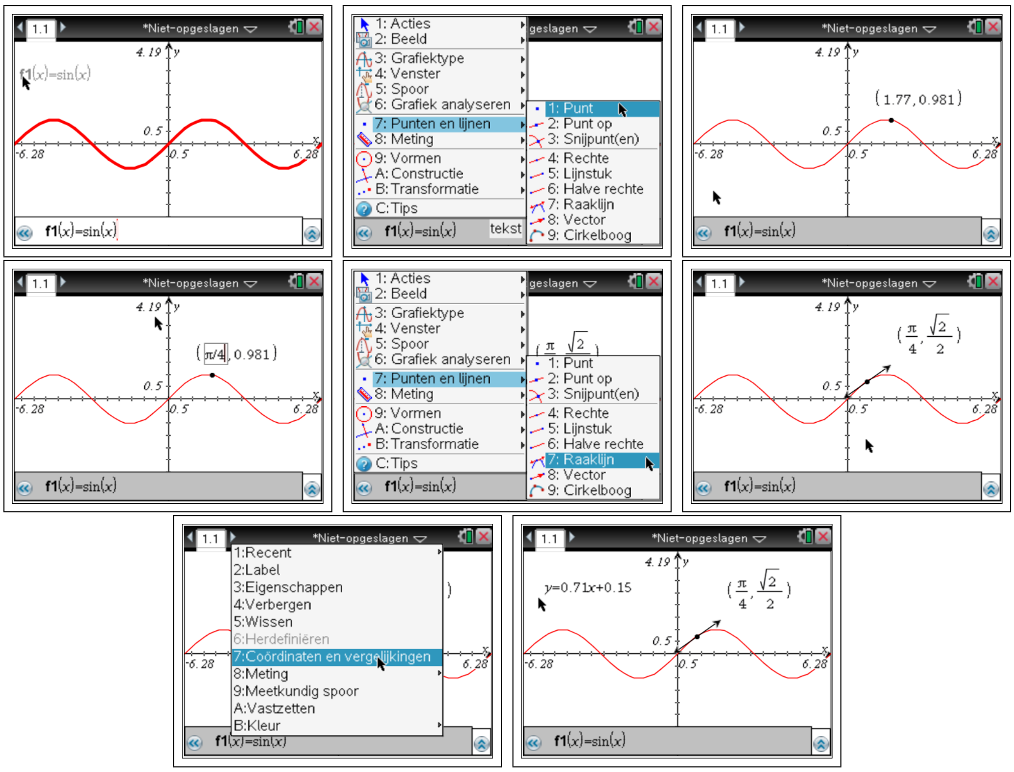
Extra opdracht: Maak een functieonderzoek van sech $(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$. Ook hier is het manueel werk interessanter dan het gebruik van het **CAS** .



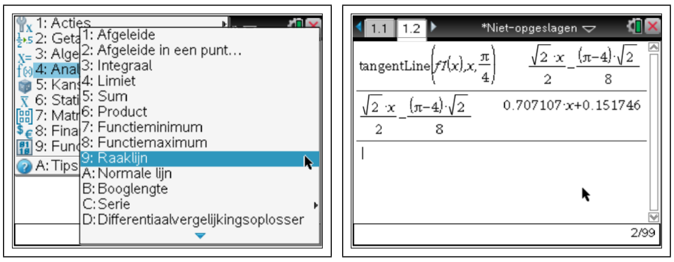


Opdracht 10. *Raaklijnen*
Bepaal aan de kromme $y = sin(x)$ de raaklijn in het punt $a = \frac{\pi}{4}$. Gebruik de **TI-Nspire** om de grafiek te maken.

Oplossing 10. Geef in een grafisch venster de functie in. Kies dan `menu` `[punten en lijnen]` `[punt op]` en selecteer een willekeurig punt op de kromme. Dubbelklik dan op de x-coördinaat van dit punt en geef dan de waarde $\frac{\pi}{4}$ in. Vervolgens gebruik je `menu` `[punten en lijnen]` `[raaklijn]` om de raaklijn in dit punt te tekenen. Tenslotte selecteer je de raaklijn en gebruik je `ctrl` `[menu]` `[coordinaten en vergelijkingen]` om de vergelijking van de raaklijn te vinden. Merk op dat dit een benaderde waarde geeft.

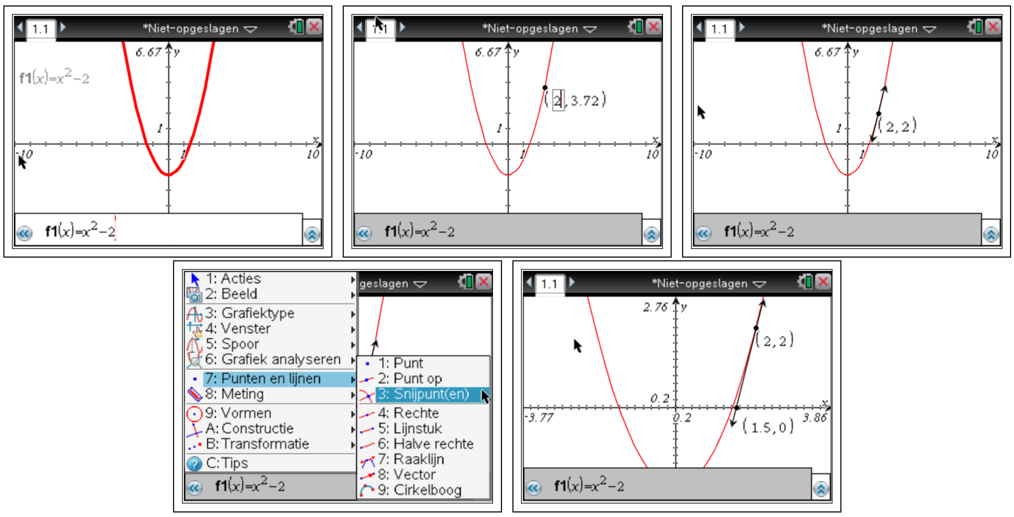


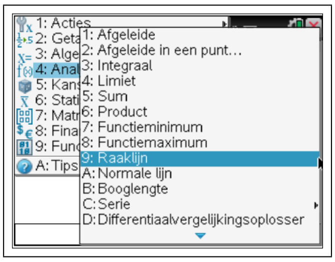
Je kan natuurlijk in een rekenvenster het **CAS** gebruiken om de vergelijking van de raaklijn exact te bepalen. Met `ctrl` `[enter]` kan je deze exacte vergelijking omzetten naar een decimale benaderde vergelijking.

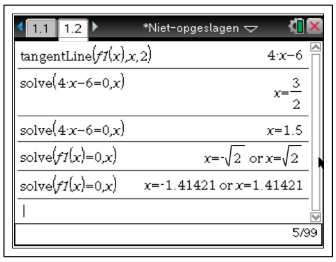


Opdracht 11. *Raaklijnen*
Men kan irrationale getallen niet schrijven onder breukvorm, toch kan men deze benaderen aan de hand van een breuk. Vandaag is dit geen probleem meer, want elk rekenmachine doet exact dit (leg uit!). Vroeger was dit echter een probleem. Eén methode gebruikte de nulwaarde van een raaklijn aan een gepaste kromme. Benader $\sqrt{2}$ door middel van de raaklijn aan $y = x^2 - 2$ in het punt $x = 2$. Deze methode kan gebruikt worden om elke $n$de machtswortel van een natuurlijk getal te benaderen. Probeer maar eens!

Oplossing 11. Indien $f(x) = x^2 - 2$ dan zijn de nulwaarden $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. De afgeleide is $f'(x) = 2x$. De vergelijking van de raaklijn in een punt $x = a$ is dan $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, in ons geval wordt dit $y = 4(x-2)+2 = 4x-6$. Het snijpunt met de x-as is een benadering voor $\sqrt{2}$. We vinden dus de waarde $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$. Met de **TI-Nspire** kunnen we hetzelfde doen en dit ook grafisch laten zien.



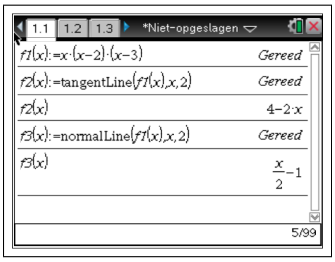


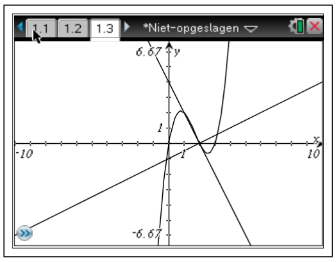


Wanneer deze methode iteratief wordt toegepast spreekt men van de Newton-Raphson methode om nulwaarden te vinden (zie opdracht 35).

Opdracht 12. *Raaklijn en normaal*
Maak een grafiek van de kromme $y = x(x-2)(x-3)$, samen met de raaklijn en normaal in het punt $(1, 2)$. Doe daarna hetzelfde in het punt $(2, 0)$. Let erop dat je `[zoom - standaard]` gebruikt, anders zullen de rechten niet loodrecht op elkaar staan (leg uit hoe dit komt, zie ook verklaring 3).

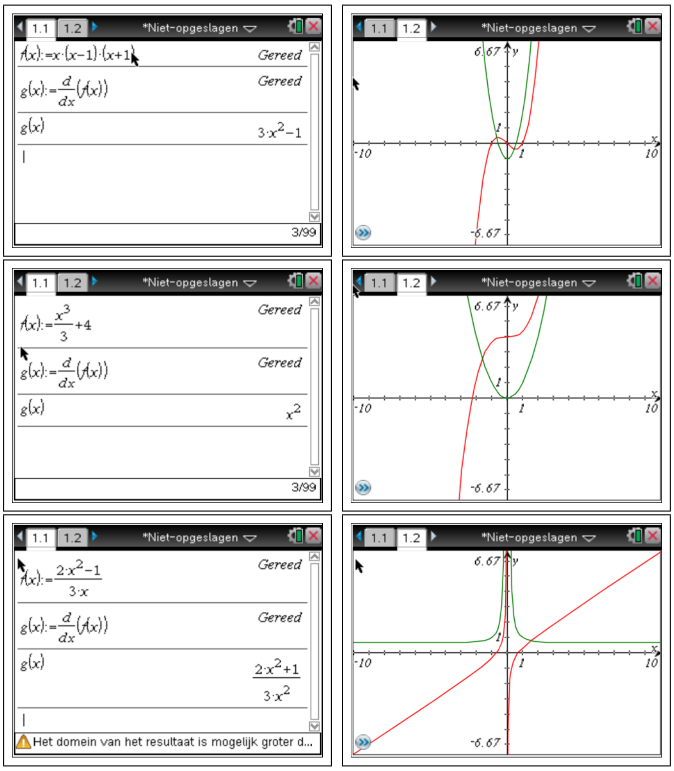
Oplossing 12. De vergelijking van de raaklijn in een punt $x = a$ aan de kromme $y = f(x)$ wordt gegeven door $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ en die van de normaal door $y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$. Met de **TI-Nspire** kunnen we dit als volgt doen.





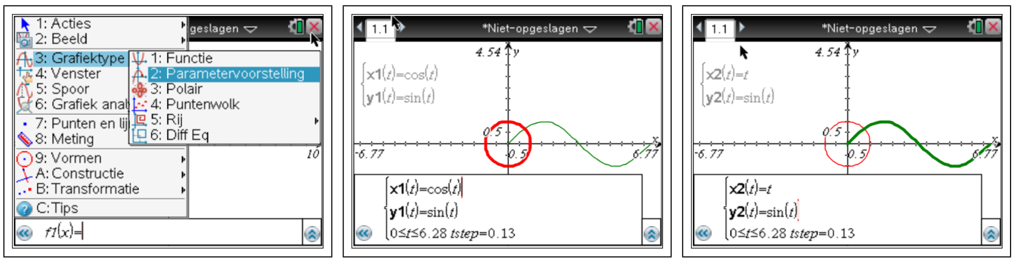
Opdracht 13. *Toepassing van afgeleiden*
Gebruik de **TI-Nspire** om de grafiek te maken van een functie en van haar afgeleide functie. Toon hiermee dat extrema overeenkomen met nulwaarden van oneven multipliciteit van de afgeleide functie, dat een buigpunt overeenstemt met een verandering in stijgen en dalen van de afgeleide functie en dat een schuine asymptoot overeenkomt met een horizontale asymptoot voor de afgeleide functie.

Oplossing 13. We kunnen het **CAS** gebruiken om de afgeleide functie te bepalen.



Opdracht 14. *Goniometrische functies*
Een mooie oefening voor het begrijpen van de goniometrische cirkel en de goniometrische getallen is het maken van volgende grafieken. Gebruik parametercoördinaten om de grafieken $(\cos(t), \sin(t))$ en $(t, \sin(t))$, $(t, \cos(t))$ te maken. Je ziet de grafieken van de sinus- en de cosinusfunctie verschijnen.

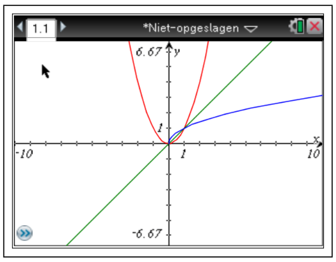
Oplossing 14. We geven het voorbeeld van de sinusfunctie.



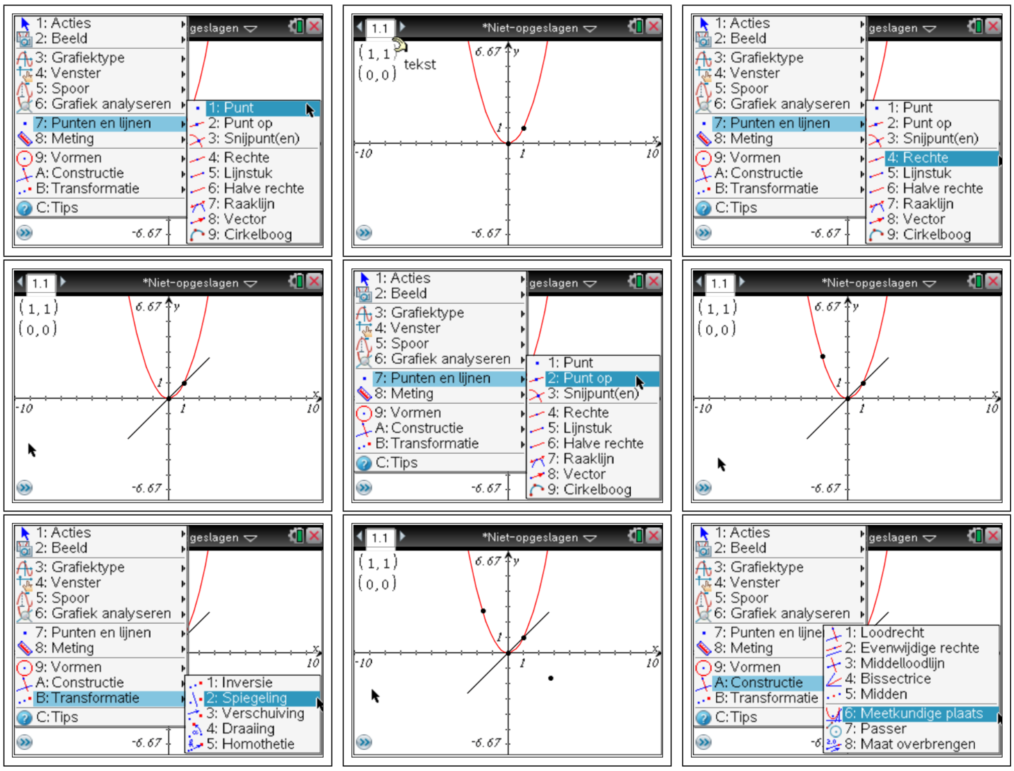
Opdracht 15. *Inverse van een functie*
Maak de grafiek van een functie en van haar inverse *functie*, bijvoorbeeld $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ of $y = \cos x$ en $y = \text{Bgcos}\, x$. Teken op dezelfde grafiek ook de eerste bissectrice. Hoe liggen beide grafieken tov de eerste bissectrice? Dit geldt echter slechts voor een deel van de grafiek. Gebruik `[meetkundige plaats]` om de grafiek volledig te spiegelen. Je hebt nu de inverse *relatie*

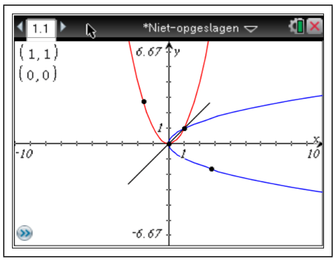
getekend. Is dit de grafiek van een functie? Begrijp je nu waarom men voor de inverse *functie* het domein en het bereik moet beperken?

