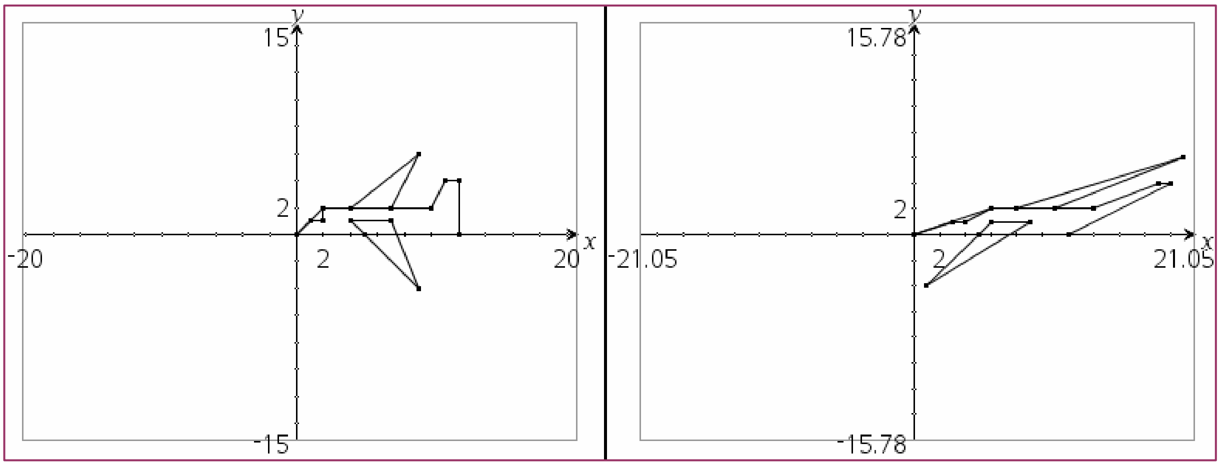
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 13

Vectoren en Matrixalgebra

Een nieuwe aanpak met toepassingen

Guido Herweyers



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

Vectoren en Matrixalgebra

Een nieuwe aanpak met toepassingen

Guido Herweyers

T³ EUROPE

Inhoudsopgave

Woord vooraf …..2

1. **Stelsels van lineaire vergelijkingen** 3
 1.1 Inleiding......................................3
 1.2 Toepassingen 7
  Warmtetransport, een stelsel met parameters, de determinant van een 2×2 matrix, het balanceren van chemische reacties, een cirkel door 3 punten, interpolerende veeltermen, netwerkstromen

2. **Vectoren en lineaire combinaties** 13
 2.1 Inleiding......................................13
 2.2 Toepassingen 17
  Lineaire afhankelijkheid, vectorruimte gegenereerd door vectoren, eliminatie van parameters, de rang van een matrix, homogene en niet homogene stelsels

3. **Lineaire transformaties**......................................22
 3.1 Inleiding......................................22
 3.2 Toepassingen 23
  Lineaire en affiene transformaties, rotaties, samenstelling van lineaire transformaties, elektrische netwerken

4. **Matrixalgebra** 27
 4.1 Inleiding......................................27
 4.2 Toepassingen 29
  Computergraphics

5. **Inverse van een vierkante matrix**......................................31
 5.1 Inleiding......................................31
 5.2 Elementaire rijoperaties als matrixvermenigvuldigingen......................................32
 5.3 De inverse berekenen van een vierkante matrix......................................33
 5.4 Toepassingen 34
  De LU-ontbinding, een stelsel oplossen met de LU-ontbinding

6. **Eigenwaarden en eigenvectoren**......................................40
 6.1 Inleiding......................................40
 6.2 Toepassingen 40
  Eigenwaarden berekenen via rijherleiden, de stelling van Cayley-Hamilton, de cirkels van Gerschgorin, Markov ketens en discrete dynamische systemen, diagonalisatie van een vierkante matrix, matrixfuncties, een stelsel van differentiaalvergelijkingen

7. **Orthogonaliteit, overgedetermineerde stelsels en de kleinste kwadraten methode**..54
 7.1 Inleiding......................................54
 7.2 Toepassingen 54
  De QR-ontbinding, eigenwaarden bepalen met de QR-ontbinding, overgedetermineerde stelsels, curve fitting

Bronnen 59

Woord vooraf

De nieuwe aanpak van vectoren en matrixalgebra biedt veel voordelen.

Van bij de start wordt er gewerkt met vectoren (kolommatrices) en lineaire combinaties van vectoren in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Op die wijze rekent men meteen in een vectorruimte, ondersteund door de waardevolle meetkundige interpretatie in het vlak en in de ruimte.

Vervolgens wordt het product van een matrix A met een vector $\mathbf{x}$ gedefinieerd als een lineaire combinatie van de kolommen van de matrix A. Dit geeft een nieuwe kijk op stelsels van lineaire vergelijkingen.

Tenslotte komt het product van twee matrices A en B tot stand als de standaardmatrix van de samenstelling van twee lineaire transformaties; elke kolom van AB is een lineaire combinatie van de kolommen van A.

De klemtoon ligt hier dus meer op de kolommen van een matrix i.p.v. de individuele elementen.

Deze aanpak wordt prima uiteengezet in het boek van David Lay [6] en tevens in het boek van Gilbert Strang [8].

Dit cahier bevat 7 hoofdstukken, elk hoofdstuk start met een inleiding waarin de nodige definities en belangrijkste aspecten aan bod komen, zonder volledigheid na te streven.

Talrijke toepassingen illustreren vervolgens de veelzijdigheid en het belang van lineaire algebra. De meeste oefeningen worden concreet uitgewerkt.

Voor de numerieke wiskunde, computeralgebra, dynamische meetkunde en grafieken wordt er gewerkt met de software versie van TI-Nspire CAS. We tonen hier enkel de schermafdrukken ter illustratie en ondersteuning. Voor de syntax van dit pakket verwijzen we naar de T3-nascholingen (www.t3vlaanderen.be).

Guido Herweyers
augustus 2007
guido.herweyers@khbo.be

1. Stelsels van lineaire vergelijkingen

1.1 Inleiding

Elk stelsel van lineaire vergelijkingen heeft ofwel één oplossing, ofwel oneindig veel oplossingen, ofwel geen oplossing.

Een stelsel van lineaire vergelijkingen noemen we *consistent* als het ofwel één ofwel oneindig veel oplossingen heeft, het stelsel is *inconsistent* als het geen oplossing heeft.

Equivalente stelsels zijn stelsels met dezelfde oplossingenverzameling.

Strategie om een lineair stelsel op te lossen: herleid het stelsel tot een equivalent stelsel dat eenvoudiger is op te lossen: "elimineer" variabelen.

Hiertoe gebruiken we de volgende operaties:

- bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking optellen
- twee vergelijkingen verwisselen
- een vergelijking vermenigvuldigen met een getal verschillend van nul

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 2x+4y-z&=9 \\ 4x+11y+6z&=13 \\ -2x+y+5z&=-8 \end{aligned}$$

Eerst elimineren we x uit de tweede en derde vergelijking; van de tweede vergelijking trekken we twee keer de eerste vergelijking af, bij de derde vergelijking tellen we de eerste op:

$$\begin{aligned} 2x+4y-z&=9 \\ 3y+8z&=-5 \\ 5y+4z&=1 \end{aligned}$$

Vervolgens elimineren we y uit de derde vergelijking;
van de derde vergelijking trekken we 5/3 keer de tweede vergelijking af:

$$\begin{aligned} 2x+4y-z&=9 \\ 3y+8z&=-5 \\ -\frac{28}{3}z&=\frac{28}{3} \end{aligned}$$

Het stelsel is nu herleid tot een *driehoeksvorm* (eliminatiemethode van Gauss).

We lossen het verder op door *terugwaartse substitutie*: uit de derde vergelijking volgt $z=-1$, uit de tweede vergelijking volgt $3y=-5-8z=3$ waaruit $y=1$, uit de eerste vergelijking volgt tenslotte $2x=9-4y+z=4$ waaruit $x=2$.
De oplossing van het stelsel is dus $(x,y,z)=(2,1,-1)$.

We hebben minder schrijfwerk door de corresponderende *elementaire rijoperaties* uit te voeren op de *uitgebreide matrix* van het stelsel:

- bij een rij een veelvoud van een andere rij optellen
- twee rijen verwisselen
- een rij vermenigvuldigen met een getal verschillend van nul

Twee matrices zijn rijequivalent (symbool ~) als de ene kan worden getransformeerd in de andere door een eindig aantal elementaire rijoperaties.

Het stelsel $\begin{matrix} 2x+4y-z=9 \\ 4x+11y+6z=13 \\ -2x+y+5z=-8 \end{matrix}$ heeft als uitgebreide matrix $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 4 & 11 & 6 & 13 \\ -2 & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 4 & 11 & 6 & 13 \\ -2 & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -28/3 & 28/3 \end{bmatrix}$$

In deze *voorwaartse fase* werd het stelsel herleid tot driehoeksvorm (Gauss). We kunnen de terugwaartse substitutie vervangen door de *terugwaartse fase* waarbij we nu eerst z elimineren uit de tweede en derde vergelijking en vervolgens y uit de eerste vergelijking (Gauss-Jordan):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Algemeen:
met Gauss herleiden we de uitgebreide matrix tot een echelonvorm, met Gauss-Jordan tot de gereduceerde echelonvorm.