Oplossing 15. Maak de grafieken als volgt.

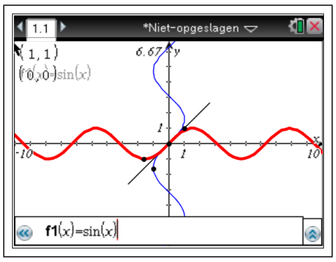


In een grafisch venster kan je nu ook de inverse relatie tekenen. Je begint met de grafiek van de functie te maken. De eerste bissectrice wordt nu getekend als een rechte door twee punten. Dit is nodig omdat we punten gaan spiegelen, de **TI-Nspire** kan dit doen tov een rechte door twee punten, maar niet tov een rechte die gegeven wordt door een vergelijking. Kies nu een punt op de grafiek van de functie en spiegel dit tov de eerste bissectrice. Met `menu` `[constructie]` `[meetkundige plaats]` kan je nu de meetkundige plaats van het beeldpunt nemen in functie van het punt op de kromme. Je bekomt aldus de spiegeling van de grafiek van de functie.





Men ziet duidelijk dat de grafiek van de inverse *relatie* de spiegeling is van de grafiek van de functie tov de eerste bissectrice. In het algemeen is dit echter niet de grafiek van een functie. Indien men het domein en het bereik beperkt bekomt men wel de grafiek van de inverse *functie*. Wat handig is met de **TI-Nspire** is dat een constructie als deze gemakkelijk aangepast kan worden. Je kan door het functievoorschrift te veranderen op eenvoudige wijze de inverse relatie tonen voor verschillende andere functies.

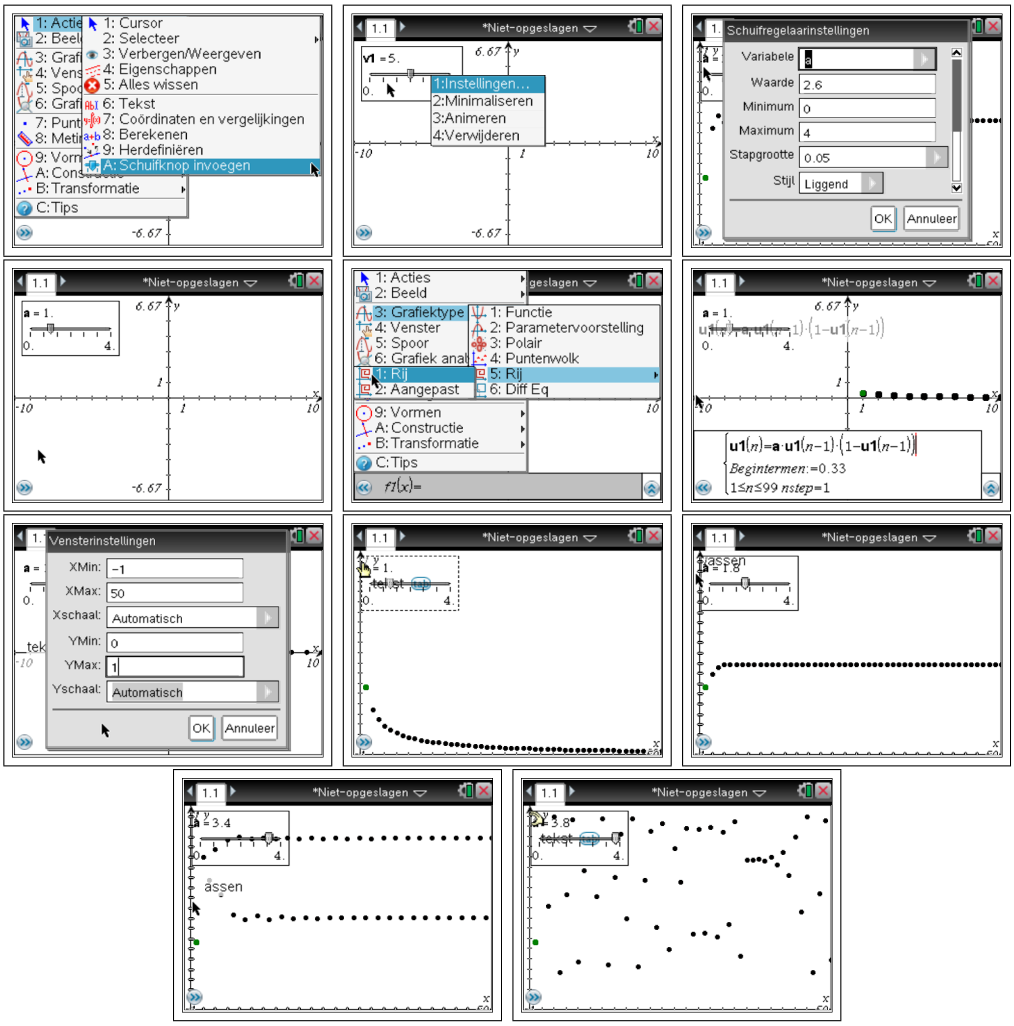


Opdracht 16. *Rijen / Model van Verhulst*
Maak de grafiek van de rij gegeven door $u_n = au_{n-1}(1-u_{n-1})$, voor verschillende waarden van de parameter $0 < a < 4$. Maak ook een webdiagram.

Oplossing 16. De recursieve rij $u_n = au_{n-1}(1-u_{n-1})$ is in de biologie bekend als "het model van Verhulst". Voor verschillende waarden van a verandert het convergentiegedrag volledig. Voor meer info refereren we naar gepaste literatuur [1].

De bovenstaande rij is afhankelijk van de parameter a die waarden aanneemt tussen 0 en 4. Om dit duidelijk te maken gaan we gebruik maken van een schuifbalk. Met `menu` `[acties]` `[schuifknop invoegen]` in een grafisch venster kunnen we zo'n schuifbalk maken en de grenzen van de parameter alsook de stapgrootte instellen. Dit is de beste manier om een grafiek of constructie op de **TI-Nspire** te laten afhangen van een parameter. Men zal nadien de parameter kunnen veranderen door de schuifknop te verplaatsen, de grafiek of constructie zal dan automatisch aangepast worden.

[1] H. A. Lauwerier, *Chaos met de Computer*, Epsilon-Uitgaven, 1996.



Je kan met een schuifknop ook een animatie maken, zie hiervoor paragraaf 5.2.

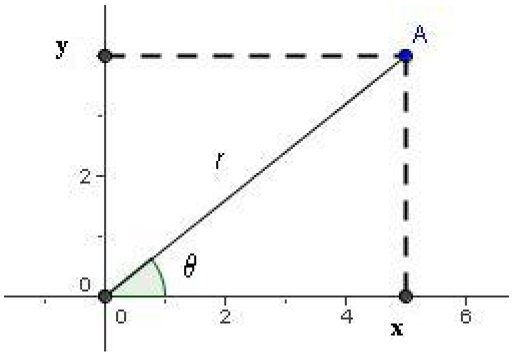
3.2 Andere coördinatensystemen

Poolcoördinaten

In de wiskunde van het ASO staat het cartesisch assenstelsel centraal. Dit komt uitvoerig aan bod in de lessen analyse, waar functies ook onder de grafische vorm $y = f(x)$ grondig worden bestudeerd. In de wetenschap (en ook de wiskunde) komen echter veelvuldig andere coördinatenstelsels voor.

Het is dan ook nuttig de leerlingen hiermee te laten kennismaken. We zullen hier de poolcoördinaten van dichterbij bekijken.

De poolcoördinaten hebben een meetkundige interpretatie, die gemakkelijk besproken kan worden in een hoofdstuk over de goniometrische vorm van complexe getallen. Elk punt in het vlak kan gegeven worden door coördinaten (x, y) tov een cartesisch assenstelsel of door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met de x-as.



De hoek θ kan genomen worden in $[0, 2\pi[$, $]-\pi, \pi]$ of zelfs $\mathbb{R}$ als men niet te nauw kijkt op de uniciteit van de coördinaten (deze is toch al om zeep omdat 0 meerdere stellen poolcoördinaten heeft). Ook functies kunnen in deze context bestudeerd worden:

Cartesische	Polair
(x, y)	(θ, r)
$y = f(x)$	$r = f(\theta)$

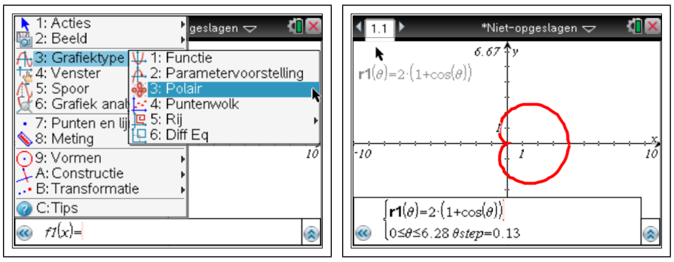
De overschakeling van polaire naar cartesische coördinaten gebeurt volgens de welbekende formules:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

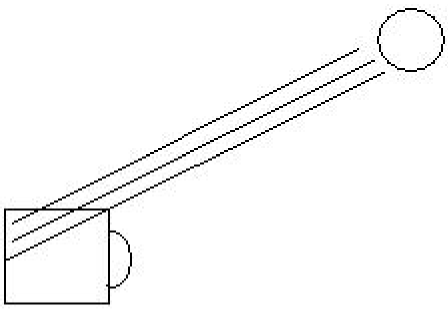
In de wetenschappen komt het vaak voor dat een kromme niet gegeven wordt onder de cartesische vorm $y = f(x)$, maar wel onder de vorm van een poolvergelijking $r = f(\theta)$. Ook hier kan de **TI-Nspire** helpen.

Opdracht 17. *cardioïde*
Maak de grafiek in poolcoördinaten van de kromme $r = 2(1+\cos\theta)$. Waarom noemt men deze kromme een *cardioïde*? Heb je deze kromme al eens eerder gezien?

Oplossing 17. In een grafisch venster gebruik je `menu` `[grafiektype]` `[polair]` om een functievoorschrift in te geven in poolcoördinaten.



Deze kromme kan je dagelijks bekijken in je kopje koffie (of thee, of iets anders). Drink het kopje eerst leeg en houd die dan op een afstand van een dertigtal cm van een lichtbron. Zorg ervoor dat het licht schuin invalt over de rand heen. De kromme die het weerkaatste licht binnen in het kopje doet verschijnen is een cardioïde (zie ook opdracht 44).

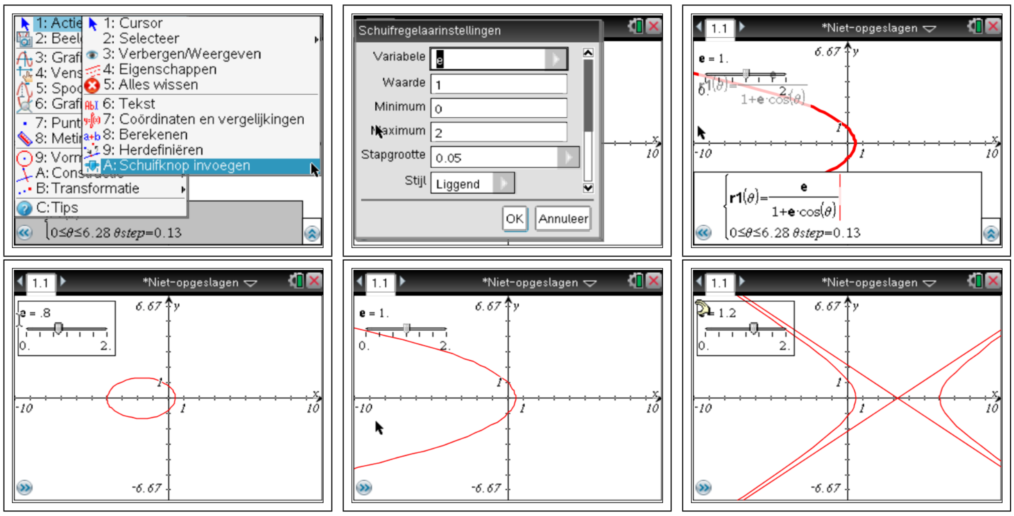


Opdracht 18. *Kegelsneden in poolcoördinaten*
Beschouw de krommen in het vlak gegeven door de poolvergelijking

$$r = \frac{e}{1 + e\cos\theta}$$

Ga de invloed van de eccentriciteit e na. Afhangend van de begeleiding kan dit onderwerp ook dienen in het kader van de onderzoekscompetenties.

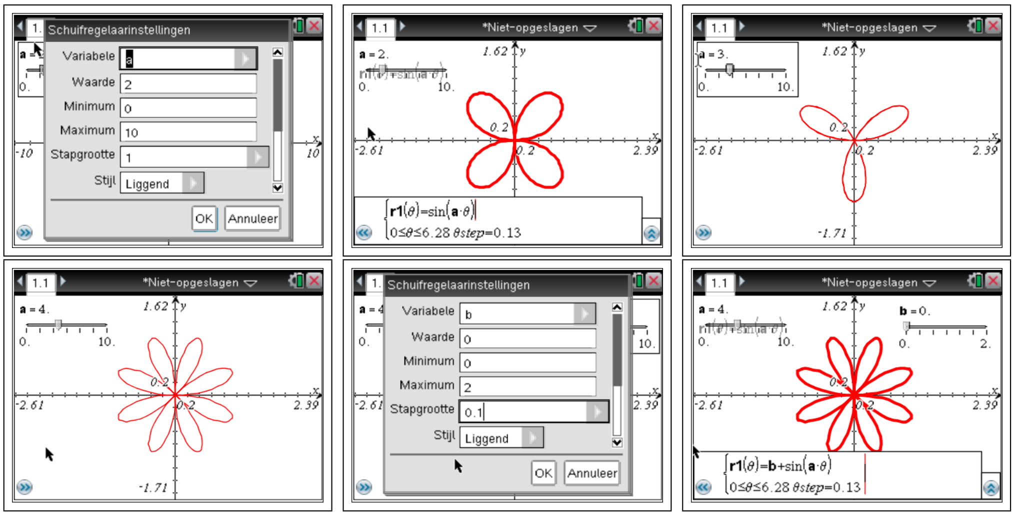
Oplossing 18. De gevraagde krommen zijn de verschillende kegelsneden. Als $0 < e < 1$ dan bekomt men een ellips, indien $e = 1$ heeft men een parabool en als $e > 1$ vind je een hyperbool.

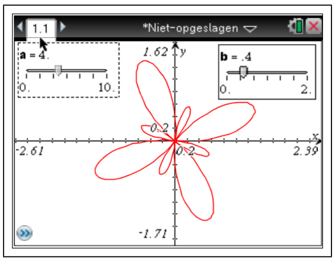


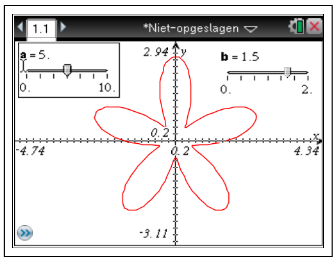
Opnieuw kan je hier een animatie van maken (zie paragraaf 5.2).

Opdracht 19. *Bloemen*
Beschouw de krommen in het vlak gegeven door de poolvergelijking $r = \sin(a\theta)$. Ga de invloed van de parameter $a \in \mathbb{N}_0$ na. Je kan dit ook veralgemenen tot bijvoorbeeld $r = b + \sin(a\theta)$.

Oplossing 19. Deze krommen worden door de leerlingen vaak herkend als "bloemetjes". Is a oneven dan zijn er a "blaadjes", is a even dan is het aantal $2a$. In het tweede geval is dit niet meer waar, de conclusie hangt af van $b < 1$ of niet. Je bekomt in deze gevallen bloemetjes met een kern ($b > 1$) of met verschillende grootten van blaadjes.

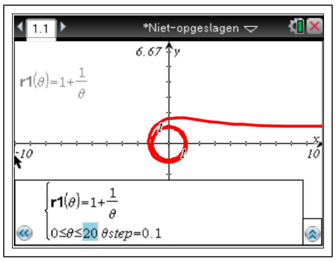






Opdracht 20. *Poolcoördinaten / Asymptoten*
Gebruik de **TI-84+** om de grafiek van de kromme $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta}$, $\theta \in]0, +\infty[$ (in poolcoördinaten) te maken. Bespreek het asymptotisch gedrag en tracht dit wiskundig na te gaan.

Oplossing 20. We maken de grafiek met de **TI-Nspire** . Maak eerst een grafisch venster aan met poolcoördinaten. Geef het voorschrift in en vergeet niet om de grenzen van θ aan te passen.



Leerlingen zullen waarschijnlijk wel een horizontale asymptoot $y = 1$ herkennen voor $x \to +\infty$. Verder is er ook een äsymptotische cirkel”.

Bevestiging van de horizontale asymptoot kan men krijgen door volgende limieten uit te rekenen.

$$\lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} x = \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} r \cos\theta = \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} (1 + \frac{1}{\theta}) \cos\theta = +\infty$$

$$\lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} y = \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} r \sin\theta = \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} (1 + \frac{1}{\theta}) \sin\theta = \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} \sin\theta + \lim_{\theta \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

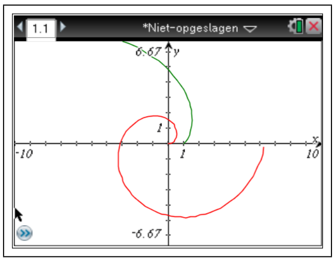
De ”asymptotische cirkel” volgt uit het feit dat het punt (r, θ) in poolcoördinaten om de oorsprong blijft draaien indien $\theta \to +\infty$ en dat

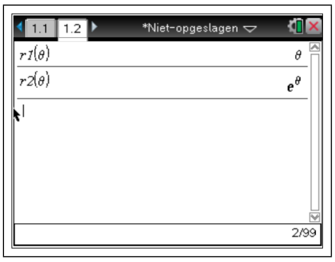
$$\lim_{\theta \to +\infty} r = \lim_{\theta \to +\infty} 1 + \frac{1}{\theta} = 1$$

Zo zie je maar dat asymptotisch gedrag niet rechtlijnig hoeft te zijn. Een ander voorbeeld is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ dat een asymptotisch parabolisch gedrag heeft.

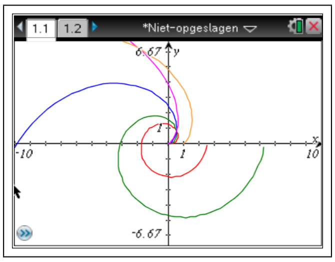
Opdracht 21. *Spiralen*
Afhangend van de begeleiding kan dit voorbeeld gaan van een eenvoudige oefening tot een onderzoekscompetentie-opdracht. Gebruik de **TI-84+** om in poolcoördinaten de grafiek te maken van de krommen gegeven door $r = \theta$ en $r = \exp\theta$. Bespreek gelijkenissen en verschillen. Wat als je ook krommen met vergelijking $r = \theta^n$ beschouwt? Zoek zelf nog een aantal andere "spiralen". Waarom zijn hier poolcoördinaten beter geschikt dan cartesische? Waaraan moet f voldoen om een spiraal te bekomen als grafiek? Welke soorten spiralen kan je onderscheiden? Wat kan je zeggen over het asymptotisch gedrag?

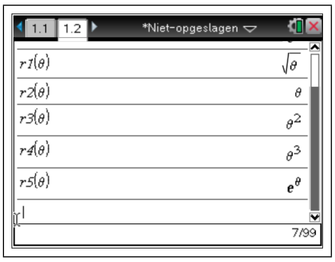
Oplossing 21. Wat de eerste twee spiralen betreft is het duidelijk dat de eerste in de oorsprong begint, in tegenstelling tot de tweede. De tweede zal zich echter veel sneller verwijderen van de oorsprong dan de eerste. Omdat de parameter θ standaard in het interval $[0, 2\pi[$ genomen wordt, eindigt de spiraal na een volledige draai, je kan dit natuurlijk aanpassen.





De spiralen $r = \theta^n$ kan men gemakkelijk bekomen op de **TI-84+** en zo kan een leerling zelf vergelijken.





Extra voorbeelden van spiralen kan je altijd gaan zoeken op het internet[2] (of natuurlijk ook in een boek). Voor meer onderzoekscompetentie gerichte vragen kan een leerling gaan kijken naar bijvoorbeeld dingen zoals de zin of begrensdheid van een spiraal.

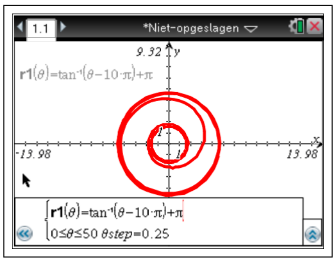
[2]Een goed startpunt is de site: `http://mathworld.wolfram.com/topics/Spirals.html`

- Een **uitwaartse spiraal** is de grafiek in poolcoördinaten van een strikt stijgende functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. vb: $f(\theta) = \theta$

- Een **inwaartse spiraal** is de grafiek in poolcoördinaten van een strikt dalende functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. vb: $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}$

- Een spiraal kan **begrensd** of **onbegrensd** zijn. vb: $f(\theta) = \frac{1}{1+\theta}$ en $f(\theta) = \sqrt{\theta}$

- Spiralen kunnen rechte en/of cirkelvormige asymptoten vertonen, zie oa opdracht 20. vb: $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$, $f(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $f(\theta) = \frac{1}{\theta} + 2$ of zelfs $f(\theta) = \text{atan}(\theta - 10\pi) + \pi$



- ...

Parametercoördinaten

Voor vele systemen wordt een beschrijving gegeven van een punt in het vlak in functie van de tijd $(x(t), y(t))$ Men kan dit ook schrijven als een stel parametervergelijkingen: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

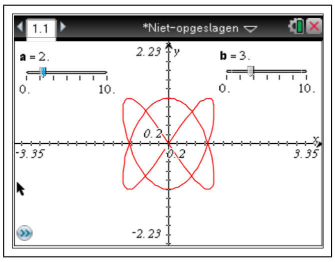
We zullen de **TI-Nspire** nu gebruiken om een oefening in deze context op te lossen.

Opdracht 22. *Lissajous-krommen*
Een Lissajous-kromme wordt gegeven door de combinatie van twee loodrecht op elkaar staande oscillaties.

$$\begin{cases} x = \sin(at) \\ y = \sin(bt) \end{cases}$$

Gebruik de **TI-84+** om deze krommen te onderzoeken. Ga na of de vorm afhangt van de verhouding $\frac{b}{a}$. In het kader van de onderzoekscompetentie kan hier ook een ZW oscilloscoop aan gekoppeld worden.

Oplossing 22. Selecteer eerst via `menu` `[grafiektype]` de optie `[parametervoorstelling]`. We gebruiken opnieuw twee schuifknoppen voor de parameters. Geef tenslotte de voorschriften in en maak de grafiek.

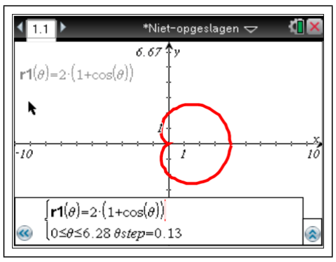


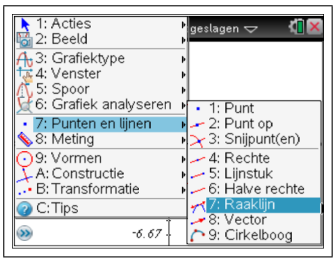
3.3 Te gemakkelijk met de TI-Nspire !

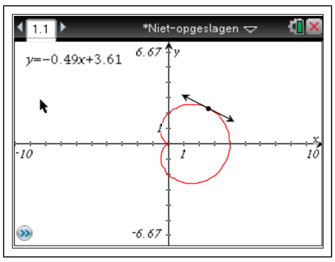
In deze paragraaf zullen we een aantal opgaven behandelen die zeer snel met de **TI-Nspire** te doen zijn, maar waar er in werkelijkheid toch wel wat meer wiskunde aan te pas komt. De oplossingen van deze opgaven zijn een stuk technischer dan de vorige en zullen door sommigen als *moeilijk* ervaren worden! De snelle lezer kan gerust dit deel overslaan en doorgaan met het volgend hoofdstuk.

Opdracht 23. *Raaklijnen in poolcoördinaten*
Als we nu een kromme gegeven krijgen in poolcoördinaten, bijvoorbeeld de cardioïde $r = 2(1 + \cos\theta)$, kunnen we dan de raaklijn bepalen in het punt waarvoor $\theta = \frac{\pi}{4}$?

Oplossing 23. We kunnen met de **TI-Nspire** in een grafisch venster eenvoudigweg een raaklijn in een punt tekenen en de vergelijking doen verschijnen. Wat niet mogelijk is, is ingeven dat dit punt moet overeenkomen met $\theta = \frac{\pi}{4}$.







Om de exacte vergelijking van de raaklijn in dit punt te vinden hebben we wat meer wiskunde nodig. Het antwoord steunt op de theorie van de differentialen. We merken eerst op dat uit de vergelijking volgt dat

$$\begin{cases} x = 2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = 2(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

De raaklijn is een rechte en gaat door het raakpunt (x_0, y_0) en heeft dus een cartesische vergelijking $y = m(x - x_0) + y_0$. Het raakpunt is het punt waarvoor $\theta = \frac{\pi}{4}$, we bekomen dus

$$\begin{cases} x_0 = 2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \\ y_0 = 2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

De richtingscoëfficiënt is de limiet van het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Men kan dus schrijven dat

$$m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}$$

Berekening van de differentialen levert

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (-2\sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta = -2(\sin\theta + \sin 2\theta)\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = (2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = 2(\cos\theta + \cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

Uiteindelijk is dan

$$m = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta}$$

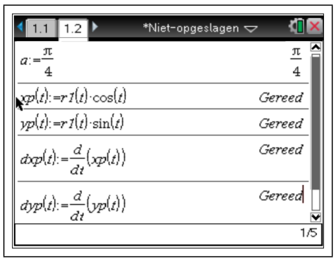
in het punt waarvoor $\theta = \frac{\pi}{4}$ is dus

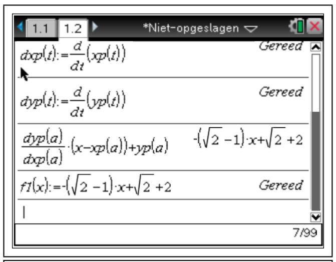
$$m = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = 1-\sqrt{2}$$

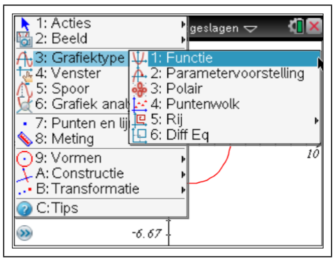
De vergelijking van de raaklijn is dus

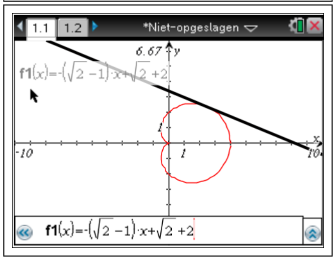
$$y = (1-\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}) + 1 + \sqrt{2}$$

Dit alles kan echter wel gemakkelijk met het **CAS** van de **TI-Nspire** . Na de berekening kunnen we het grafisch venster weer in cartesische coördinaten zetten en de raaklijn laten tekenen.









Opdracht 24. *Raaklijnen in parametercoördinaten*
Gegeven is een ellips in parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt waarvoor $t = t_0$. Maak een passende illustratie met de **TI-Nspire** .

Oplossing 24. We berekenen de differentialen

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -a\sin(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = b\cos(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Zodat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gegeven is door

$$m = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b}{a}\cot t$$

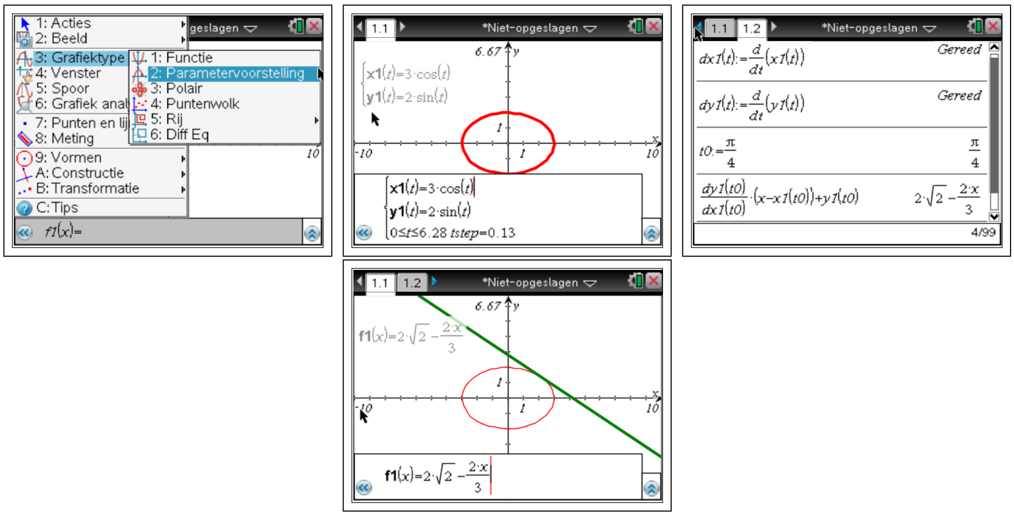
Voor $t = t_0$ wordt dit $m = -\frac{b}{a}\cot(t_0)$ en het raakpunt is dan

$$\begin{cases} x_0 = a\cos(t_0) \\ y_0 = b\sin(t_0) \end{cases}$$

Indien bijvoorbeeld $a = 3, b = 2$ en $t_0 = \frac{\pi}{4}$ is dan is de raaklijn de rechte gegeven door

$$y = -\frac{2}{3}(x - 3\frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{2}$$

We doen hetzelfde met de **TI-Nspire** . Je kan zo beide krommen tekenen.

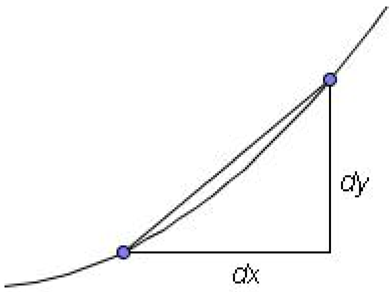


Opdracht 25. *Lengte van een kromme*
Gebruik het **CAS** van de **TI-Nspire** om met behulp van differentialen de lengte te bepalen van de kromme gegeven door de parametervergelijkingen:

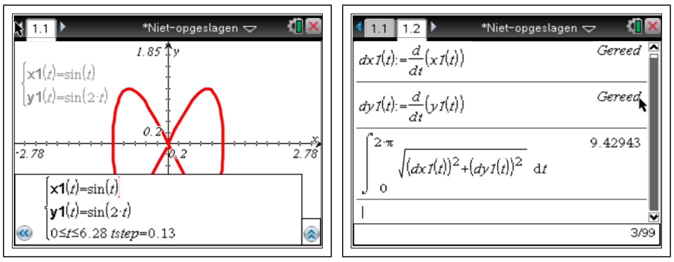
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$$

Gebruik dit ook om de omtrek van een ellips te benaderen.