Een matrix is in echelonvorm (of rijechelonvorm) als:

1. de niet nulrijen staan boven de nulrijen
2. elk *leidend element* (d.i. het eerste niet nul element) van een rij staat rechts van het leidend element van de voorgaande rij
3. alle elementen in de kolom onder een leidend element zijn nul (dit volgt uit 1 en 2)

Enkele echelonvormen (met ■ een van nul verschillend getal en * eender welk getal):

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{bmatrix}$$

Voor een gereduceerde (rij)echelonvorm (rref: reduced row echelon form) moet bovendien voldaan zijn aan:

4. het leidend element van elke niet nulrij is 1
5. elke leidende 1 is het enige element verschillend van nul in zijn kolom

Voorbeeld van een gereduceerde echelonvorm:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$$

Elke matrix kan via elementaire rijoperaties worden herleid tot één en slechts één gereduceerde echelonmatrix.

Voorbeeld: bepaal de oplossingenverzameling van het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix} \text{ (een echelonvorm)}$$

Verder rijherleiden tot de gereduceerde echelonvorm levert:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Terminologie:

- Een *pivotpositie* in een matrix A is een plaats in A die correspondeert met een leidende 1 in de gereduceerde echelonvorm van A. Het is tevens de plaats van een leidend element in eender welke echelonvorm van A.
- Een *pivot* (of *spil*) is een niet nul getal op een pivotpositie dat rechtstreeks wordt gebruikt om nullen te creëren of eerst wordt herleid tot een leidende 1, waarmee vervolgens nullen worden gecreëerd.
  In bovenstaand voorbeeld zijn de pivots aangeduid (3, 2 en 1).
- Een *pivotkolom* van een matrix is een kolom die een pivotpositie bevat.
- Een *hoofdvariabele* van een lineair stelsel is elke variabele die correspondeert met een pivotkolom van de uitgebreide matrix van het stelsel (of met een leidende 1 in de gereduceerde echelonvorm)
- Een *vrije variabele* is elke variabele die geen hoofdvariabele is.

De gereduceerde echelonvorm correspondeert met het stelsel:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= 24 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -7 \\ x_5 &= 4 \end{aligned}$$

We vinden de oplossingenverzameling door de hoofdvariabelen te schrijven in functie van de vrije variabelen:

$$\begin{aligned} &x_1 = 24 + 2x_3 - 3x_4 \\ &x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4 \\ &x_3 \text{ is vrij} \\ &x_4 \text{ is vrij} \\ &x_5 = 4 \end{aligned}$$

Aan elke vrije variabele (in een consistent stelsel) kunnen we een willekeurige waarde toekennen; bovenstaand stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

Stelling (bestaan en uniek zijn van een oplossing):

- Een lineair stelsel is consistent als en slechts als de laatste kolom van de uitgebreide matrix geen pivotkolom is, d.w.z. als en slechts als een echelonvorm van de uitgebreide matrix geen rij heeft van de vorm $\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & b \end{bmatrix}$ (met $b \neq 0$)
- Als een lineair stelsel consistent is, dan heeft het stelsel
  1) juist één oplossing als het geen vrije variabelen heeft
  2) oneindig veel oplossingen als er minstens één vrije variabele is.

Samenvatting: een lineair stelsel oplossen m.b.v. elementaire rijoperaties

1. Noteer de uitgebreide matrix van het stelsel.
2. Herleid de uitgebreide matrix van het stelsel via elementaire rijoperaties tot een echelonvorm. Ga hiermee na of het stelsel al dan niet consistent is. Indien niet, stop. Indien wel, ga naar de volgende stap.
3. Ga verder met rijherleiden tot je de gereduceerde echelonmatrix verkrijgt.
4. Schrijf het stelsel van vergelijkingen neer corresponderend met stap 3, negeer hierbij de nulrijen.
5. Schrijf de enige hoofdvariabele van elke vergelijking in functie van de andere (als er zijn) vrije variabelen.

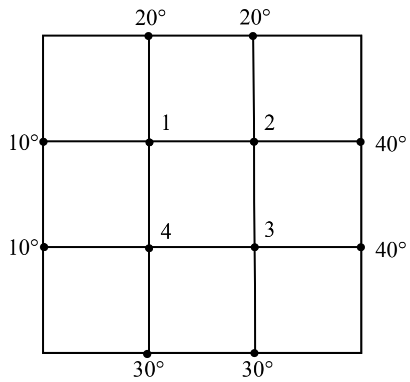
Oefening:

a) Hoeveel pivots kan een 4×6 matrix hoogstens hebben? Waarom?
b) Hoeveel pivots kan een 6×4 matrix hoogstens hebben? Waarom?
c) Hoeveel oplossingen heeft een consistent lineair stelsel van 3 vergelijkingen met vier onbekenden? Waarom?
d) De coëfficiëntenmatrix van een lineair stelsel is een 4×6 matrix met drie pivotkolommen. Hoeveel pivotkolommen heeft de uitgebreide matrix als het stelsel inconsistent is?

1. 2 Toepassingen

1. Warmtetransport

Bij de studie van warmtetransport wenst men de temperatuurverdeling bij evenwicht te bepalen van een dunne plaat, wanneer de temperatuur op de rand van de plaat gekend is. Zij T_1, T_2, T_3, T_4 de temperaturen in de 4 inwendige knopen van het rooster in onderstaande figuur. De temperatuur in een knooppunt is bij benadering het gemiddelde van de temperaturen van de 4 dichtst gelegen knooppunten (links, boven, rechts en onder).
Bijvoorbeeld $T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4)/4$ of $4T_1 - T_2 - T_4 = 30$. Bepaal benaderingen voor de temperaturen T_1, T_2, T_3, T_4 .



Oplossing:

Het stelsel wordt

$$\begin{aligned} 4T_1 - T_2 - T_4 &= 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 &= 60 \\ -T_2 + 4T_3 - T_4 &= 70 \\ -T_1 - T_3 + 4T_4 &= 40 \end{aligned} \quad \text{Reken na dat} \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22.5 \end{bmatrix}$$

De oplossing is $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (20,\ 27.5,\ 30,\ 22.5)$

$$a := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rref}(a) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{55}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{45}{2} \end{bmatrix}$$

2. Een stelsel met parameters

Bepaal een verband tussen *a*, *b* en *c* zodat het volgende stelsel consistent is:

$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = a$

$3x_2 - 5x_3 = b$

$-2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = c$

Oplossing: rijherleiden van de uitgebreide matrix van het stelsel levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ 0 & -3 & 5 & c+2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+2a+b \end{bmatrix}$$

De laatste vergelijking is $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = c + 2a + b$, hieraan is enkel voldaan als $c + 2a + b = 0$.
Het gegeven stelsel is dus consistent als en slechts als $c + 2a + b = 0$, in dit geval zijn er oneindig veel oplossingen met x_3 als vrije variabele.

3. De determinant van een 2×2 matrix

Waaraan moeten *a*,*b*,*c* en *d* voldoen opdat het stelsel

$ax + by = f$

$cx + dy = g$

met onbekenden *x* en *y* een unieke oplossing zou hebben?

Oplossing:

(i) Als $a \neq 0$ dan geldt:

$$\begin{bmatrix} a & b & f \\ c & d & g \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & b/a & f/a \\ c & d & g \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & b/a & f/a \\ 0 & d - c(b/a) & g - c(f/a) \end{bmatrix}$$

Als $d - c(b/a) \neq 0$ of $ad - bc \neq 0$ dan heeft het stelsel een unieke oplossing.

Als $d - c(b/a) = 0$ of $ad - bc = 0$ dan heeft het stelsel ofwel geen oplossing (als $g - c(f/a) \neq 0$) ofwel oneindig veel oplossingen (als $g - c(f/a) = 0$)

(ii) Als $a = 0$ en $c \neq 0$ dan kom je tot dezelfde conclusie (verwissel eerst rij 1 en rij 2).

(iii) Als $a = 0$ en $c = 0$ dan heeft het stelsel ofwel geen oplossing, ofwel oneindig veel oplossingen (ga na). In dit geval geldt $ad - bc = 0$.

Besluit: het stelsel heeft een unieke oplossing als en slechts als $ad - bc \neq 0$.

We noemen $ad-bc$ de *determinant* van de matrix van het stelsel: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad-bc$.

4. Chemische reactiestoechiometrie: het balanceren van chemische reacties

Voorbeeld 1: beschouw de ongebalanceerde reactievergelijking

$C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

Vermenigvuldig elk reagens met een variabele:
$a\,C_3H_8 + b\,O_2 \rightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$

De reactievergelijking *balanceren* betekent het bepalen van de eenvoudigste natuurlijke getallen a,b,c,d (d.w.z. zo klein mogelijk) zodat het totaal aantal atomen van elk optredend element aan elke kant van $\rightarrow$ gelijk blijft.

Dit leidt tot de volgende vergelijkingen:
voor C : $3a = c$
voor H : $8a = 2d$
voor O : $2b = 2c + d$

De uitgebreide matrix van het stelsel is
$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \text{RL} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Herleiden tot de gereduceerde echelonmatrix levert (ga na):

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{waaruit} \quad \begin{array}{l} a = \frac{1}{4}d \\ b = \frac{5}{4}d \\ c = \frac{3}{4}d \\ d \text{ is vrij} \end{array}$$

We zijn echter op zoek naar de eenvoudigste natuurlijke waarden voor a,b,c,d .
Klaarblijkelijk vinden we die door $d=4$ te kiezen zodat $a=1,\ b=5, c=3, d=4$.