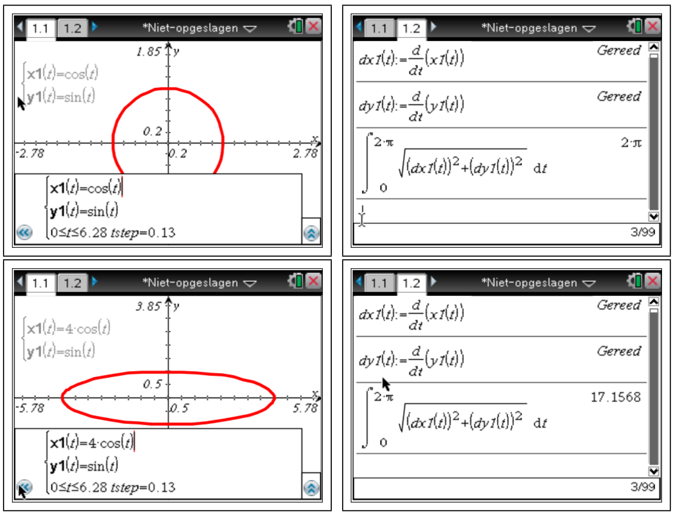
Oplossing 25. Men weet dat de lengte van een (infinitesimaal) klein stukje kromme kan benaderd worden door de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden dx en dy. Deze lengte is dan $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$.



De totale lengte van een kromme, die zichzelf niet meerdere keren doorloopt, kan dan gevonden worden met behulp van de integraal van bovenstaande uitdrukking. Met de **TI-Nspire** kunnen we dit als volgt doen. We maken eerst een grafisch venster en schakelen over naar parameter vergelijkingen via `menu` `[grafiektype]`. We voeren nu de vergelijkingen in voor x en y. Nu gebruiken we een rekenvenster om de booglengte te berekenen met bovenvermelde formule.



Voor een cirkel of een ellips krijg je volgend resultaat.



Let op! Merk op dat de **TI-Nspire** voor sommige integralen een exact antwoord geeft, terwijl voor andere een benaderde waarde wordt gegeven. Dit is normaal, want om de omtrek van een ellips te bepalen, heeft men een *elliptische integraal* nodig. Deze integralen zijn bekend omdat zij, net zoals $\int e^{-x^2}dx$ niet uit te rekenen zijn. *Een formule voor de omtrek van een ellips is dus niet te vinden!* Met de **TI-Nspire** kan men wel op een redelijk eenvoudige wijze een benadering vinden.

Hoofdstuk 4

Nog iets moeilijker ...

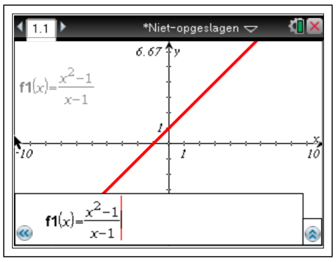
4.1 Hoe werkt de TI-Nspire ?

We beginnen met enkele eenvoudige voorbeelden die illustreren hoe de **TI-Nspire** te werk gaat om bepaalde dingen gedaan te krijgen. Dit zal ons toestaan om "foute" antwoorden van de **TI-Nspire** te detecteren en te verklaren.

Hoe maakt de TI-Nspire een grafiek?

Opdracht 26. *Limieten en continuïteit*
Maak de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Bespreek de continuïteit en de nodige limieten. Gebruik nu de **TI-Nspire** om de grafiek te maken. Verklaar de fout die de **TI-Nspire** maakt.

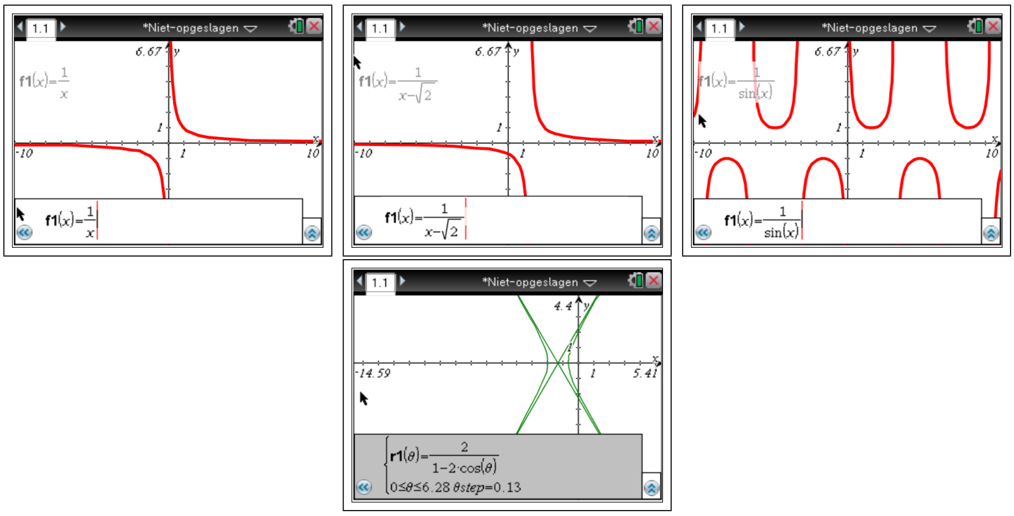
Oplossing 26. Als je de **TI-Nspire** gebruikt om de grafiek te maken is de grafiek niet correct, de discontinuïteit in 1 wordt niet getoond, het is alsof de grafiek continu is.



Verklaring 1. Dit komt omdat de **TI-Nspire** een grafiek maakt door een aantal punten gelijkmatig uit het interval [`xmin`,`xmax`] te kiezen. In deze punten wordt het beeld berekend en deze beelden worden verbonden met een lijnstuk. Gevolg: de discontinuïteit wordt onzichtbaar.

Opdracht 27. *Asymptoten*
Maak achtereenvolgens de grafieken van de functies met voorschriften $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ en $f_3(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Bekijk de verticale asymptoten, worden ze getekend of niet? Maak nu de grafiek van een hyperbool in poolcoördinaten $r = \frac{2}{1+2\cos(\theta)}$. Wat merk je?

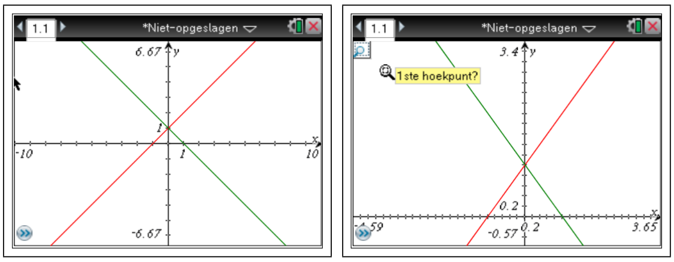
Oplossing 27. Afhangend van de gekozen functie lijkt het dat er soms een asymptoot wordt getekend en soms niet.



Verklaring 2. De verklaring voor deze fout is zeer eenvoudig. In cartesische coördinaten is er bij het maken van de grafiek een extra algoritme dat nagaat of een functie zeer sterk stijgt of daalt. Indien dit zo is worden twee opeenvolgende punten niet verbonden door een lijn. In polaire coördinaten is dit algoritme er niet, alle punten worden met elkaar verbonden, aldus verschijnen de asymptoten.

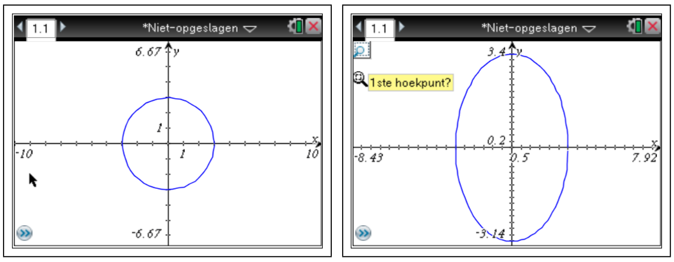
Opdracht 28. *Orthonormale assenstelsels*
Maak de grafiek van twee loodrecht op elkaar staande rechten. Maak ook de grafiek van een cirkel (gebruik poolcoördinaten). Zoom in dmv `menu` `[zoom - box]`. Wat merk je?

Oplossing 28. We kiezen de rechten $y = x+1$ en $y = -x+1$. We bekomen volgende grafieken.



In het eerste geval staan beide rechten loodrecht op elkaar maar na het inzoomen absoluut niet!

Voor de cirkel nemen we de poolvergelijking $r = 3$. We krijgen volgende grafieken.



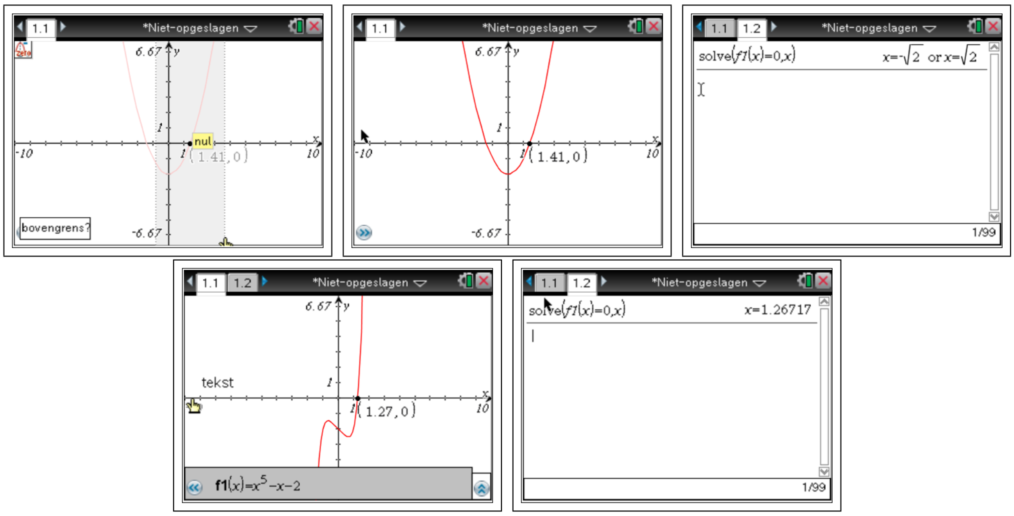
We zien duidelijk dat er een vervorming optreedt, we bekomen immers een ellips en geen cirkel!

Verklaring 3. Het essentiële verschil is dat het grafisch venster zo wordt ingesteld dat men beschikt over een ortho*normaal* assenstelsel wanneer men `[zoom - standaard]` gebruikt. In de andere gevallen gaat het slechts om een ortho*gonaal* assenstelsel, waarbij de schaalverdeling op beide assen niet noodzakelijk gelijk is. Uit de vlakke meetkunde weten we dat alle begrippen die steunen op het inprodukt (oa hoeken, loodrechte stand en afstand), een ortho*normaal* assenstelsel nodig hebben.

Nulwaarden, snijpunten en extrema bepalen.

Opdracht 29. *Nulwaarden*
Gebruik een grafisch venster om de nulwaarden van $f(x) = x^2 - 2$ en $g(x) = x^5 - x - 2$ te vinden. Gebruik ook een rekenvenster. Wat merk je?

Oplossing 29.

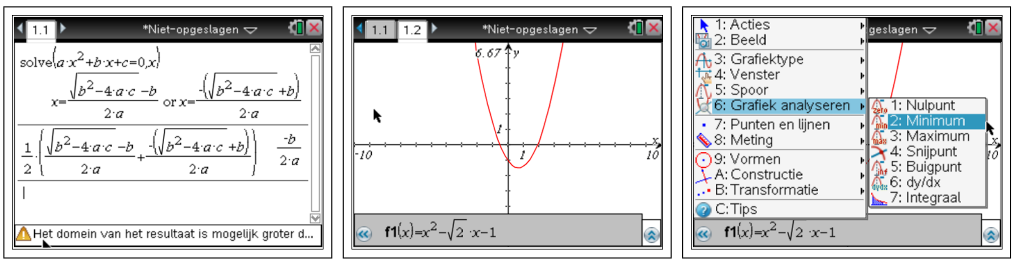


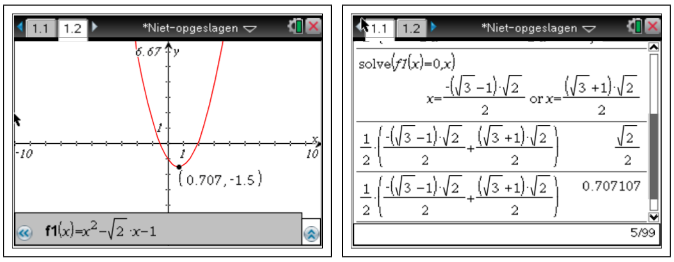
In het grafisch venster worden de berekeningen numeriek uitgevoerd, je krijgt slechts een benaderde waarde. In een rekenvenster wordt dan wel weer gebruik gemaakt van het **CAS** , hier bekom je de exacte nulwaarde. Wanneer je de nulwaarden zoekt van een veelterm van graad vijf of hoger, lukt dit ook niet altijd met het **CAS** !

Verklaring 4. Deze keer ligt de verklaring binnen de wiskunde. Ten eerste wordt er in een grafisch venster een ander soort algoritme gebruikt als in een rekenvenster. We zullen later zien welk soort numeriek algoritmen dit zijn (zie opdracht 34). In een rekenvenster wordt getracht te werken met discriminantachtige methoden. Er is echter een stelling in de wiskunde die zegt dat voor een veelterm van graad hoger dan 4, er geen algemene discriminantformules bestaan om de wortels te vinden. Het **CAS** is dus voor zulke veeltermen verplicht om ook numerieke benaderingen door te voeren.

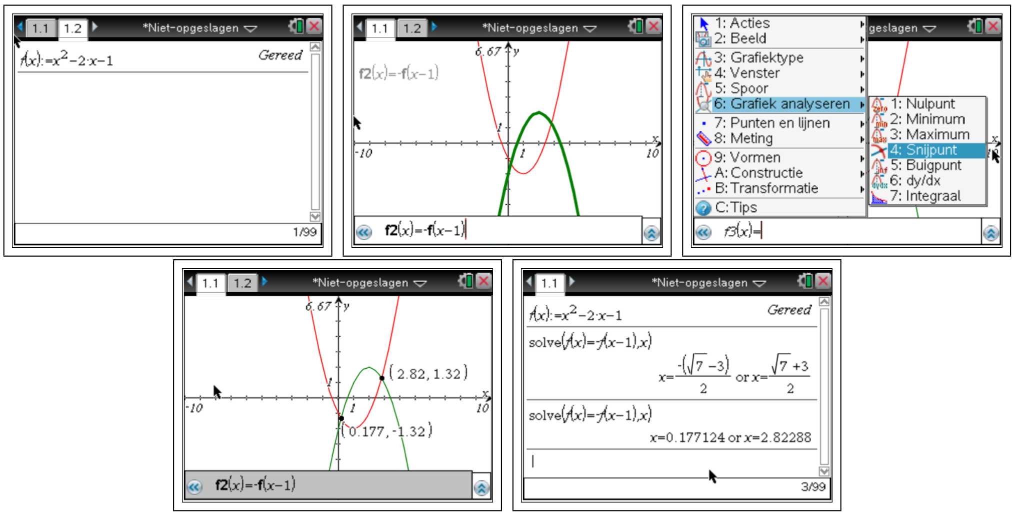
Opdracht 30. *Extrema en snijpunten*
Je weet nu hoe de **TI-Nspire** nulwaarden kan vinden. Geef nu zelf twee goede voorbeelden om extrema en snijpunten te vinden.

Oplossing 30. Beschouw de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$. Dit extremum ligt midden tussen de twee nulwaarden, indien ze bestaan. We geven ook een concreet voorbeeld over hoe je die top vindt.



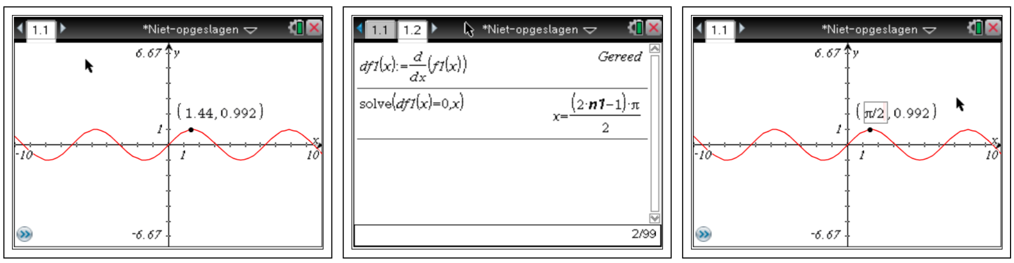


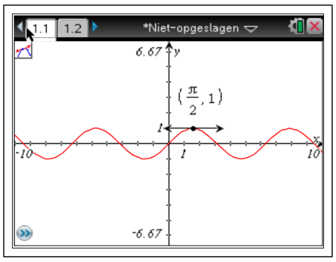
We zoeken nu het snijpunt van twee krommen. We kiezen hier $f(x) = x^2 - 2x - 1$ en zoeken naar de snijpunten van de krommen $y = f(x)$ en $y = -f(x-1)$ Deze oefening kan natuurlijk ook met de hand gemaakt worden.