De gezochte gebalanceerde reactievergelijking is dus

$C_3H_8 + 5\,O_2 \rightarrow 3\,CO_2 + 4\,H_2O$

Voorbeeld 2:

$a\ FeS_2 + b\ O_2 \rightarrow c\ Fe_2O_3 + d\ SO_2$

$$\begin{array}{c} \\ Fe \\ S \\ O \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \text{RL} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{4}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+2R_3]{R_2+3R_3} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -11/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_2}{2}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 \end{array}\right]$$

Het gelijkwaardige stelsel wordt dus

$$\begin{cases} a - \frac{1}{2}d = 0 \\ b - \frac{11}{8}d = 0 \\ c - \frac{1}{4}d = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}d \\ b = \frac{11}{8}d \\ c = \frac{1}{4}d \\ d \text{ is vrij} \end{cases}$$

Voor d kiezen we het kleinste gemeen veelvoud van de optredende noemers:
$d = \text{kgv}(2,8,4) = 8$ zodat $a = 4,\ b = 11,\ c = 2,\ d = 8$

De gebalanceerde reactievergelijking wordt dus
$4\ FeS_2 + 11\ O_2 \rightarrow 2\ Fe_2O_3 + 8\ SO_2$

Voorbeeld 3:

$a\ K_4Fe(CN)_6 + b\ H_2SO_4 + c\ H_2O \rightarrow d\ K_2SO_4 + e\ FeSO_4 + f\ (NH_4)_2SO_4 + g\ CO$

Oplossing:
$K_4Fe(CN)_6 + 6\ H_2SO_4 + 6\ H_2O \rightarrow 2\ K_2SO_4 + FeSO_4 + 3\ (NH_4)_2SO_4 + 6\ CO$

Voorbeeld 4: voor de liefhebbers:

$a\ [Cr(N_2H_4CO)_6]_4.[Cr(CN)_6]_3 + b\ KMnO_4 + c\ H_2SO_4$

$\rightarrow d\ K_2Cr_2O_7 + e\ MnSO_4 + f\ CO_2 + g\ KNO_3 + h\ K_2SO_4 + i\ H_2O$

De oplossing is:

$a = 10$	$b = 1176$	$c = 1399$	$d = 35$	$e = 1176$
$f = 420$	g = 660	$h = 223$	$i = 1879$	

5. Een cirkel door 3 punten

Uit de meetkunde weten we dat er één cirkel gaat door drie punten die niet gelegen zijn op een rechte.

De standaardvergelijking $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ van de cirkel met middelpunt (x_0,y_0) en straal R kan worden herschreven als $x^2+y^2+lx+my+n=0$ (1) . Substitutie van de coördinaten van de gegeven punten $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ in (1) levert een stelsel van lineaire vergelijkingen waaruit de onbekenden l, m, n worden opgelost:

$$\begin{cases} lx_1+my_1+n=-x_1^2-y_1^2 \\ lx_2+my_2+n=-x_2^2-y_2^2 \\ lx_3+my_3+n=-x_3^2-y_3^2 \end{cases} \quad (2)$$

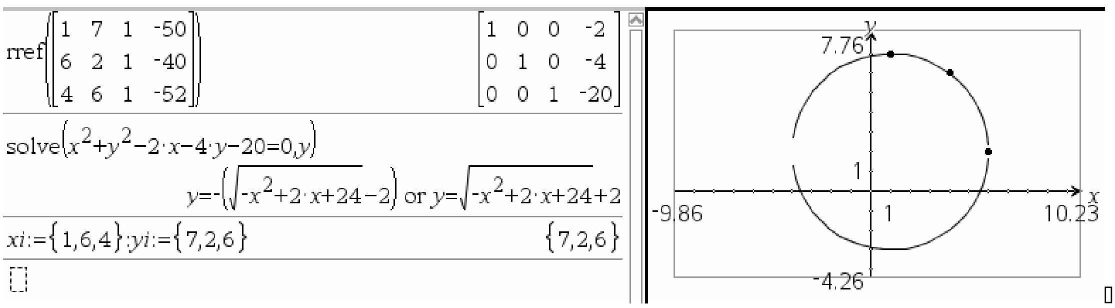
Voorbeeld: vind de vergelijking van de cirkel door de punten $(1,7),(6,2)$ en $(4,6)$.

Het stelsel (2) wordt $\begin{cases} l+7m+n=-50 \\ 6l+2m+n=-40 \\ 4l+6m+n=-52 \end{cases}$.

De gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix van het stelsel levert de oplossing $(l,m,m)=(-2,-4,-20)$.

De vergelijking van de cirkel wordt $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ of $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

Een grafische bevestiging:



Wanneer heeft het stelsel (2) geen oplossingen of oneindig veel oplossingen? Geef een voorbeeld.

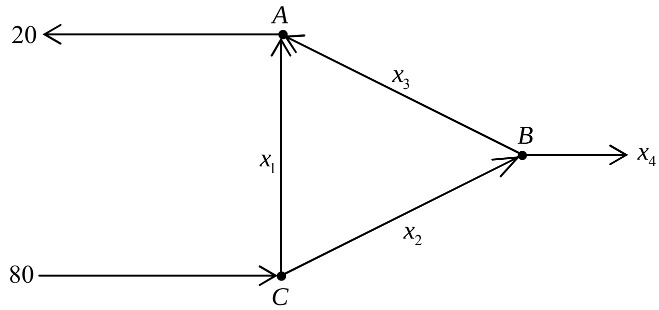
6. Interpolerende veeltermen

Bepaal de interpolerende veelterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ door de punten $(1,12)$, $(2,15)$, $(3,16)$.
Oplossing: $f(x) = -x^2 + 6x + 7$.
Bepaal tevens een veelterm $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (met $a \neq 0$) door die punten en met rationale coëfficiënten (zijn er meerdere oplossingen?). Bestaat er zo'n veelterm met gehele coëfficiënten?

7. Netwerkstromen

Een netwerk bestaat uit een aantal punten, knooppunten genoemd, samen met lijnstukken of bogen, takken genoemd, die alle of sommige knooppunten verbinden. De richting van de stroom (vb. elektrische stroom, verkeersstroom van wagens,…) wordt in elke tak aangeduid en de stroomhoeveelheid (of snelheid) wordt ofwel vermeld ofwel aangeduid door een variabele. De basisveronderstellingen voor een netwerk zijn:
- de totale ingaande stroom in een netwerk is gelijk aan de totale uitgaande stroom uit het netwerk.
- de totale ingaande stroom in een knooppunt is gelijk aan de totale uitgaande stroom uit dat knooppunt.

Voorbeeld:
vind het algemene stroompatroon van het volgende netwerk. Stel dat alle stromen positief zijn, wat is dan de grootst mogelijke waarde van x_3?



knooppunt	stroom in		stroom uit
A	$x_1 + x_3$	=	20
B	x_2	=	$x_3 + x_4$
C	80	=	$x_1 + x_2$
netwerk:	80	=	$20 + x_4$

Rijherleiden van de uitgebreide matrix levert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en dus} \quad \begin{array}{l} x_1 = 20 - x_3 \\ x_2 = 60 + x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \\ x_4 = 60 \end{array}$$

De grootste waarde van x_3 is 20, aangezien x_1 positief is.

2. Vectoren en lineaire combinaties

2.1 Inleiding

Een *kolomvector* of kortweg *vector* is een matrix met één kolom.

De vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ noteren we ook als $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, om plaats te winnen.

Een vector in $\mathbb{R}^n$ is een lijst of *geordend stel* van *n* reële getallen; twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn gelijk als en slechts als hun corresponderende elementen (of *componenten*) gelijk zijn:
$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \Leftrightarrow u_1 = v_1$ en $u_2 = v_2$ en… $u_n = v_n$

Vectoren in $\mathbb{R}^n$ kun je optellen en vermenigvuldigen met een reëel getal (een scalar), de bewerkingen gebeuren component per component: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ en $2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Rekeneigenschappen in $\mathbb{R}^n$:

Voor alle vectoren **u**, **v**, **w** in $\mathbb{R}^n$ en alle scalars *c* en *d* geldt:

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
5) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6) $c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
7) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

met $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ de *nulvector* en $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ de *tegengestelde* vector van **u**

Deze eigenschappen maken van $\mathbb{R}^n$ een *vectorruimte*.

Het verschil van twee vectoren wordt gedefinieerd door $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

Vectoren in $\mathbb{R}^2$: twee meetkundige voorstellingen

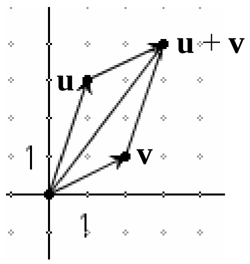
- De vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ wordt voorgesteld door het *punt* met coördinaten $(3, 2)$ in het vlak t.o.v. een rechthoekig assenstelsel; $\mathbb{R}^2$ is de verzameling van alle punten in het vlak.
- De vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ wordt voorgesteld de *pijl* van de oorsprong naar het punt $(3, 2)$.
  De pijl gaat drie eenheden naar rechts en 2 eenheden naar boven.

Elke andere pijl in het vlak met dezelfde richting, zin en grootte (3 naar rechts, 2 naar boven) stelt tevens de vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ voor.

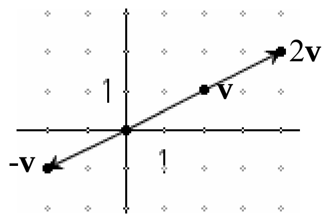
Meetkundige regels voor het optellen van vectoren in $\mathbb{R}^2$

- De kop-aan-staartregel: we reizen eerst volgens **u**, dan volgens **v**, of we nemen de korte weg volgens $\mathbf{u}+\mathbf{v}$

- De parallellogramregel



Meetkundige voorstelling van $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$



Meetkundige voorstelling van **v** en veelvouden van **v**

Vectoren in $\mathbb{R}^3$ hebben analoge meetkundige voorstellingen t.o.v. een rechthoekig driedimensionaal assenstelsel in de ruimte.

Gegeven vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ in $\mathbb{R}^n$ en reële getallen $c_1, c_2, \ldots, c_p$, dan is de vector

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$$

een *lineaire combinatie* van $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ met *gewichten* $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Enkele lineaire combinaties van $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ zijn: $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$, $5\mathbf{v}_2$, $\mathbf{0}$.

Het product van een $m \times n$ matrix A met een vector **x** uit $\mathbb{R}^n$ is een lineaire combinatie van de opeenvolgende kolommen van A met als gewichten de corresponderende elementen van **x**:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Voorbeeld: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

Het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -3x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

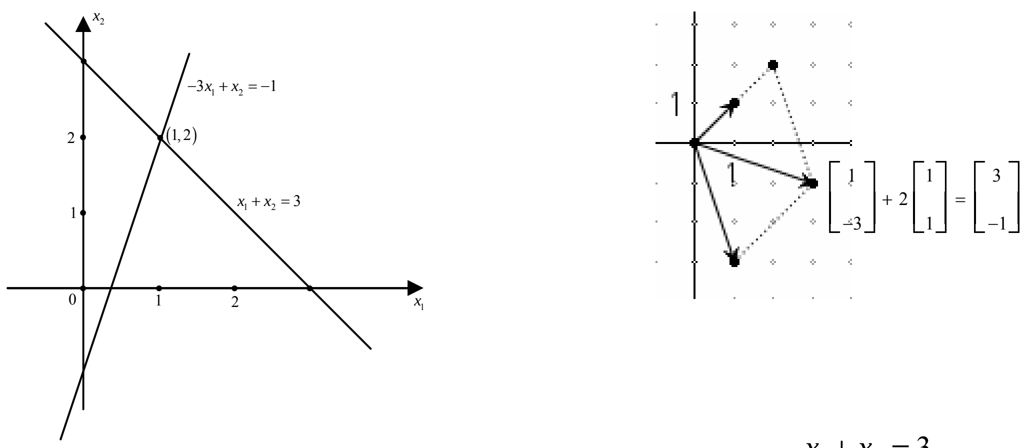
kunnen we nu ook noteren als

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{(vectorvergelijking)}$$

of als

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{(matrixvergelijking)}$$

met de vectorvergelijking zoeken we een lineaire combinatie van de vectoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ die de vector $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ oplevert!



Twee meetkundige interpretaties van het stelsel $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -3x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$

Als A een $m \times n$ matrix is, **u** en **v** vectoren in $\mathbb{R}^n$ en c een scalar, dan geldt:

$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ en $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

Merk op dat $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot\mathbf{2}+(-2)\cdot\mathbf{3} \\ 5\cdot\mathbf{2}+0\cdot\mathbf{3} \\ (-4)\cdot\mathbf{2}+6\cdot\mathbf{3} \end{bmatrix}$

Hieruit volgt de klassieke rij-kolom-regel om $A\mathbf{x}$ te berekenen.

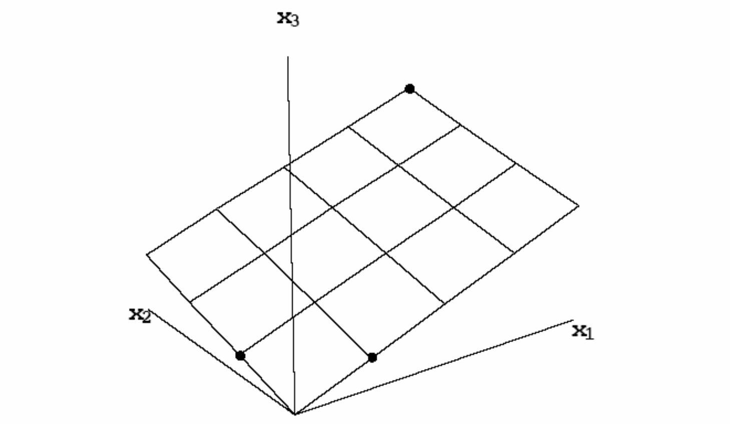
De verzameling van alle lineaire combinaties van vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ in $\mathbb{R}^n$ noteren we met $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, we noemen dit de verzameling *gegenereerd* of *opgespannen* door $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

V=$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ is een *deelruimte* van $\mathbb{R}^n$, dit is een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ die zelf een vectorruimte is, het volstaat hiervoor na te gaan dat:

i) $\mathbf{0} \in V$
ii) Voor elke $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ geldt dat $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ (V is gesloten voor de optelling van vectoren)
iii) Voor elke $\mathbf{u} \in V$ en $c \in \mathbb{R}$ geldt dat $c\mathbf{u} \in V$ (V is gesloten voor de scalaire vermenigvuldiging)

Voorbeeld 1:

$\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ met $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (duid de vectoren aan):



$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ liggen in één vlak
Span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ is de verzameling van alle vectoren van de vorm $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$.
Hier is Span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ een vlak door de oorsprong.

Voorbeeld 2:

Stel $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, dan is

$\text{Span}\{\mathbf{u}\} = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ een rechte door de oorsprong en $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \mathbb{R}^2$

Het minimum aantal vectoren om $\mathbb{R}^2$ te genereren is 2, deze vectoren moeten dan wel lineair onafhankelijk zijn.

Een verzameling vectoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ in $\mathbb{R}^n$ is *lineair onafhankelijk* als de vectorvergelijking $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$
enkel de triviale oplossing heeft: $(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (0, 0, \ldots, 0)$

De verzameling $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ is *lineair afhankelijk* als er getallen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ bestaan, niet allemaal gelijk aan 0, zo dat $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$. Een dergelijke lineaire combinatie noemen we dan een *lineair verband* tussen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

De kolommen van $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_p \end{bmatrix}$ zijn lineair onafhankelijk als en slechts als de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ enkel de triviale oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft.

Zij *V* een vectorruimte die gegenereerd wordt door een eindige verzameling.
Een *basis* van *V* is een verzameling van vectoren die de vectorruimte genereert en die lineair onafhankelijk is.
Elke basis van een vectorruimte heeft hetzelfde aantal vectoren, dit aantal noemen we de *dimensie* van de vectorruimte.
Zij *B* een basis van *V*, dan kan elke vector uit *V* op juist één manier geschreven worden als een lineaire combinatie van de basisvectoren uit *B*.

2. 2 Toepassingen

1. Stel $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) Ga na of $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineair afhankelijk is.
b) Vind, indien mogelijk, een lineair verband tussen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Oplossing:

a) Beschouw de vectorvergelijking $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

of het stelsel met uitgebreide matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Rijherleiden levert $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Het stelsel is consistent met x_3 als vrije variabele, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is lineair afhankelijk.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ zodat $\begin{array}{l} x_1 = -33x_3 \\ x_2 = 18x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \end{array}$

Stellen we $x_3 = 1$, dan is $x_1 = -33$ en $x_2 = 18$, zodat $-33\mathbf{v}_1 + 18\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, d.i. een lineair verband tussen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Dit lineair verband kun je ook meteen vinden als volgt:

aangezien $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ of $[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{0}] \sim [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{0}]$

en we op zicht zien dat $\mathbf{u}_3 = 33\mathbf{u}_1 - 18\mathbf{u}_2$, moet ook $\mathbf{v}_3 = 33\mathbf{v}_1 - 18\mathbf{v}_2$.

2. Genereren de kolommen van $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ gans $\mathbb{R}^3$?

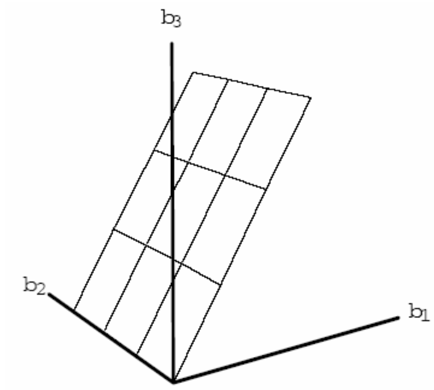
Oplossing:

We moeten nagaan of het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$; kun je elke vector **b** schrijven als een lineaire combinatie van de kolommen van *A* ?

Rijherleiden van de uitgebreide matrix $[A \quad \mathbf{b}]$ levert

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ -3 & -11 & -14 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$

als $-2b_1 + b_3 \neq 0$, dan is $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ niet consistent, de kolommen van *A* genereren dus niet $\mathbb{R}^3$, maar wel vectoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ waarvoor $-2b_1 + b_3 = 0$, dit is de vergelijking van een vlak door de oorsprong:



Merk op:
de kolommen van een $m \times n$ matrix *A* genereren $\mathbb{R}^m$ als en slechts als *A* een pivotpositie heeft in elke rij, dan kan de uitgebreide matrix $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ immers geen pivotpositie hebben in de laatste kolom!

Zij *A* een $n \times n$ matrix, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

a) De kolommen van *A* genereren $\mathbb{R}^n$
b) *A* is rijequivalent met de eenheidsmatrix I_n
c) De kolommen van *A* zijn lineair onafhankelijk
d) Het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft enkel de oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
d) De kolommen van *A* vormen een basis van $\mathbb{R}^n$

3. Eliminatie van parameters

Beschouw het vlak α door het punt $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ en met richtingsvectoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Elk punt $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ van α kunnen we bereiken door vanuit de oorsprong eerst naar het punt **a** te gaan, gevolgd door een beweging evenwijdig met **u** en dan evenwijdig met **v**:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x = 6 - 4r + s \\ y = 9 + 12r + 3s \\ z = 1 + 5r + 5s \end{cases} \text{(parametervergelijkingen van het vlak).}$$

Elke keuze van *r* en *s* levert een punt (x, y, z) van het vlak.