Opdracht 31. *Minima en maxima*
Bepaal een maximum van de functie $f(x) = \sin x$. Maak de grafiek van f en van de raaklijn in dit maximum.

Oplossing 31. We beginnen met de grafiek te maken en een willekeurig punt op deze grafiek te kiezen. Daarna gebruiken het **CAS** om de afgeleide functie en de extrema te bepalen. Door op de eerste coördinaat van het punt op de grafiek te klikken kan men deze aanpassen. Hierna hoeven we slechts met menu `[punten en lijnen]` `[raaklijn]` de gevraagde raaklijn te tekenen.





4.2 In TIBasic programmeren is eenvoudig.

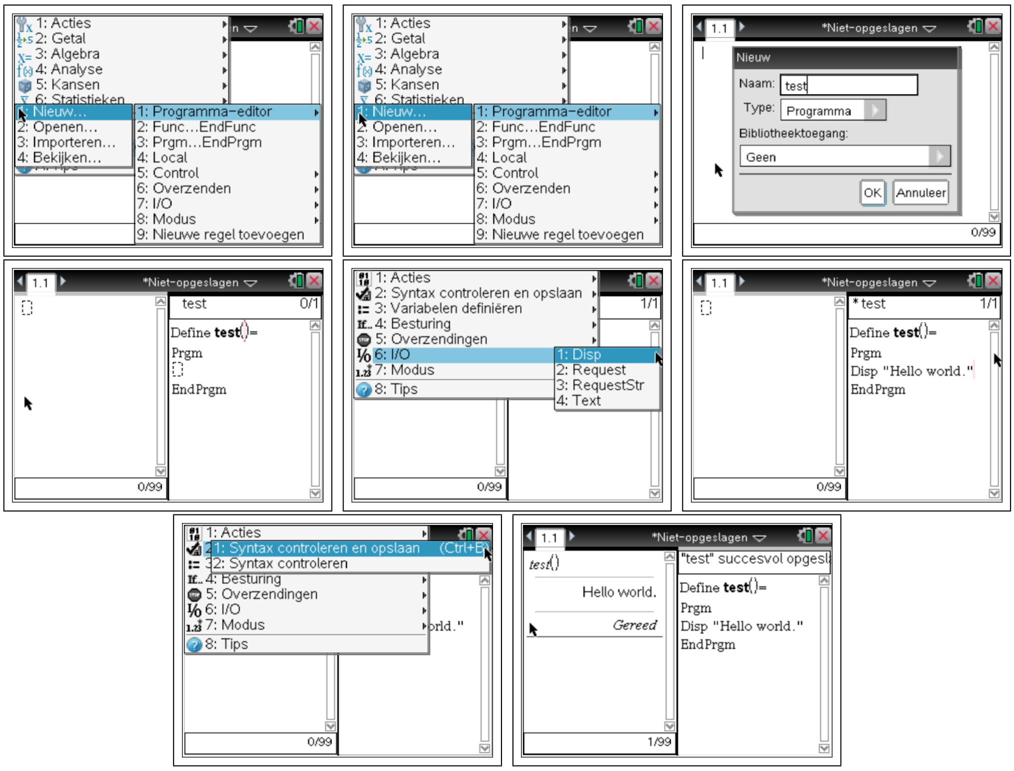
In deze paragraaf zullen we enkele bekende algoritmen implementeren voor de **TI-Nspire** . Dit vereist slechts een klein beetje programmeerwerk.

Bovendien zijn een aantal van deze programma's reeds voorgeprogrammeerd in de gebruiksfuncties van de **TI-Nspire** . Als leerlingen dus zelf eens deze programma's behandelen tijdens de lessen, krijgen ze inzicht in hoe een grafische rekenmachine de dingen, die gevraagd worden, berekent. Bovendien is tegenwoordig de belangrijkste toepassing van de wiskunde de informatica, in ruime zin. Van grafisch rekenmachine tot statistische computerprogramma's, via gsm's, mp3-spelers, gameboy's en playstations, computerspelletjes en internettoepassingen, in bijna elke moderne technologie zit meer dan 50% wiskunde. Zonder wiskunde zou er geen moderne technologie zijn!

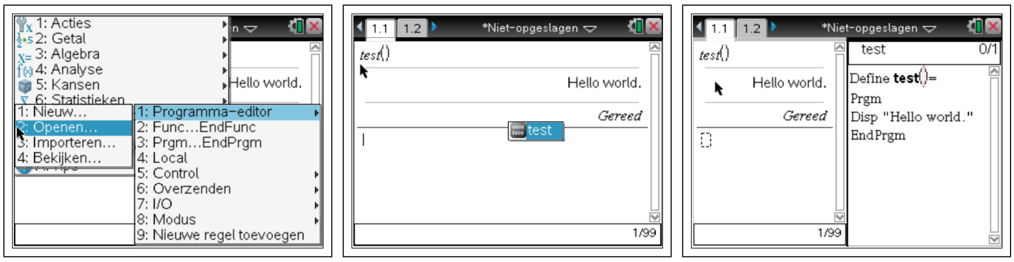
De programmeertaal die in de **TI-Nspire** zit is een vorm van TIBasic. Dit is een dialect van BASIC, een programmeertaal waarmee Bill Gates (Microsoft) zijn faam heeft verworven. BASIC (Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code) werd ontworpen om ook de leek in staat te stellen om kleine programma's te schrijven. Het TIBasic-dialect is trouw aan deze filosofie: er is geen enkele programmeerervaring nodig om programma's te schrijven voor de **TI-Nspire** . Enkel een beetje doorzettingsvermogen en zelfvertrouwen is nodig.

We merken hier wel op dat de programmeeromgeving in de **TI-Nspire** versie 3.1.0 enigzins beperkt is, latere versies zullen waarschijnlijk uitgebreider zijn.

Om een programma te schrijven open je eerst een rekenvenster. Kies dan `menu` `[functies en programma's]`, je kan nu in de programma editor een nieuw programma openen. Maak het programma `test` aan. Het scherm wordt nu in twee gesplitst. Links heb je het gewone rekenvenster, rechts de editor waarin je nu je programma kan schrijven. Ga in de editor staan, met `menu` vind je de commando's die nodig zijn om te programmeren. Nadat je het programma hebt ingegeven, kies je `menu` `[syntax controleren en` opslaan], waarna je het programma kan aanroepen in het rekenvenster.



Eenmaal je programma geschreven en getest is kan je de editor sluiten via menu [acties] [sluiten]. Je komt dan terug in het rekenvenster waarin je het programma hebt getest. Je kan nu gerust een nieuw rekenvenster aanmaken waarin je je programma gebruikt. Als je wil kan je via menu [functies en programma's] je programma altijd weer opendoen in de editor om het te veranderen. Merk op dat een programma enkel geldig is binnen eenzelfde document. Een programma gebruiken binnen verschillende documenten gaat via zgn libraries maar dit valt buiten het bestek van dit cahier.



De commando's die met programmeren te maken hebben zitten in de editor onder `menu`. We geven hier een kort overzicht van de nuttigste programmeerfuncties.

`[besturing]`	
`[if]`	Eerste vorm:
	`:if` *voorwaarde* : *commando*
`[then]`	Tweede vorm: uitgebreide `if` structuur:
`[else]`	`:if` *voorwaarde*
	`:then`
	: *commando's*
	`:else`
	: *commando's*
	`:endif`
`[for]`	om lussen te maken
	`:for(` *var, beginwaarde, eindwaarde [, stapgrootte]* `)`
	: *commando's*
	`:endfor`

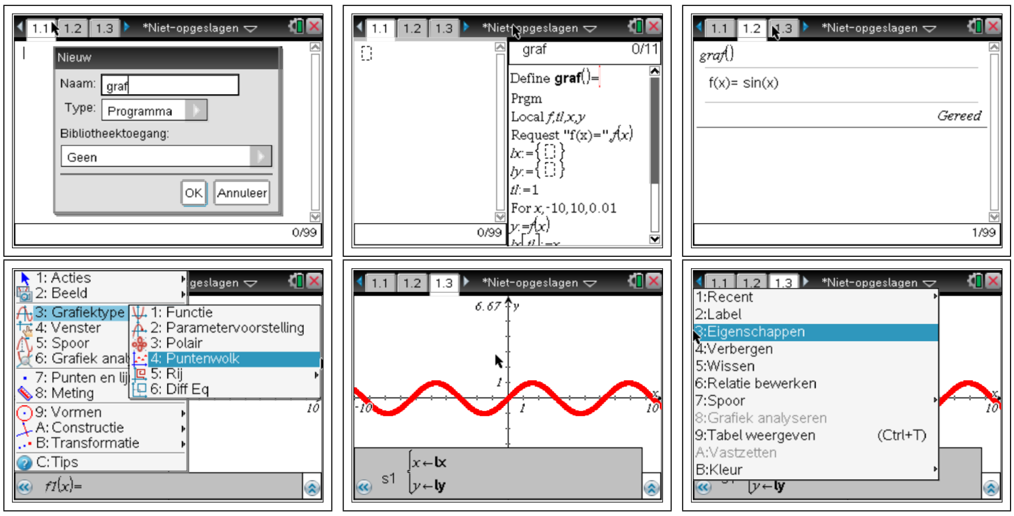
`[i/o]`	
`[disp]`	om een waarde/string op het scherm te printen
`[request]`	om een tekst op het scherm te tonen en een waarde te vragen

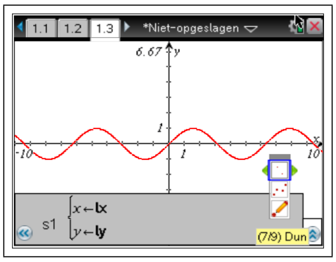
Nu we de nodige commando's kennen kunnen we enkele zeer eenvoudige voorbeelden behandelen, die inzicht geven over hoe de **TI-Nspire** werkt (zie oa verklaring 4). Eerst kijken we naar volgende opdracht die werd gegeven in cahier 14: "Voorbeelden met de **TI-84+** uit de analyse"

Opdracht 32. *Grafiek van een functie*
Gebruik een `for`-lus om een programma te schrijven dat de grafiek van een functie (bijvoorbeeld de sinusfunctie) maakt.

Oplossing 32. Dit programma is niet mogelijk met de **TI-Nspire** versie 3.1.0. Er bestaan immers geen grafische commando's in de programeertaal van de **TI-Nspire** . Hopelijk zal dit in latere versies veranderen. Door gebruik te maken van een puntenwolk kunnen we dit probleempje omzeilen. Via `menu` `[grafiektype]` `[puntenwolk]` kunnen we een reeks punten tekenen. Er wordt dan wel een lijst met x-coördinaten en een lijst met y-coördinaten verwacht. Met een programma kunnen we deze lijsten genereren. Merk op dat de variabelen lx en ly (de lijsten met coördinaten) niet lokaal gedeclareerd zijn, en dus globale veranderlijken zijn, ze kunnen dus in een grafisch venster gebruikt worden om een puntenwolk te tekenen.

```
Define graf()=
Prgm
:Local f,tl,x,y
:Request "f(x)=",f(x)
:lx:={}
:ly:={}
:tl:=1
:For x,-10,10,0.01
:y:=f(x)
:lx[tl]:=x
:ly[tl]:=y
:tl:=tl+1
:EndFor
:EndPrgm
```





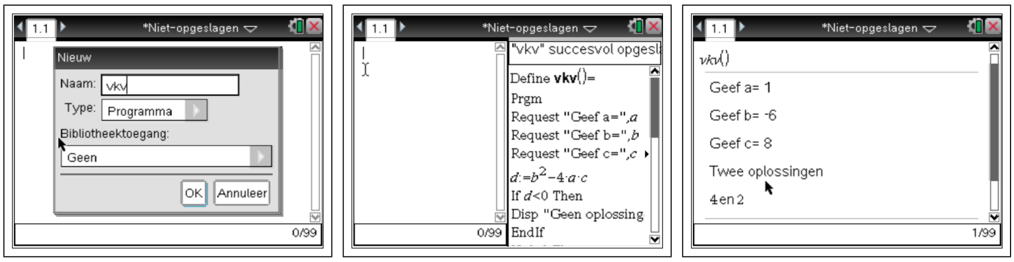
Om het eindresultaat zo mooi mogelijk te krijgen veranderen we door op de grafiek van de functie `ctrl` `[menu]` `[eigenschappen]` te kiezen het gebruikte symbool van een cirkel naar een punt.

Voorbeeldprogramma's

Opdracht 33. *Vierkantsvergelijkingen*
Schrijf een programmaatje dat een vierkantsvergelijking oplost.

Oplossing 33. Het programma ziet er als volgt uit.

```
Define vkv()=
Prgm
:Local a,b,c,d,x1,x2
:Request "Geef a=",a
:Request "Geef b=",b
:Request "Geef c=",c
:d:=b^2-4*a*c
:If d<0 Then
:Disp "Geen oplossingen"
:EndIf
:If d=0 Then
:x1:=(-b/(2*a))
:Disp "Een enkele oplossing"
:Disp x1
:EndIf
:If d>0 Then
:x1:=((-b+sqrt(d))/(2*a))
:x2:=((-b-sqrt(d))/(2*a))
:Disp "Twee oplossingen"
:Disp x1,"en",x2
:EndIf
:EndPrgm
```



Opdracht 34. *Nulwaarden benaderen / Dichotomie*
Welke algoritmen gebruikt men om numeriek nulwaarden te vinden? Het eerste algoritme dat we behandelen is de dichotomiemethode. Deze methode kan gemakkelijk besproken worden met de leerlingen. Volgende stelling wordt behandeld.

Stelling 3. *(Bolzano)*
Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a, b[$ en rechtscontinu in a, linkscontinu in b. Indien $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$) dan bestaat er voor elke $c \in [f(a), f(b)]$ (resp. $c \in [f(b), f(a)]$) een $x \in [a, b]$ zodat $c = f(x)$.

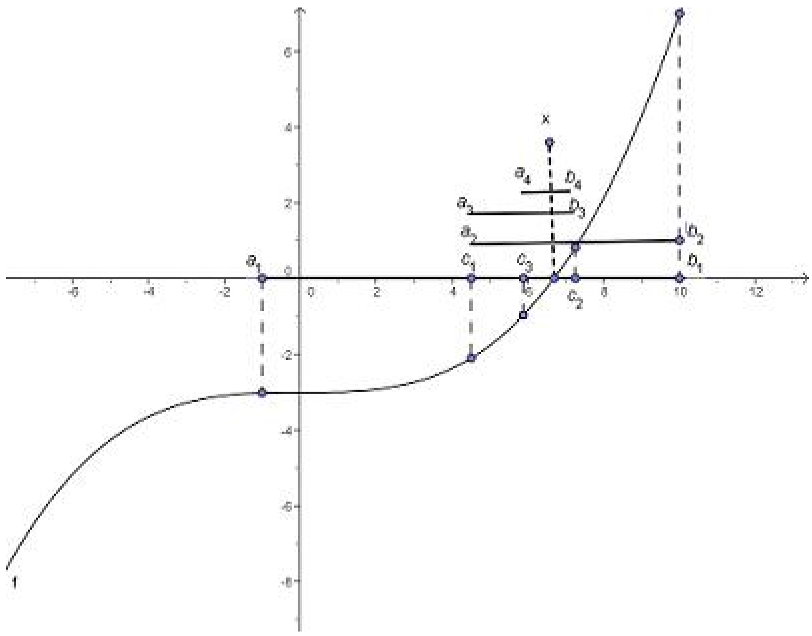
Een uiterst nuttige stelling die onmiddellijk uit de vorige volgt is de volgende.

Stelling 4. *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a, b[$ en rechtscontinu in a, linkscontinu in b. Indien $f(a)$ en $f(b)$ een verschillend teken hebben, dan bezit f een nulwaarde in $[a, b]$.*

Het nut van deze stelling ligt vooral in haar vele toepassingen. Leerlingen kunnen hiermee gemakkelijk tonen dat elke derdegraadsveelterm (of veelterm van oneven graad) altijd minstens één nulwaarde heeft, gewoon door twee waarden uit te rekenen.