Omgekeerd, om na te gaan of een gegeven punt $\mathbf{p}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ uit $\mathbb{R}^3$ gelegen is in het vlak α

gaan we na of het stelsel $\begin{cases} x=6-4r+s \\ y=9+12r+3s \\ z=1+5r+5s \end{cases}$ of $\begin{cases} -4r+s=x-6 \\ 12r+3s=y-9 \\ 5r+5s=z-1 \end{cases}$ een oplossing (r,s) heeft.

Computeralgebra zorgt voor het rijherleiden:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} -4 & 1 & x-6 \\ 12 & 3 & y-9 \\ 5 & 5 & z-1 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{y}{9}-\frac{z}{15}-\frac{14}{15} \\ 0 & 1 & \frac{-(5\cdot y-3\cdot(4\cdot z+11))}{45} \\ 0 & 0 & x+\frac{5\cdot y}{9}-\frac{8\cdot z}{15}-\frac{157}{15} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{comDenom}\left(x+\frac{5\cdot y}{9}-\frac{8\cdot z}{15}-\frac{157}{15}\right) \quad \frac{45\cdot x+25\cdot y-24\cdot z-471}{45}$$

Het stelsel is consistent als en slechts als $45x+25y-24z-471=0$, dit is de cartesiaanse vergelijking van α.

4. De rang van een matrix

Stel $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$. De derde kolom van A is de som van de twee eerste kolommen.

We wijzigen het laatste element van A, bijvoorbeeld $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$.

Zijn de kolommen van *B* nog steeds lineair afhankelijk?

Oplossing:

Op het eerste gezicht verwachten we dat de kolommen van *B* lineair onafhankelijk zijn…

De kolomruimte en de rijruimte van *B* (gegenereerd door respectievelijk de kolomvectoren en rijvectoren van *B*) hebben dezelfde dimensie, dit is de *rang* van B.
Maar de rijen van *B* zijn lineair afhankelijk (de tweede rij is het dubbel van de eerste rij), de rang van *B* is bijgevolg 2 zodat ook de kolommen van *B* lineair afhankelijk zijn!
Bepaal zelf een lineair verband tussen de kolommen van *B*.

5. Vergelijk de oplossingenverzamelingen van de volgende stelsels meetkundig:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{en} \qquad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Oplossing:

Aangezien de twee stelsels $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (*homogeen* stelsel) en $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dezelfde coëfficiëntenmatrix hebben kunnen we de stelsels gelijktijdig oplossen door rijherleiden van de matrix $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voor het homogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ negeren we de laatste kolom, we vinden als oplossing:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \\ x_3 &\text{ is vrij} \end{aligned} \qquad \text{of} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 5x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \quad (\text{met } x_3 \in \mathbb{R}) \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \text{of} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{of} \quad \mathbf{x} = x_3\mathbf{v}$$

dit is een rechte door de oorsprong.

Voor het niet homogene stelsel negeren we de vierde kolom, de oplossing wordt nu:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 5x_3 \\ x_2 &= 1 - 2x_3 \\ x_3 &\text{ is vrij} \end{aligned} \qquad \text{of} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + x_3\mathbf{v}$$

Dit is een rechte evenwijdig met de rechte $\mathbf{x} = x_3\mathbf{v}$, verschoven over de vector **a**.

Algemeen geldt: de *nulruimte* van een $m \times n$ matrix A is de verzameling Nul A van alle vectoren **x** die voldoen aan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Men kan nagaan dat Nul A een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

De algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan men schrijven als $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, waarbij $\mathbf{x}_p$ één concrete (of particuliere) oplossing is van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $\mathbf{x}_h$ de algemene oplossing is van het homogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dit resultaat geldt i.h.a. voor *lineaire problemen* (zoals het oplossen van lineaire recursievergelijkingen en lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten). De algemene oplossing van de niet homogene vergelijking is de som van een particuliere oplossing van die vergelijking en de algemene oplossing van de bijhorende homogene vergelijking.

3. Lineaire transformaties

3.1 Inleiding

Een *transformatie* T van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ is een regel die met elke vector $\mathbf{x}$ uit (een deel van) $\mathbb{R}^n$ precies één vector $T(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^m$ associeert.
De transformatie T is bijgevolg een *functie* van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.

Eenvoudige transformaties zijn *matrixtransformaties* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, met A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$. De matrix A voert een *actie* uit op $\mathbf{x}$; vector $\mathbf{x}$ gaat naar $A\mathbf{x}$.

Een transformatie T van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ is *lineair* als

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ voor elke $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$
ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ voor elke $\mathbf{u}$ in $\mathbb{R}^n$ en c in $\mathbb{R}$

Lineaire transformaties *bewaren* de optelling van vectoren en de scalaire vermenigvuldiging, dit zijn de belangrijkste transformaties in lineaire algebra.

Ga na dat een matrixtransformatie lineair is.

Uit (ii) volgt dat $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(i) en (ii) zijn equivalent met: $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$
Dit is het *superpositieprincipe*: een lineaire combinatie van vectoren wordt afgebeeld op *dezelfde* lineaire combinatie van de beeldvectoren.

De *enige* reële lineaire functies zijn van de vorm $f(x) = kx$ (met k een constante).
De *enige* lineaire transformaties zijn matrixtransformaties: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
(met A een $m \times n$ matrix).

Voorbeeld: Beschouw de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

De lineaire transformatie is volledig bepaald van zodra we de beelden van de

standaardbasis $\left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ van $\mathbb{R}^2$ kennen (merk op dat $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]$)

Stel nu dat Stel $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Voor elke vector $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$

zodat $T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$

we vinden dus $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 \\ x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

of ook $T(x_1, x_2) = (x_1 - 4x_2, x_2, 3x_1 + 2x_2)$

De unieke $m \times n$ matrix A horende bij een lineaire transformatie T van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ wordt bepaald door de beelden van de kolomvectoren van de eenheidsmatrix $I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$; er geldt dat $A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \dots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$, we noemen A de *standaardmatrix* van T.

3.2 Toepassingen

1. Toon aan dat een lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
   a) een rechte afbeeldt op een rechte of op een punt
   b) een lijnstuk afbeeldt op een lijnstuk of op een punt

2. Een *affiene* transformatie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is van de vorm $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, met A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b}$ een vector in $\mathbb{R}^m$. Toon aan dat T geen lineaire transformatie is als $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

   Oplossing:
   als $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ dan is $T(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, bijgevolg is T niet lineair, want een lineaire transformatie beeldt de nulvector af op de nulvector.

3. Is de transformatie T gedefinieerd door $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$ lineair?

   Oplossing:

   kies een vector (x_1, x_2) met $x_2 \neq 0$ en vermenigvuldig de vector met een negatief getal,
   bijvoorbeeld: $T(-2(0,1)) = T(0,-2) = (4,6)$ en $-2T(0,1) = -2(-2,3) = (4,-6)$
   T is niet lineair want $T(-2(0,1)) \neq -2T(0,1)$.

4. Is de transformatie T gedefinieerd door $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$ lineair?

   Oplossing:

   $$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ x_2 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

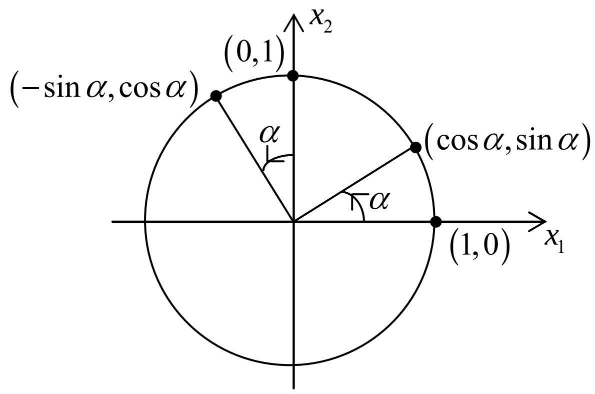
   T is lineair want T is een matrixtransformatie.

5. De transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ roteert elk punt in $\mathbb{R}^2$ rond de oorsprong over de georiënteerde hoek α. Deze transformatie is lineair (je kan dit meetkundig nagaan). Bepaal de standaardmatrix A van deze transformatie.

   Oplossing:

   $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$ en $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ (zie onderstaande figuur)

   Bijgevolg is $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$



6. Zij $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ en $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaire transformaties. Toon aan dat de samenstelling $S \circ T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ ook lineair is.

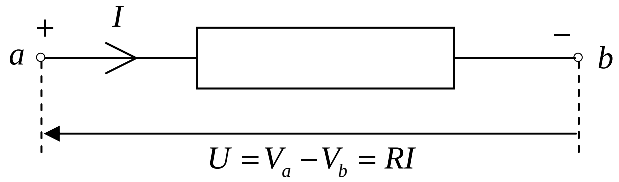
   Oplossing:

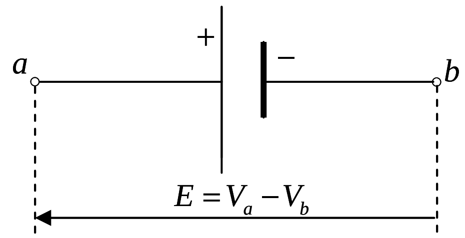
   Kies vectoren **u**, **v** in $\mathbb{R}^n$ en reële getallen c,d . Dan geldt:

   $$\begin{aligned} (S \circ T)(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) &= S(T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v})) \\ &= S(cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})) \\ &= cS(T(\mathbf{u})) + dS(T(\mathbf{v})) \\ &= c(S \circ T)(\mathbf{u}) + d(S \circ T)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

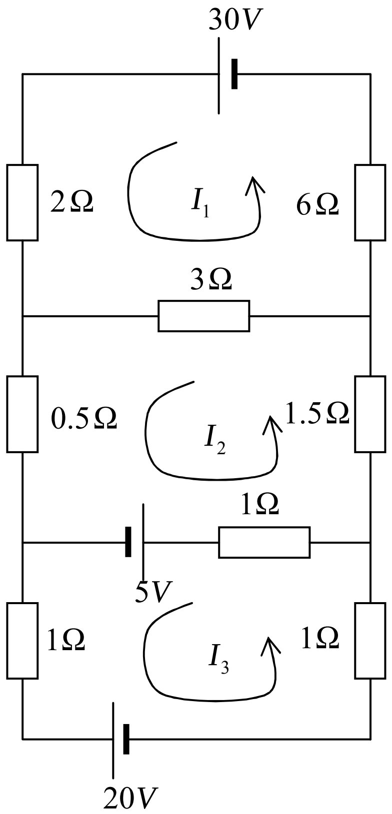
7. Elektrische netwerken

Volgens de wet van Ohm wordt het potentiaalverschil $V_a - V_b$ of de spanning U over een weerstand R gegeven door $U = R \cdot I$, hierbij doorlopen we de weerstand in tegenovergestelde zin van de stroom I (de stroom vloeit van hoge naar lage potentiaal, zie figuur).
U wordt gemeten in Volt (symbool V), R in Ohm (symbool Ω), I in Ampère (symbool A).
Het potentiaalverschil over een batterij is positief als we de batterij doorlopen van de negatieve naar de positieve plaat (zie figuur)





Beschouw nu het volgende netwerk bestaande uit weerstanden en spanningsbronnen (zoals batterijen). Het netwerk bestaat uit drie gesloten lussen (ook kringlopen of mazen genoemd) zonder tussenvertakkingen.



Voor elke lus kiezen we een lusstroom, vervolgens passen we de spanningswet van Kirchhoff toe: de som van de doorlopen potentiaalverschillen in een lus is gelijk aan nul.
Indien we de lussen doorlopen in de zin tegenovergesteld aan de gekozen stroomzin verkrijgen we de volgende vergelijkingen (we starten telkens in de rechterbovenhoek van de lus):

$$6I_1 + 3I_1 - 3I_2 + 2I_1 - 30 = 0$$
$$1.5I_2 + I_2 - I_3 - 5 + 0.5I_2 + 3I_2 - 3I_1 = 0$$
$$I_3 + 20 + I_3 + 5 + I_3 - I_2 = 0$$

of

$$11I_1 - 3I_2 = 30$$
$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$$
$$-I_2 + 3I_3 = -25$$

De matrixvergelijking wordt

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad R\mathbf{i} = \mathbf{v} \quad \text{(matrixversie van de wet van Ohm)}$$

Als oplossing vinden we de lusstromen $I_1 = 3A$, $I_2 = 1A$, $I_3 = -8A$. De negatieve waarde van I_3 betekent dat de eigenlijke stroomzin in de derde lus in tegenovergestelde zin verloopt van de gekozen stroomzin.

De matrixvergelijking $R\mathbf{i} = \mathbf{v}$ laat meteen de lineariteit zien van de transformatie $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{i}$:

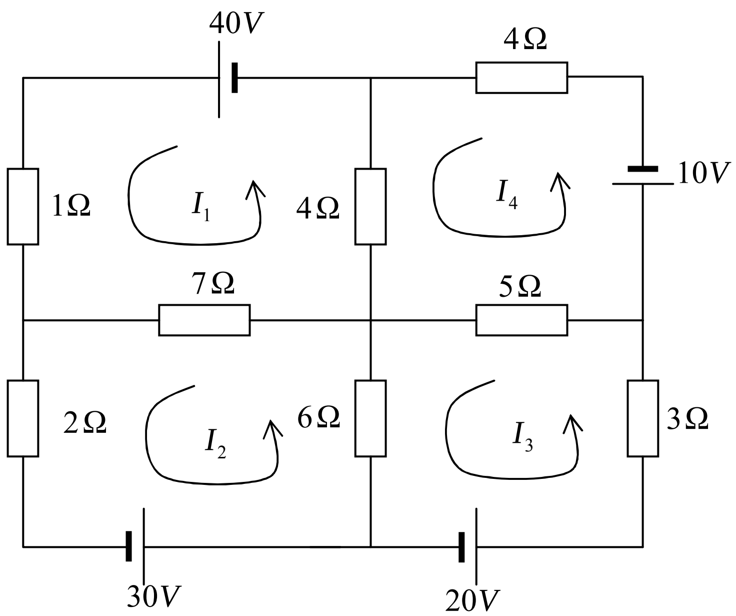
a) Als we bijvoorbeeld de spanningsvector verdubbelen, dan verdubbelt ook de stroomvector.

b) Beschouw de spanningsvectoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}$ (waarbij we telkens 2 van de drie spanningsbronnen vervangen door draden die de lus sluiten) en de resulterende stroomvectoren uit $R\mathbf{i}_1 = \mathbf{v}_1$, $R\mathbf{i}_2 = \mathbf{v}_2$, $R\mathbf{i}_3 = \mathbf{v}_3$.

We vinden dat $R(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ of $R\mathbf{i} = \mathbf{v}$; als we spanningsvectoren optellen, dan vinden we de corresponderende stroomvector als som van de individuele stroomvectoren (superpositieprincipe).

Opgave:

Bepaal de lusstromen voor het volgende netwerk:



Oplossing:

$(I_1, I_2, I_3, I_4) = (11.43, 10.55, 8.04, 5.84)$

4. Matrixalgebra

4.1 Inleiding

Matrices met dezelfde afmetingen tel je op kolom per kolom of element per element. De vermenigvuldiging van een matrix met een getal gebeurt ook kolom per kolom of element per element. De verzameling der $m\times n$ matrices met reële elementen stellen we voor door $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Voor de matrixoptelling en scalaire vermenigvuldiging gelden de volgende rekeneigenschappen:

voor alle $m\times n$ matrices A,B,C en alle scalars c en d geldt (vergelijk met de rekeneigenschappen van vectoren):

1) $A+B\in\mathbb{R}^{m\times n}$	6) $cA\in\mathbb{R}^{m\times n}$
2) $A+B=B+A$	7) $c(A+B)=cA+cB$
3) $(A+B)+C=A+(B+C)$	8) $(c+d)A=cA+dA$
4) $A+0=0+A=A$	9) $c(dA)=(cd)A$
5) $A+(-A)=-A+A=0$	10) $1A=A$

met 0 de *nulmatrix* en $-A=(-1)A$ de *tegengestelde* matrix van *A*.

Als $T:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ en $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineaire transformaties zijn, dan is ook de samenstelling $S\circ T:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ lineair. Lineaire transformaties zijn matrixtransformaties:
$T(\mathbf{x})=B\mathbf{x}$ met *B* een $n\times p$ matrix,
$S(\mathbf{y})=A\mathbf{y}$ met *A* een $m\times n$ matrix, de standaardmatrix van $S\circ T$ noemen we AB:
$(S\circ T)(\mathbf{x})=(AB)\mathbf{x}$ met AB een $m\times p$ matrix.
We bepalen nu de opeenvolgende kolommen van AB:

als $B=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_p\end{bmatrix}$ en $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}$, dan geldt: $T(\mathbf{x})=B\mathbf{x}=x_1\mathbf{b}_1+x_2\mathbf{b}_2+\cdots+x_p\mathbf{b}_p$

en
$$\begin{aligned}(S\circ T)(\mathbf{x})&=S(T(\mathbf{x}))=A(B\mathbf{x})\\ &=A(x_1\mathbf{b}_1+x_2\mathbf{b}_2+\cdots+x_p\mathbf{b}_p)\\ &=A(x_1\mathbf{b}_1)+A(x_2\mathbf{b}_2)+\cdots+A(x_p\mathbf{b}_p)\\ &=x_1A\mathbf{b}_1+x_2A\mathbf{b}_2+\cdots+x_pA\mathbf{b}_p\\ &=\begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \dots & A\mathbf{b}_p\end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

De standaardmatrix van $S\circ T$ is dus $AB=\begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \dots & A\mathbf{b}_p\end{bmatrix}$

Elke kolom van AB is een lineaire combinatie van de kolommen van A, met gewichten uit de corresponderende kolommen van B.

Voorbeeld:

Stel $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, vind een 4×2 matrix *B* met elementen 0 of 1, zodat $AB = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oplossing:

Vind een lineaire combinatie van de kolommen van *A* die de kolommen opleveren van I_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & ? \\ \mathbf{0} & ? \\ \mathbf{0} & ? \\ \mathbf{0} & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Zijn er andere mogelijkheden voor *B* als de elementen 1, -1 of 0 mogen zijn?

De klassieke rij-kolom-regel voor berekening van de individuele elementen van *AB* volgt uit de rij-kolom-regel voor de berekening van $A\mathbf{b}_i$.