Een andere toepassing is het numeriek benaderen van nulwaarden door deze stelling iteratief toe te passen. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a_1, b_1[$ en rechtscontinu in a_1, linkscontinu in b_1. Stel dat $f(a_1)$ en $f(b_1)$ een verschillend teken hebben. De functie heeft een nulwaarde x in $[a_1, b_1]$. Bepaal nu het midden $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Als $f(c_1) = 0$ hebben we de nulwaarde gevonden. Indien $f(c_1)$ en $f(a_1)$ een verschillend teken hebben dan stellen we $a_2 = a_1$ en $b_2 = c_1$ en anders, als $f(c_1)$ en $f(b_1)$ een verschillend teken hebben, kiezen we $a_2 = c_1$ en $b_2 = b_1$ (zie figuur). De functie heeft nu een nulwaarde $x \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. We berekenen opnieuw het midden $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ en herhalen de procedure. Aldus bekomen we een rij intervallen die steeds de nulwaarde x beter benaderen:

$$x \in \ldots \subset [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

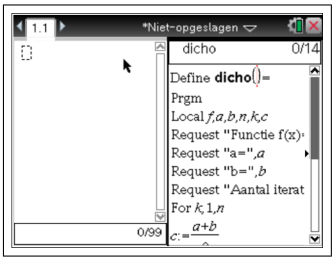


Deze methode om nulwaarden te benaderen (soms ook dichotomie of bisectiemethode genoemd) werkt enkel onder voorwaarde dat f van teken verandert in de nulwaarde. De bisectiemethode kan bovendien op eenvoudige manier geprogrammeerd worden. Doe dit.

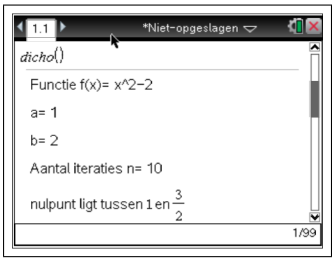
Oplossing 34. Eerst vraagt ons programma de functie $f(x)$ op, daarna wordt gevraagd naar het interval $[a, b]$ waarin een nulwaarde zit en waarbij $f(a)$ en $f(b)$ een verschillend teken hebben. Bovendien wordt ook het aantal iteraties n gevraagd. In het programma moeten we ondermeer nagaan of $f(a)$ en $f(c)$ een verschillend teken hebben, dit kan het gemakkelijkst door de voorwaarde $f(a) \cdot f(c) \leq 0$ na te gaan. Afhangend hiervan passen we de grenzen van het interval waarin de nulwaarde zit aan.

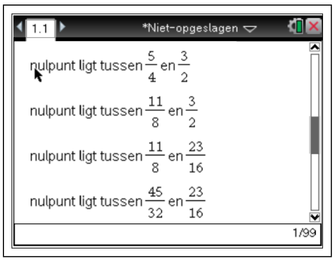
```
Define dicho()=
Prgm
:Local f,a,b,n,k,c
:Request "Functie f(x)=",f(x)
:Request "a=",a
:Request "b=",b
:Request "Aantal iteraties n=",n
:For k,1,n
:c:=((a+b)/(2))
:If f(a)*f(c)<0 Then
:b:=c
```

```
:Else
:a:=c
:EndIf
:Disp "nulwaarde ligt tussen",a,"en",b
:EndFor
:EndPrgm
```



Indien de voorwaarden voldaan zijn (en we gaan er vanuit dat dit zo is, om het programma zo eenvoudig mogelijk te houden) zal het programma een betere benadering geven (kleiner interval) dan het interval waarvan men vertrekt.

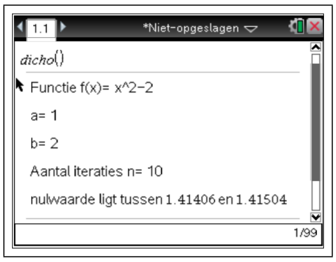


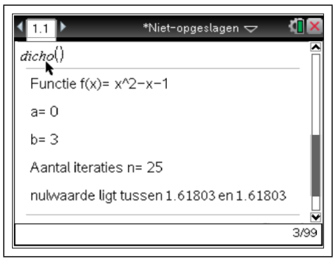


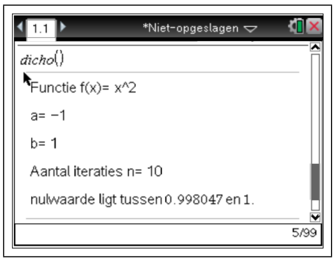
Het is duidelijk dat we liever enkel het uiteindelijk antwoord willen en dat we in dit geval liever decimale notatie gebruiken ipv breuken. Hiervoor passen we het programma als volgt aan. We halen het `disp`-statement uit de `for`-lus en passen het een beetje aan.

```
...
:EndIf
:EndFor
:Disp "nulwaarde ligt tussen",approx(a),"en",approx(b)
:EndPrgm
```

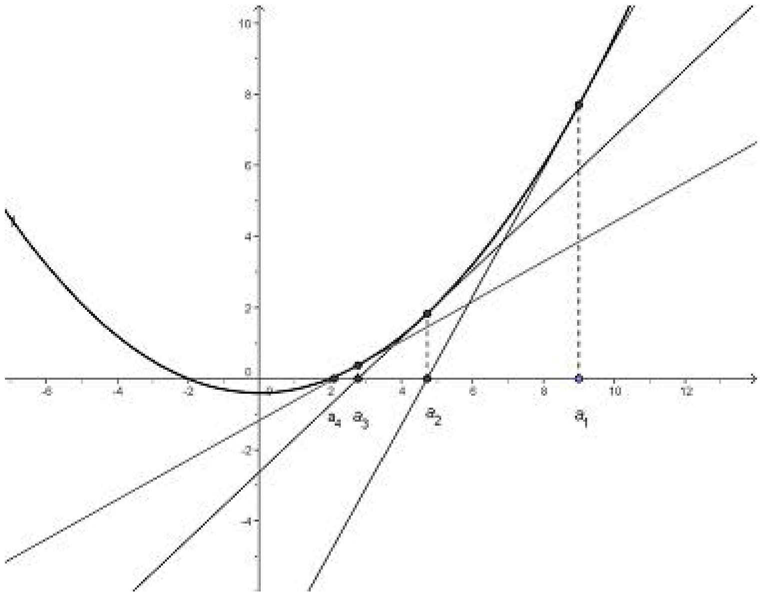
Indien de voorwaarden niet voldaan zijn, zal een foute benadering gegeven worden. Door enkele extra regels toe te voegen kan men het foutief antwoord vervangen door een passende foutmelding. We werken een aantal voorbeelden uit, waarbij we $\sqrt{2}$ en de gulden snede benaderen. Het laatste voorbeeld toont wat er gebeurt indien de voorwaarden niet voldaan zijn.







Opdracht 35. *Nulwaarden benaderen / Newton-Raphson*
Een andere manier om nulwaarden te benaderen maakt gebruik van de raaklijn. Als a_1 een benadering is van een nulwaarde van $y = f(x)$, dan kunnen we de raaklijn in a_1 bepalen: $y = f'(a_1)(x - a_1) + f(a_1)$. Het snijpunt van deze rechte met de x-as is dan de oplossing van $f'(a_1)x - f'(a_1)a_1 + f(a_1) = 0$. We noemen dit punt a_2, dus $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$. Door iteratie van dit proces bekomen we een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die de nulwaarde van f in vele gevallen steeds beter zal benaderen.

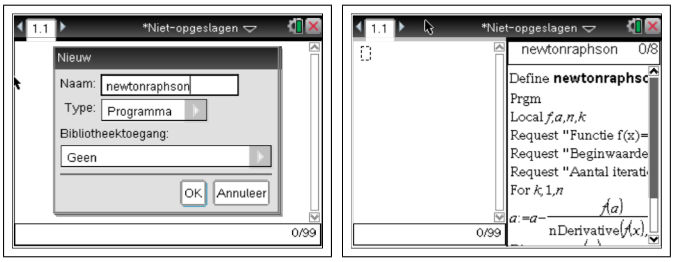


Schrijf een programma dat dit doet. Zoek als voorbeelden de nulwaarden van $f(x) = x^2 - 3$ en van $g(x) = x^2$. Wat merk je?

Oplossing 35. Het programma is zeer eenvoudig.

```
Define newtonraphson()=
Prgm
:Local f,a,n,k
:Request "Functie f(x)=",f(x)
```

```
:Request "Beginwaarde a=",a
:Request "Aantal iteraties n=",n
:For k,1,n
:a:=a-((f(a))/(nDerivative(f(x),x=a)))
:Disp approx(a)
:EndFor
:EndPrgm
```

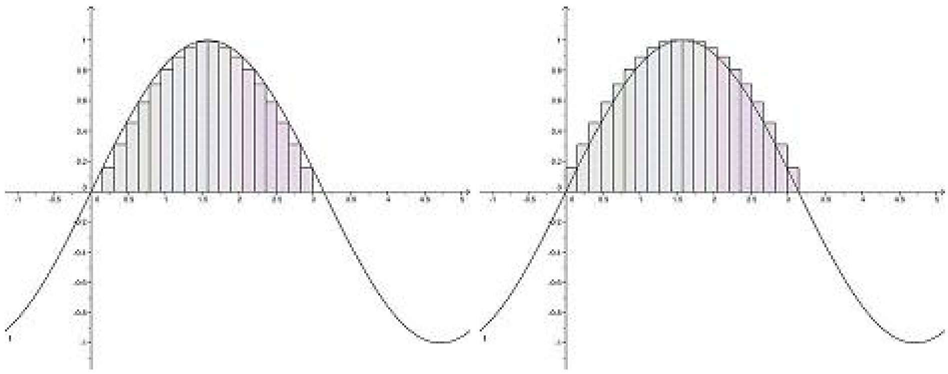


De nulwaarden van de functies $f(x) = x^2 - 3$ en $g(x) = x^2$ kunnen hiermee benaderd worden.

De nulwaarde van $g(x) = x^2$ wordt benaderd, dit is een beter resultaat dan wat de dichotomiemethode oplevert (zie ook opdracht 34).

Opdracht 36. *Numerieke integratie / Boven- en ondersom*

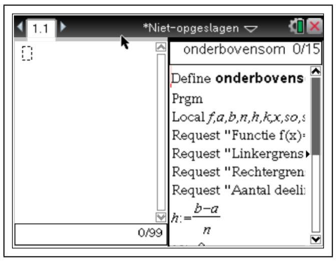
Een bepaalde integraal kan men benaderen door een ondersom of door een bovensom. De echte waarde ligt ertussen (zie figuur).



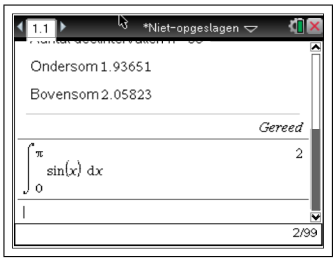
Schrijf een kort programma om elk van de benaderingen uit te rekenen en behandel als voorbeeld $\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x$.

Oplossing 36. We vragen de functie $f(x)$ op. De grenzen van de bepaalde integraal zijn a en b. We verdelen het interval in n gelijke delen. Gezien we functiewaarden enkel berekend worden in de steunpunten $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, gebruiken we het minimum van opeenvolgende beelden voor de ondersom en het maximum voor de bovensom. Indien de onderverdeling fijn genoeg is, zal de werkelijke waarde van de bepaalde integraal tussen beide benaderingen zitten.

```
Define onderbovensom()=
Prgm
:Local f,a,b,n,h,k,x,so,sb
:Request "Functie f(x)=",f(x)
:Request "Linkergrens a=",a
:Request "Rechtergrens b=",b
:Request "Aantal deelintervallen n=",n
:h:=((b-a)/(n))
:so:=0
:sb:=0
:For k,1,n-1
:x:=a+k*h
:so:=so+h*min(f(x),f(x+h))
:sb:=sb+h*max(f(x),f(x+h))
:EndFor
:Disp "Ondersom",approx(so)
:Disp "Bovensom",approx(sb)
:EndPrgm
```



Toepassing van beide methoden en vergelijking met de resultaten van de ingebouwde functies levert relatief goede resulaten.

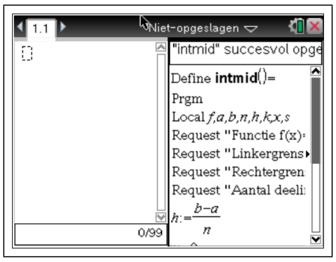


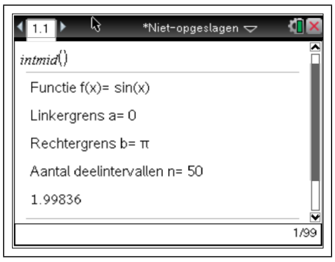
Opdracht 37. *Numerieke integratie / Midpuntsregel*
Om de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ te benaderen kun je het interval $[a,b]$ verdelen in n gelijke delen, elk met een lengte h, dit geeft de punten $x_k = a + kh$, $k = 0, 1 \ldots n-1$. Meetkundig kun je de oppervlakte onder $y = f(x)$ verdelen in rechthoeken door x_k en x_{k+1} en met hoogte $f(x_k + \frac{h}{2})$. Je bekomt dan als benadering $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k + \frac{h}{2})$. Maak een tekening, en schrijf het programma `intmid` dat deze benadering gebruikt. Benader $\int_0^\pi \sin x\ \mathrm{d}x$. Vergelijk en toon dat je in dit geval betere resultaten bekomt dan met een onder- of bovensombenadering.

Oplossing 37. Het programma is opnieuw relatief kort en snel geschreven. We zullen dezelfde variabelen gebruiken als in de vorige opdracht.

```
Define intmid()=
Prgm
:Local f,a,b,n,h,k,x,s
:Request "Functie f(x)=",f(x)
:Request "Linkergrens a=",a
:Request "Rechtergrens b=",b
:Request "Aantal deelintervallen n=",n
:h:=((b-a)/(n))
:s:=0
:For k,1,n-1
```

```
:x:=a+k*h
:s:=s+h*f(x+h/2)
:EndFor
:Disp approx(s)
:EndPrgm
```





Opdracht 38. *Poolcoördinaten / Oppervlakte*
Gegeven is een kromme in poolcoördinaten $r = f(\theta)$. De oppervlakte, begrensd door deze kromme, wordt gegeven door

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

Waarom?

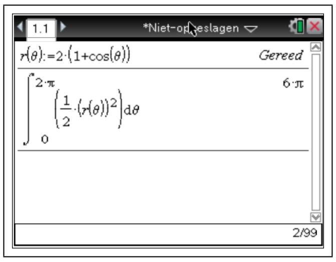
Oplossing 38. We weten dat een cirkel een oppervlakte heeft gelijk aan $\pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \boxed{2\pi}$. Een halve cirkel heeft oppervlakte $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{2} r^2 \boxed{\pi}$. Een sector met hoek θ heeft oppervlakte $\frac{1}{2} r^2 \boxed{\theta}$. We kunnen inzien dat een infinitesimale sector met hoek $\mathrm{d}\theta$ een oppervlakte heeft, gelijk aan

$$\frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

De oppervlakte ingesloten door de kromme $r = f(\theta)$ is

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

In cahier 14: "Voorbeelden met de **TI-84+** uit de analyse"werd deze vraag beantwoord met een programma dat een grafiekje maakt en de oppervlakte benadert. Gezien de **TI-Nspire** geen grafische commando's kent en beschikt over een **CAS** is het antwoord met de **TI-Nspire** snel gegeven en zonder programmeren.



Let op! Deze oppervlakte berekenen gaat enkel voor krommen (zonder lussen) die een bepaald gebied G begrenzen waarvoor elk punt $P \in G$ ook het lijnstuk OP volledig binnen G valt, anders moet de integraal op gepaste wijze worden opgesplitst.

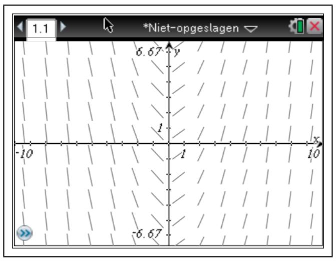
4.3 Zonder programmeren ...