Zij *A* een $m \times n$ matrix en *B*, *C* matrices met afmetingen zodat de volgende sommen en producten gedefinieerd zijn, dan geldt:

1) $(AB)C = A(BC)$ (want de samenstelling van transformaties is associatief)
2) $A(B+C) = AB + AC$ (let op de volgorde)
3) $(A+B)C = AC + BC$ (let op de volgorde)
4) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
5) $I_m A = A = AI_n$

Opgelet: matrixalgebra verloopt niet volledig analoog met rekenen in $\mathbb{R}$:

1) Meestal is $AB \neq BA$ (de samenstelling van transformaties is niet commutatief)
2) Uit $AB = AC$ en $A \neq 0$ mag je i.h.a. niet besluiten dat $B = C$
3) Uit $AB = 0$ mag je niet besluiten dat $A = 0$ of $B = 0$

Zij A een $m \times n$ matrix, de *getransponeerde* A^T van A is de $n \times m$ matrix die we verkrijgen door de opeenvolgende rijen van A te schrijven als opeenvolgende kolommen: $\left(A^T\right)_{ij} = \left(A\right)_{ji}$.
De opeenvolgende kolommen van A zijn dan ook de opeenvolgende rijen van A^T.

Er geldt:
1) $\left(A^T\right)^T = A$
2) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$
3) $\left(rA\right)^T = rA^T$
4) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$ (let op de volgorde)

4.2 Toepassingen

1. Zij A een $m \times n$ matrix, toon dan aan:
   a) als $CA = I_n$ (de $n \times n$ eenheidsmatrix) dan kan A niet meer kolommen hebben dan rijen.
   b) als $AD = I_m$ dan kan A niet meer rijen hebben dan kolommen.

Oplossing:

a) Uit $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ volgt $CA\mathbf{x} = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$ zodat $I_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ of $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Het homogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft dus enkel de nuloplossing zodat dit stelsel geen vrije variabelen heeft. Elke variabele is dus een hoofdvariabele; elke kolom van A is een pivotkolom. Pivots treden op in verschillende rijen, dus moet A minstens evenveel rijen hebben als kolommen.
b) Uit $AD = I_m$ volgt $\left(AD\right)^T = I_m{}^T$ of $D^T A^T = I_m$. Uit (a) volgt dat A^T minstens evenveel rijen heeft als kolommen, zodat A minstens evenveel kolommen heeft als rijen.

We kunnen dus besluiten dat een niet vierkante matrix ofwel een linker inverse ofwel een rechter inverse kan hebben, maar nooit beide!

2. Toon aan: als de kolommen van A lineair afhankelijk zijn, dan zijn ook de kolommen van BA lineair afhankelijk.

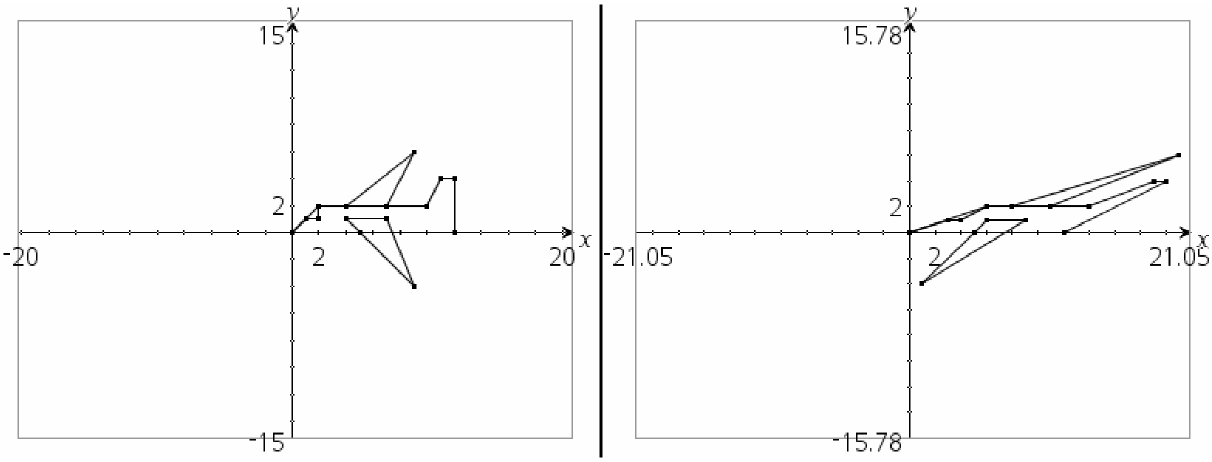
Oplossing:
Aangezien de kolommen van A lineair afhankelijk zijn bestaat er een vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ zodat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dan geldt ook $B\left(A\mathbf{x}\right) = B\mathbf{0}$ of $\left(BA\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; de kolommen van BA zijn dus lineair afhankelijk.

3. Computergraphics

Beschouw een figuur in het vlak $\mathbb{R}^2$, die opgebouwd is uit punten en lijnstukken die deze punten verbinden. We kunnen grafisch het effect van de lineaire transformatie $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ bestuderen, toegepast op deze figuur. Aangezien een lijnstuk dat $\mathbf{p}$ met $\mathbf{q}$ verbindt getransformeerd wordt naar het lijnstuk dat $A\mathbf{p}$ met $A\mathbf{q}$ verbindt volstaat het enkel de punten van de figuur te transformeren en deze te verbinden door lijnstukken.

Als de matrix $fig1 = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{p}_n]$ de punten van de oorspronkelijke figuur bevat, dan bevat $fig2 = A \cdot fig1 = A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \ldots \quad A\mathbf{p}_n]$
de punten van de getransformeerde figuur.

Met TI-Nspire beschouwen we het effect van de *horizontale afschuiving* met standaardmatrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ op een vliegtuigje:



We rangschikken de punten in fig1 zodanig dat de opeenvolgende punten worden verbonden door lijnstukken:

$fig1 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 10 & 11 & 12 & 12 & 5 & 4 & 7 & 9 & 5 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 10 & 11 & 12 & 12 & 5 & 4 & 7 & 9 & 5 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

xfig1:=mat▸list(fig1[1]) $\{0,2,10,11,12,12,5,4,7,9,5,0,1,2,2,4,9,7\}$

yfig1:=mat▸list(fig1[2]) $\{0,2,2,4,4,0,0,1,1,-4,0,0,1,1,2,2,6,2\}$

$a := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$fig2 := a \cdot fig1$ $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 14 & 19 & 20 & 12 & 5 & 6 & 9 & 1 & 5 & 0 & 3 & 4 & 6 & 8 & 21 & 11 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

xfig2:=mat▸list(fig2[1]) $\{0,6,14,19,20,12,5,6,9,1,5,0,3,4,6,8,21,11\}$

yfig2:=mat▸list(fig2[2]) $\{0,2,2,4,4,0,0,1,1,-4,0,0,1,1,2,2,6,2\}$

Men kan aantonen dat $\text{oppervlakte fig2} = |\det A| \cdot (\text{oppervlakte fig1})$,
in bovenstaand voorbeeld blijft de oppervlakte dus ongewijzigd.

Eenvoudige lineaire transformaties zijn:
spiegelingen t.o.v. de oorsprong of t.o.v. een rechte door de oorsprong, projecties op een rechte door de oorsprong, horizontale of verticale uitrekkingen en inkrimpingen, horizontale of verticale afschuivingen, rotaties rond de oorsprong, homothetieën met de oorsprong als centrum.

5. Inverse van een vierkante matrix

5.1 Inleiding

Het symmetrisch element van het getal 7 voor de vermenigvuldiging is 1/7 of 7^{-1}, d.i. het omgekeerde of inverse getal van 7 en er geldt:

$$7 \cdot 7^{-1} = 7^{-1} \cdot 7 = 1$$

Analoog noemen we een $n \times n$ matrix A *inverteerbaar* als er een $n \times n$ matrix B bestaat zodat

$$AB = BA = I$$

we zeggen dan dat B een *inverse* is van A.

A kan maar één inverse hebben want stel dat ook C een inverse is van A, dan geldt dat $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$.

Deze unieke inverse van A noteren we met A^{-1}, zodat

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I .$$

Een vierkante matrix A is inverteerbaar als en slechts als $\det A \neq 0$.

Voorbeeld:

Stel $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en $\det A = ad - bc \neq 0$, dan is $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Een matrix die *niet* inverteerbaar is noemen we een *singuliere* matrix, dergelijke matrices zijn eerder zeldzaam in de praktijk.

Voor inverteerbare $n \times n$ matrices A en B gelden de volgende eigenschappen:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2) $(rA)^{-1} = \dfrac{1}{r}A \quad (r \neq 0)$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (let op de volgorde, vergelijk met de inverse transformatie van de samenstelling van transformaties)

4) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Beschouw de vergelijking $ax = b$ in $\mathbb{R}$ met x als onbekende. De vergelijking heeft een unieke oplossing als $a \neq 0$; links vermenigvuldigen met a^{-1} levert $x = a^{-1}b$.

Zij A een $n \times n$ matrix, dan kan een stelsel met coëfficiëntenmatrix A worden geschreven als de matrixvergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De vergelijking heeft een unieke oplossing als A inverteerbaar is; links vermenigvuldigen met A^{-1} levert $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Hier stopt de analogie: omdat de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ commutatief is wordt de deling $\frac{b}{a} = ba^{-1} = a^{-1}b$ gedefinieerd. Deling van matrices wordt echter niet gedefinieerd; zij A,B,C inverteerbare $n \times n$ matrices dan geldt:

$$\begin{aligned} AXBC = D &\Leftrightarrow XBC = A^{-1}D \\ &\Leftrightarrow XB = A^{-1}DC^{-1} \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}DC^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

De volgorde van de matrices is hier belangrijk, de notatie $X = \dfrac{D}{ABC}$ is zinloos. Omdat de matrixvermenigvuldiging niet commutatief is zouden we desnoods de deling kunnen definiëren als vermenigvuldiging met $(ABC)^{-1}$ langs een bepaalde kant. Dit is echter geen goed idee want zowel $(ABC)^{-1}D$ als $D(ABC)^{-1}$ levert een verkeerd resultaat…

5.2 Elementaire rijoperaties als matrixvermenigvuldigingen

De *kolommen* van AB zijn lineaire combinaties van de kolommen van de *eerste* matrix A, met gewichten uit de corresponderende kolommen van B.