In wat volgt zullen we de **TI-Nspire** gebruiken om leerlingen inzicht te laten krijgen in de problemen van de analyse en tonen tot wat men in staat is met een grafisch rekentoestel. Het gekozen stuk, nml het numeriek/grafisch oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen, is zeker doenbaar maar zal opnieuw door sommigen als *moeilijk* aanzien worden. De lezer kan dit deel overslaan en doorgaan met het volgend hoofdstuk.

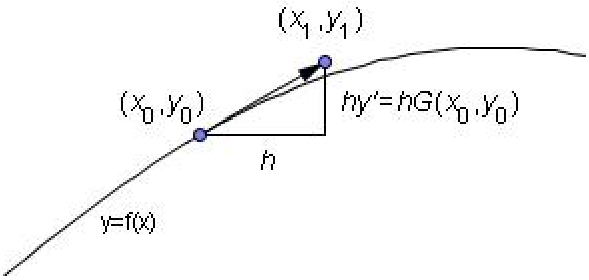
In cahier 14: "Voorbeelden met de **TI-84+** uit de analyse"werd er om dit probleem op te lossen een reeks programma's geschreven. Met de **TI-Nspire** is dit niet nodig, omdat de toepassing die we nodig hebben al standaard in de software zit.

Vanaf het ogenblik dat men beschikt over het begrip afgeleiden kan men volgend probleem schetsen. Stel dat men van een bepaalde functie $y = f(x)$ informatie heeft over de afgeleide bijvoorbeeld $y' = G(x, y)$, kan men dan de grafiek van f terugvinden? De hierbij vermelde vergelijking is een eenvoudig voorbeeld van een differentiaalvergelijking. Sommige differentiaalvergelijkingen kan men oplossen door te integreren, maar lang niet allemaal. Toch kan men op eenvoudige manier de grafiek van f terugvinden, zeker op een **TI-Nspire** . Dit steunt op de numerieke integratiemethode van Euler.

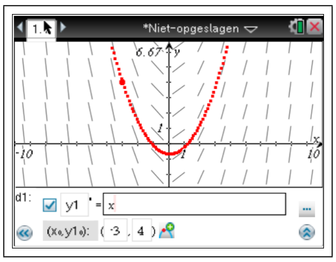
Wat eigenlijk gegeven is, is de afgeleide (dus een raakvector) in elk punt van het vlak want $y' = f'(x) = G(x, y)$. We kunnen dus in elk punt van het vlak een kleine raakvector tekenen. Men bekomt aldus een "fieldplot". Indien we het voorbeeld $y' = x$ gebruiken, ziet de fieldplot er als volgt uit.



Hoe kunnen we nu hieruit de grafiek van f halen? Stel dat we van een zeker punt (x_0, y_0) veronderstellen dat het op de kromme $y = f(x)$ ligt. In dit punt kennen we een raakvector $(1, y') = (1, G(x_0, y_0))$. Als we nu een klein stapje ($h > 0$) zetten in de x-richting en in de y-richting een stapje $hG(x_0, y_0)$, dan volgen we de raakvector en komen we in een punt $(x_1, y_1) = (x_0+h, y_0+hG(x_0, y_0))$ terecht dat zeer dicht bij de kromme ligt. In dit nieuwe punt kunnen we opnieuw beginnen en aldus volgen we stapje na stapje de kromme.



Wanneer we al deze punten tekenen zien we een goede benadering voor de werkelijke kromme $y = f(x)$. Merk op dat we wel een keuze hebben. Het eerste punt kan je vrij kiezen, de kromme die dan berekend wordt zal altijd een oplossing zijn, we noemen dit eerste punt de beginvoorwaarde. In ons voorbeeld blijkt de oplossing de vorm van een parabool te zijn. In dit geval hadden we de algemene oplossing $y = \frac{x^2}{2} + c$ ook kunnen vinden via integratie.

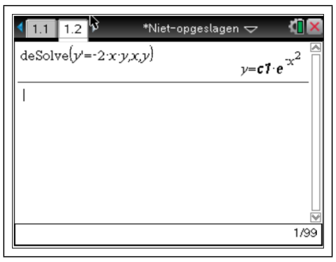


We keren nu naar de vraag hoe we dit alles in de **TI-Nspire** krijgen.

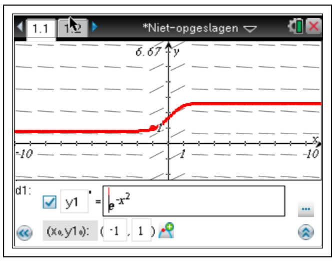
Opdracht 39. *Fieldplot / Methode van Euler / Differentiaalvergelijkingen* Maak een fieldplot van de differentiaalvergelijking $y' = G(x, y)$. Laat zien dat de **TI-Nspire** de Eulermethode gebruikt om grafisch een oplossing te vinden. Gebruik dit om de differentiaalvergelijking $y' = -2xy$ op te lossen, bepaal ook de algemene oplossing. Doe hetzelfde voor $y' = e^{-x^2}$. Wat is hierbij het probleem?

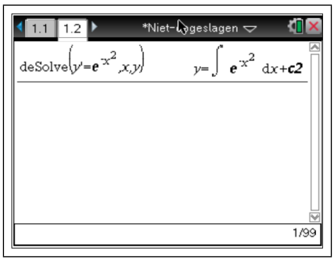
Oplossing 39. We gebruiken een grafisch venster. Via `menu` `[grafiektype]` selecteer je `[diff eq]`. Je kan nu de differentiaalvergelijking ingeven alsook het startpunt van een particuliere oplossing. Door op de extra opties te klikken (`...`) kan je zien dat wel degelijk de Eulermethode wordt gebruikt.

De exacte oplossing kan dmv het **CAS** gevonden worden. Merk op dat het altijd leuker is om de oplossing met de hand te bepalen.



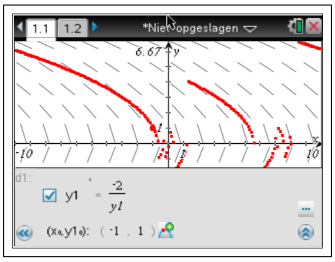
De tweede differentiaalvergelijking levert wat meer problemen op. De exacte oplossing wordt niet gevonden, en *kan* trouwens niet gevonden worden omdat de integraal er eentje is die niet in gesloten vorm kan worden geschreven. Het **CAS** biedt hier dus geen oplossing.

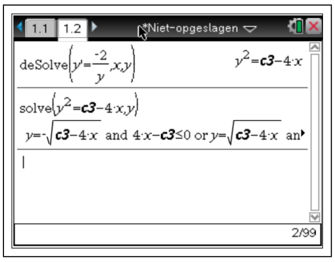




Opdracht 40. *Fieldplot / Methode van Euler / Differentiaalvergelijkingen* Het algoritme van Euler is niet echt bijzonder goed. Het vertoont zekere onstabiliteiten. Beschouw bijvoorbeeld eens $y' = \frac{-2}{y}$.

Oplossing 40.

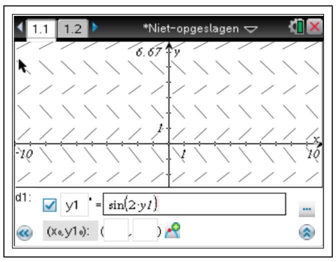


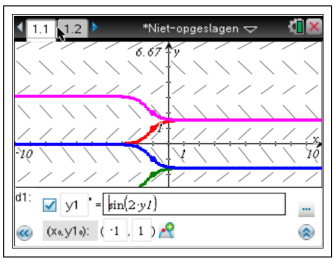


Een korte berekening toont dat de oplossing van deze vergelijking $y = \sqrt{-4x + c}$ is. Dit is een parabool, met als as $y = 0$. In haar top is de raaklijn dus verticaal en heeft de differentiaalvergelijking geen zin. Het algoritme van Euler, dat met benaderde waarde werkt zal in deze punten uiterst gevoelig zijn voor de kleinste fout en zal niet meer van toepassing zijn.

Opdracht 41. *Fieldplot / Methode van Euler / Differentiaalvergelijkingen* Wanneer de x-as de tijd voorstelt zal een horizontale asymptoot overeenstemmen met een evenwicht op lange termijn. Beschouw de differentiaalvergelijking $y' = \sin 2y$. Hoe hangt het evenwicht af van de beginwaarde?

Oplossing 41. We bekijken ten slotte de differentiaalvergelijking $y' = \sin 2y$. Hierbij is het nuttig om het icoontje naast de beginvoorwaarde te gebruiken om meerdere beginvoorwaarden in te geven.





Men ziet dat op lange termijn, afhankelijk van de beginvoorwaarde er een evenwicht zal zijn in $y = \pm\frac{\pi}{2}$. Wanneer de beginvoorwaarde op de x-as ligt, zal de triviale oplossing $y = 0$ gevonden worden. Het evenwichtspunt 0 is afstotend, de anderen zijn aantrekkend.

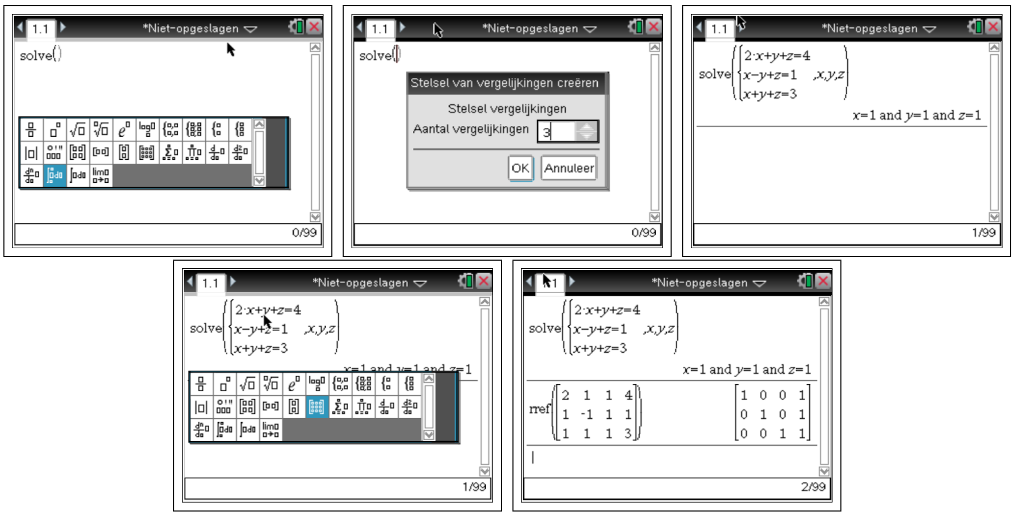
Hoofdstuk 5

Nog enkele functies van de TI-Nspire

Het laatste hoofdstuk uit cahier 14: "Voorbeelden met de **TI-84+** uit de analyse" is een hoofdstuk over enkele `app`'s . De **TI-Nspire** kent geen `app`'s maar heeft daarentegen wel nog een aantal toepassingen in petto. We bespreken er hier enkele.

5.1 Oplossen van vergelijkingen

Via het **CAS** kan je probleemloos stelsels oplossen. Dit kan zowel via `[solve]` als via `[rref]`. De laatste manier steunt op de Gauss-Jordan methode.



Opdracht 42. Gebruik een Vandermonde-matrix om een veelterm van graad $n-1$ te bepalen die door n gegeven punten gaat.

Oplossing 42. Voor n punten zullen we er dus van uitgaan dat de veelterm van graad $n-1$ is.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

We zoeken nu de waarden van n onbekenden $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ uitgaande van n punten. De veelterm f gaat door de n punten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ we weten dus het volgende:

$$\begin{array}{rcccl} f(x_1) & = & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = & y_1 \\ f(x_2) & = & a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = & y_2 \\ & & \vdots & & \\ f(x_n) & = & a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = & y_n \end{array}$$

Gezien de onbekenden $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ zijn kunnen we bovenstaand stelsel onder matrixvorm als volgt schrijven.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

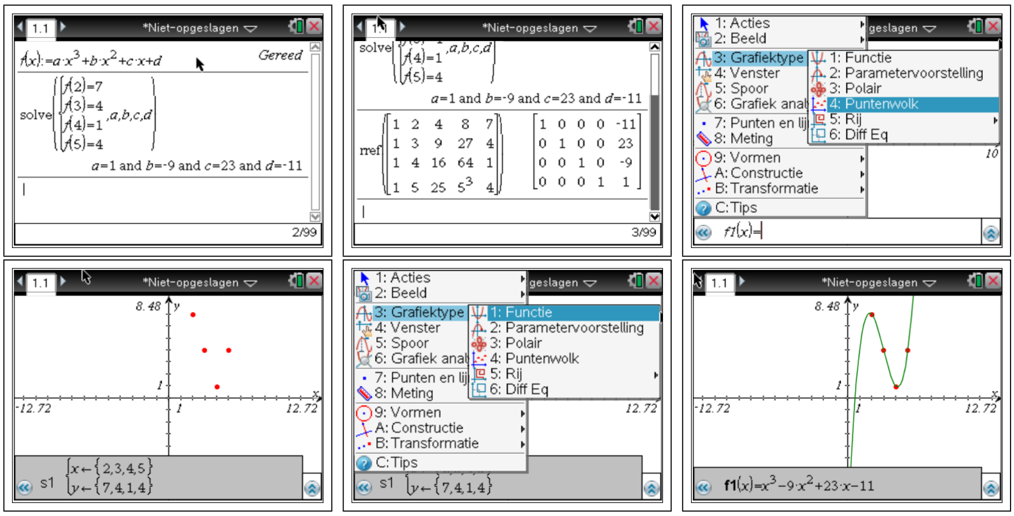
Deze coëfficiëntenmatrix noemt men een *Vandermondematrix*. Het stelsel kan men nu oplossen dmv de verhoogde matrix en de methode van Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & | & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & | & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & | & y_n \end{bmatrix}$$

Veronderstel dat de volgende punten gegeven zijn.

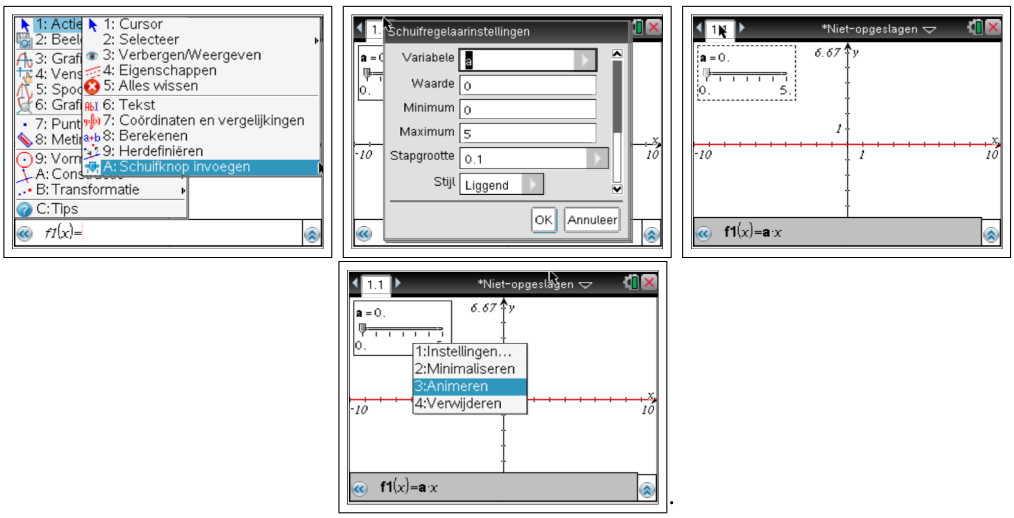
$$(2,7), (3,4), (4,1), (5,4)$$

Met de **TI-Nspire** kunnen we probleemloos de gezochte 3de-graadsveelterm terugvinden, spijtig genoeg verdwijnt alle wiskundige kennis uit het verhaal. Men moet dus opletten met wat we de leerlingen willen aanleren.



5.2 Animaties maken

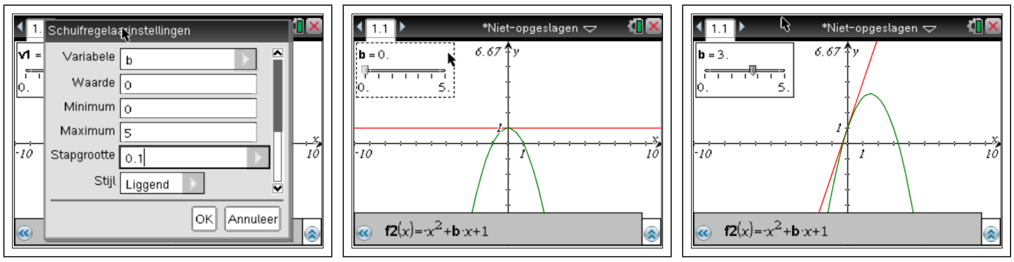
Elke schuifknop kan gebruikt worden om een animatie te maken. Klik op de schuifknop en gebruik `ctrl` `[menu]` `[animeren]` om de animatie te starten. Via dezelfde weg kan je de animatie stopzetten.



.

Opdracht 43. Gebruik een animatie om de betekenis van de parameter b te achterhalen in $y = ax^2 + bx + c$. Teken hiervoor ook de rechte $y = bx + c$.

Oplossing 43. We kiezen de vergelijking $y = -x^2 + bx + 1$ en dus ook de rechte $y = bx + 1$.



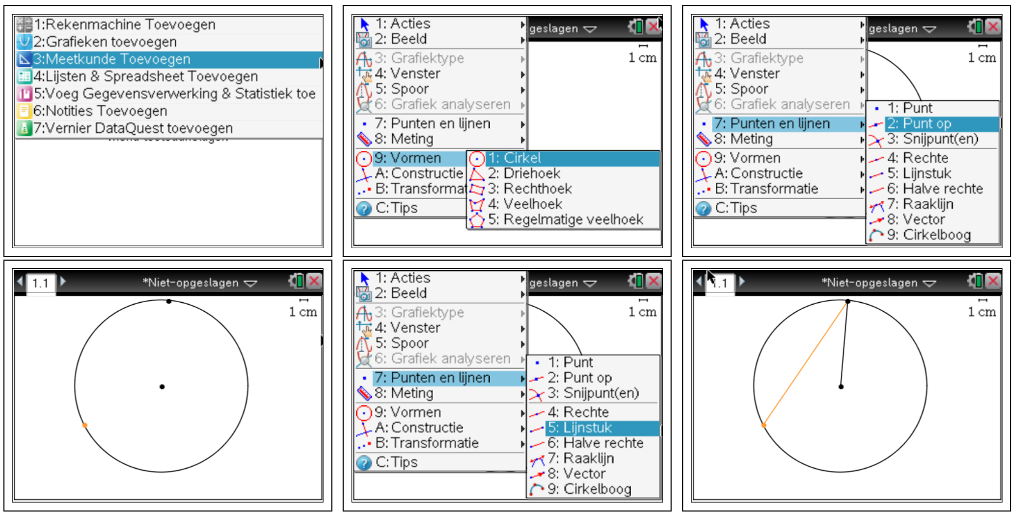
De parameter b in de uitdrukking $y = ax^2 + bx + c$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(0, c)$

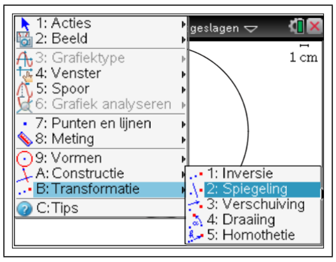
5.3 Meetkundige plaatsen

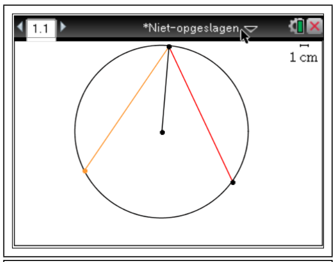
Met de functie [meetkundige plaatsen] kan je de plaats van een meetkundig object tonen in functie van een veranderlijk punt. We geven hier twee voorbeelden.

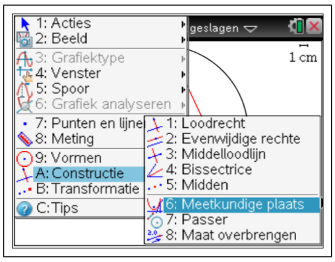
Opdracht 44. Maak de constructie van het licht dat invalt over de rand van een kopje (zie opdracht 17).

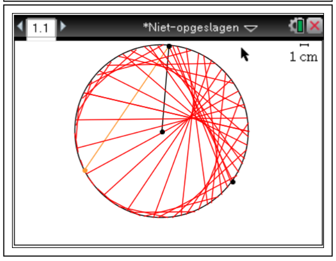
Oplossing 44. Gebruik een meetkundig venster. Teken een cirkel en kies een vast punt (de lichtbron) op de cirkel. Vanuit dit punt schijnt een lichtstraal naar een ander, variabel, punt op de cirkel. Trek de straal naar dit punt en spiegel de invallende lichtstraal. Als je het variabel punt beweegt krijg je telkens een andere weerkaatste lichtstraal. Neem de meetkundige plaats van de teruggekaatste lichtstraal in functie van het variabel punt. De weerkaatste stralen doen de cardioïde verschijnen.



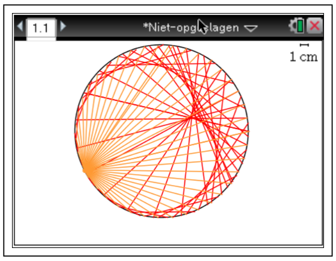






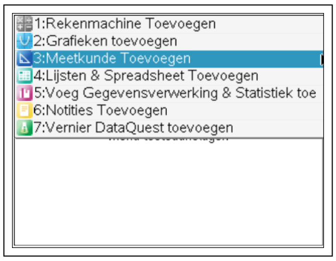


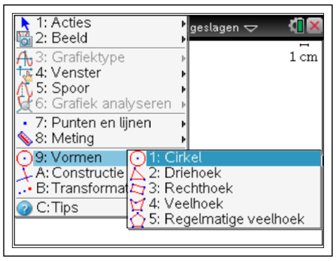
Je kan nu de tekening opkuisen door de kleuren aan te passen, de punten en constructielijntjes te verbergen en ook het spoor van de invallende straal te tekenen.

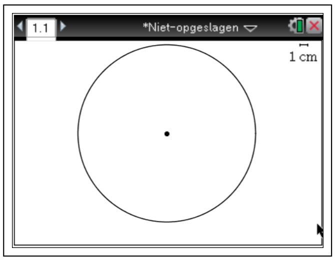


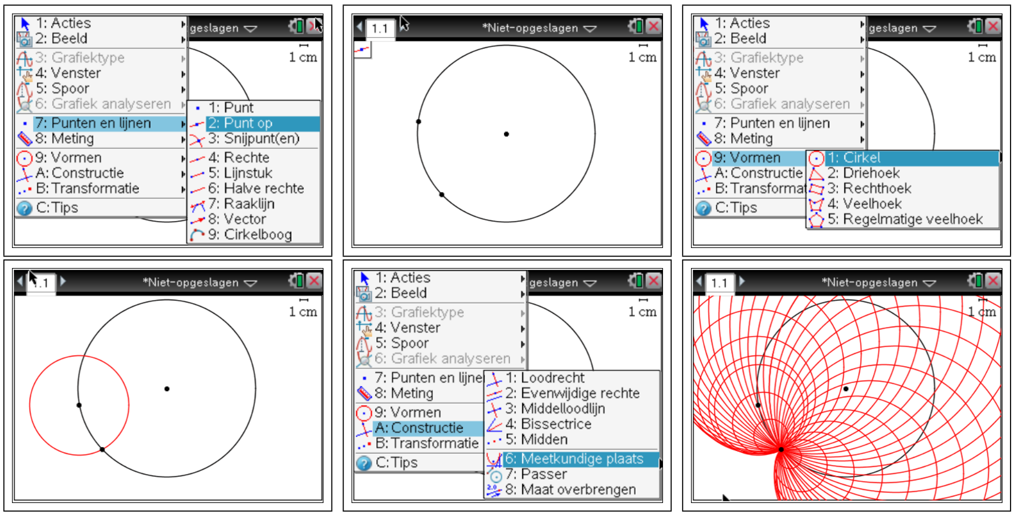
Opdracht 45. Teken een cirkel en kies een vast punt. Gebruik `[meetkundige plaats]` om alle cirkels te tekenen die door dit vast punt gaan en die een veranderlijk centrum hebben op de cirkel. Welke figuur zie je verschijnen?

Oplossing 45.

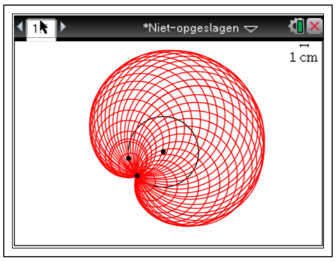








Als we de straal van de eerste cirkel verkleinen, zien we de gehele constructie. De geconstrueerde cirkels vormen de oppervlakte van een cardioïde.



5.4 Taylorveeltermen

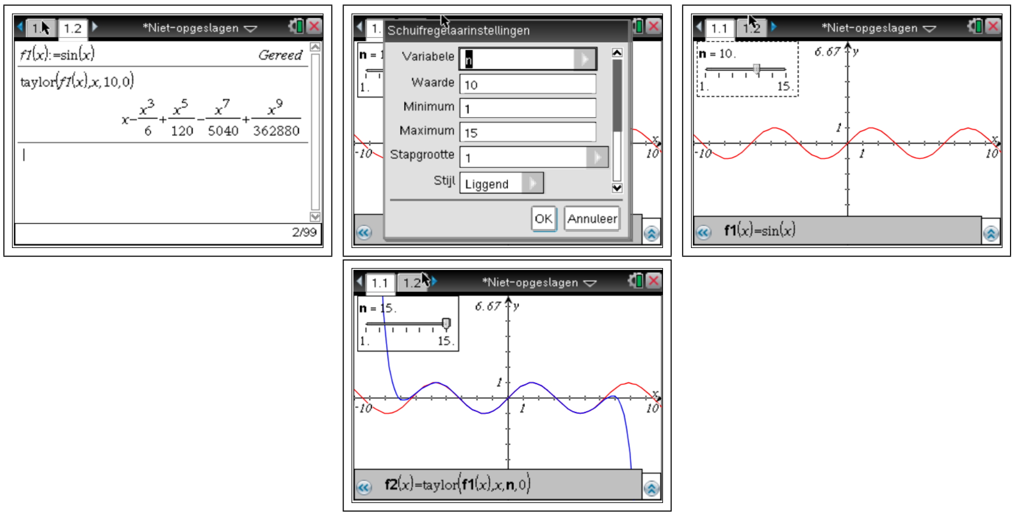
Zij f een functie, de veelterm t_n is de $n$de-graads Taylorveelterm (rond 0).

$$t_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

t_n is de veelterm van graad n die de functie f zo goed mogelijk benadert rondom 0.

Opdracht 46. Gebruik het commando `[taylor]` van de **TI-Nspire** om dit te illustreren voor $f(x) = \sin(x)$. Maak een animatie.

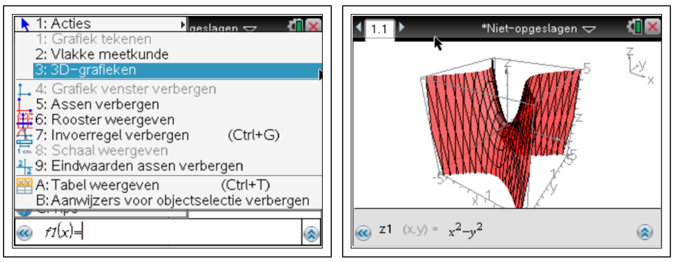
Oplossing 46.



Je ziet duidelijk dat voor $n = 15$ de sinusfunctie binnen haar periode $[-\pi, \pi]$ uitstekend wordt benaderd door de Taylorveelterm $t_{15}(x)$. Eigenlijk wordt intern nooit een sinus gebruikt, alle goniometrische functies in een rekentoestel zijn eigenlijk vervangen door Taylorveeltermen van hoge graad.

5.5 3d-grafieken

Je kan met de **TI-Nspire** ook 3d-grafieken maken. Dit doe je door `menu` `[beeld] [3d grafieken]` te selecteren.

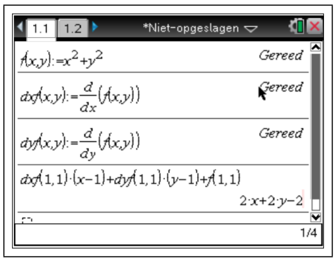


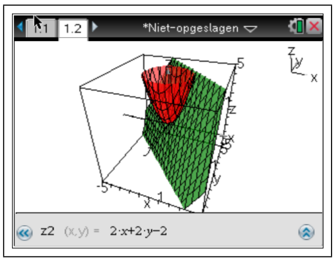
Opdracht 47. De vergelijking van het raakvlak aan $z = f(x, y)$ in (x_0, y_0) wordt gegeven door

$$z = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Teken de paraboloïde $z = x^2 + y^2$ en het raakvlak in $(1, 1)$.

Oplossing 47.

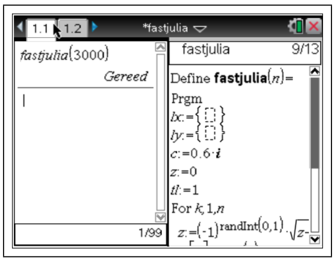


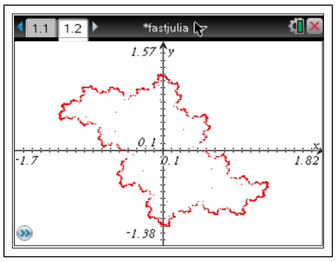


5.6 Julia-fractalen

In cahier 17: “Onderzoekscompetenties: fractalen met de TI-84 Plus” wordt de zogenaamde backtracking-methode uitgelegd om een Julia-fractaal te maken op de **TI-84+** . Met de **TI-Nspire** kan dit ook en met de softwareversie kunnen we zelfs een zeer groot aantal punten laten tekenen, op de handheld is het beter van niet meer dan 1000 punten te laten uitrekenen. Het programma voor de **TI-Nspire** ziet er als volgt uit.

```
Define fastjulia(n)=
Prgm
:Local c,z,k,x,y,tl
:lx:={}
:ly:={}
:c:=0.6*i
:z:=0
:tl:=1
:For k,1,n
:  z:=(1)^(randInt(0,1))*sqrt(z-c)
:  lx[tl]:=real(z)
:  ly[tl]:=imag(z)
:  lx[tl+1]:=-real(z)
:  ly[tl+1]:=-imag(z)
:  tl:=tl+2
:EndFor
:EndPrgm
```


1.1 1.2 *fastjulia
fastjulia(3000)
Gereed
1/99
fastjulia 9/13
Define fastjulia(n)=
Prgm
lx:={ }
ly:={ }
c:=0.6·i
z:=0
tl:=1
For k,1,n


1.1 1.2 *fastjulia
1.57
y
0.1
-1.7
0.1
1.82
x
-1.38

Index

Dit cahier gaat over analyse met TI-Nspire.

Het is de herwerkte versie van cahier 14: " Voorbeelden met de TI-84+ uit de analyse". Dezelfde voorbeelden die vroeger met de TI-84+ werden gemaakt, worden hier met de TI-Nspire (met de software versie 3.1.0) gegeven. Het kan nuttig zijn om beide cahiers naast elkaar te leggen.

De tekst is opgesteld aan de hand van de uitwerking van verschillende concrete voorbeelden die onmiddellijk in de klassituatie kunnen worden gebruikt. De voorbeelden behandelen een grote verscheidenheid in moeilijkheidsgraad. Sommige oefeningen zijn geschikt in een richting met slechts 3 uur wiskunde, andere kunnen uitgewerkt worden in het kader van de onderzoekscompetenties wiskunde.

DIDIER DESES is leerkracht wiskunde aan het Koninklijk Atheneum Koekelberg en geeft les aan de Wetenschappelijke (5u wisk/week) en de Latijnse richtingen (3u wisk/week). Hij is tevens wetenschappelijk medewerker aan het departement wiskunde van de Vrije Universiteit Brussel.

Mei 2012

TEXAS INSTRUMENTS