Wat kunnen we zeggen over de rijen van AB?

Welnu, de rijen van AB zijn de kolommen van $(AB)^T$ of $B^T A^T$. Deze kolommen zijn lineaire combinaties van de kolommen van B^T, met gewichten uit de corresponderende kolommen van A^T.

Anders gezegd: de *rijen* van AB zijn lineaire combinaties van de rijen van de *tweede* matrix B, met gewichten uit de corresponderende rijen van A.

Voorbeeld:

> Als B een matrix is met twee rijen en C de matrix met als eerste rij de som van de rijen van B en als tweede rij het dubbel van de eerste rij van B, dan geldt: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} B$.

Indien we een elementaire rijoperatie uitvoeren op een $m \times n$ matrix A, dan levert dit een matrix B waarvan de rijen (eenvoudige) lineaire combinaties zijn van de rijen van A.
De gewichten van die lineaire combinaties komen in de matrix E zodat $B = EA$.

Voorbeeld:

Zij A een matrix met drie rijen.

a) Bij de tweede rij van A drie keer de eerste rij van A optellen levert $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

Inderdaad: (Rij1 van B) = 1.(Rij1 van A) + 0.(Rij2 van A) + 0.(Rij3 van A)
(Rij2 van B) = 3. (Rij1 van A) + 1. (Rij2 van A) + 0.(Rij3 van A)
(Rij1 van B) = 0. (Rij1 van A) + 0. (Rij2 van A) + 1. (Rij3 van A)

b) De tweede en de derde rij van A verwisselen levert $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A$

c) De eerste rij van A vermenigvuldigen met 5 levert $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

Door op A een elementaire rijoperatie uit te voeren verkrijgen we dus de matrix EA, hierbij hangt E enkel af van de gekozen rijoperatie en niet van A. We noemen E een *elementaire matrix*.

Merk op dat we een elementaire matrix eenvoudig verkrijgen door de elementaire operatie uit te voeren op de eenheidsmatrix want $EI = E$.

Elementaire rijoperaties zijn omkeerbaar: bij elke elementaire rijoperatie op een matrix hoort een elementaire rijoperatie (van hetzelfde type) die terug de oorspronkelijke matrix oplevert (ga dit na). Wanneer we die operaties uitvoeren op I, dan verkrijgen we $F\left(EI\right) = I$ en $E\left(FI\right) = I$ zodat $FE = EF = I$. Een elementaire matrix E is dus inverteerbaar, zijn inverse F is een elementaire matrix van hetzelfde type.

5.3 De inverse berekenen van een vierkante matrix

We tonen eerst aan dat een vierkante matrix A inverteerbaar is als en slechts als A rijequivalent is met de eenheidsmatix I, het bewijs levert meteen een methode om A^{-1} te berekenen:

a) Als A inverteerbaar is, dan heeft de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een oplossing $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ voor elke $\mathbf{b}$, bijgevolg heeft A een pivotpositie in elke rij (zie p. 19). Aangezien A vierkant is en pivotposities optreden in verschillende kolommen moeten die pivotposities gelegen zijn op de diagonaal, de gereduceerde echelonvorm van A is dus de eenheidsmatrix I.

b) Omgekeerd, als $A \sim I$ dan kan A worden herleid tot I door een eindig aantal opeenvolgende elementaire rijoperaties. Stel $E_1, E_2, \ldots, E_p$ de corresponderende elementaire matrices, dan geldt dus

$$E_p \ldots E_2 E_1 A = I$$

Een product van inverteerbare matrices is inverteerbaar; uit

$$\left(E_p \ldots E_2E_1\right)A = I$$

volgt $$A = \left(E_p \ldots E_2E_1\right)^{-1} I = \left(E_p \ldots E_2E_1\right)^{-1}$$

Bijgevolg is A inverteerbaar en $\quad A^{-1} = E_p \ldots E_2E_1$

We stellen vast dat naast $E_p \ldots E_2E_1A = I$ ook $E_p \ldots E_2E_1I = A^{-1}$. Dit betekent dat de elementaire rijoperaties die A herleiden tot de eenheidsmatrix, in dezelfde volgorde uitgevoerd maar vertrekkend met de eenheidsmatrix, de inverse van A zullen opleveren.

Zo komen we tot het volgende algoritme om na te gaan of A inverteerbaar is en om A^{-1} te berekenen:
Rijherleid de uitgebreide matrix $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ tot gereduceerde echelonvorm:

a) als A rijequivalent is met I, dan verkrijgen we $\begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$

b) als A niet rijequivalent is met I, dan verkrijgen we $\begin{bmatrix} B & C \end{bmatrix}$ met $B \neq I$ en A is singulier.

Voor een inverteerbare matrix verkrijgen we het schema

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{elementaire rijoperaties}} \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

Deze opeenvolgende operaties kunnen we samenvatten door de volgende *blokvermenigvuldiging*: $A^{-1}\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$

Voorbeeld: Bepaal de inverse van $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{matrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{matrix}$$

Er geldt dus dat $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$. Reken na dat $A \cdot A^{-1} = I$.

5.4 Toepassingen

1. Zij $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -3 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \end{bmatrix}$.

   Bepaal de inverse van A en B, als ze bestaan.

Oplossing: met TI-Nspire vinden we

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{252} & \frac{-1}{36} & \frac{19}{168} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{126} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{84} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{252} & \frac{5}{36} & \frac{-11}{168} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-5}{252} & \frac{-1}{36} & \frac{19}{168} \\ \frac{13}{126} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{84} \\ \frac{25}{252} & \frac{5}{36} & \frac{-11}{168} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{20} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{10} & \frac{-13}{20} \end{bmatrix}$$

We stellen vast dat $B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3]$ singulier is en dat $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$ (waarom?)

2. Om na te gaan dat *B* de inverse is van *A* moeten we controleren dat $AB = I$ en $BA = I$. Als aan één van de twee voorwaarden is voldaan, dan is echter automatisch voldaan aan de andere voorwaarde omwille van de volgende stelling.

   Als A en B $n \times n$ matrices zijn waarvoor $AB = I$, dan is $A = B^{-1}$ en $B = A^{-1}$.

Bewijs:

We tonen eerst aan dat *B* inverteerbaar is:
Als $\mathbf{x}$ voldoet aan $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dan is $AB\mathbf{x} = A\mathbf{0}$ of $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Het stelsel $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft dus enkel de triviale oplossing. Dit stelsel heeft dus geen vrije variabelen; elke kolom van *B* is een pivotkolom. Aangezien *B* vierkant is en de pivots optreden in verschillende rijen moeten die pivots gelegen zijn op de diagonaal van *B*. Bijgevolg is *B* rijequivalent met de eenheidsmatrix en dus inverteerbaar.

Uit $AB = I$ volgt dan $ABB^{-1} = IB^{-1}$ zodat $A = B^{-1}$ en $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$.

3. De *LU-ontbinding* van een matrix.

We herleiden A eerst tot een echelonmatrix U:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\4&11&6&13\\-2&1&5&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\0&3&8&-5\\0&5&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-(5/3)R_2}\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\0&3&8&-5\\0&0&-28/3&28/3\end{bmatrix}=U$$

Elementaire rijoperaties komen neer op vermenigvuldigen met elementaire matrices:
$U=E_3E_2E_1A$ zodat $U=BA$ met $B=E_3E_2E_1$. Elke rij van U is dus een lineaire combinatie van de rijen van A, de gewichten staan in B.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{-5}{3}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\\frac{13}{3}&\frac{-5}{3}&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\\frac{13}{3}&\frac{-5}{3}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\4&11&6&13\\-2&1&5&-8\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\0&3&8&-5\\0&0&\frac{-28}{3}&\frac{28}{3}\end{bmatrix}$$

We lezen bv. af dat 13/3 (Rij1 van A) + (-5/3)(Rij2 van A) + 1 (Rij3 van A) = Rij3 van U
Merk op dat B een *eenheidsbenedendriehoeksmatrix* is (met 1 op de hoofddiagonaal) als product van dergelijke eenheidsbenedendriehoeksmatrices.
De echelonmatrix U is door de eliminatiemethode van Gauss een bovendriehoeksmatrix (d.i. een matrix waarvan de elementen onder de hoofddiagonaalelementen u_{ii} nul zijn).

Aangezien elementaire rijoperaties omkeerbaar zijn moeten de rijen van A ook lineaire combinaties zijn van de rijen van U:

uit $U=BA$ volgt $A=B^{-1}U=LU$, met ook L een eenheidsbenedendriehoeksmatrix.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\\frac{13}{3}&\frac{-5}{3}&1\end{bmatrix}^{-1}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&\frac{5}{3}&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&\frac{5}{3}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\0&3&8&-5\\0&0&\frac{-28}{3}&\frac{28}{3}\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}2&4&-1&9\\4&11&6&13\\-2&1&5&-8\end{bmatrix}$$

We noemen $A=LU$ de *LU-ontbinding* van A

Met TI-Nspire vinden we echter de *LU-ontbinding* van PA, met P een *permutatiematrix* (een matrix met de rijen van I in eender welke volgorde).

LU a,l,u,p	*Done*
l	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{13} & 1 \end{bmatrix}$
u	$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 & 13 \\ 0 & \frac{13}{2} & 8 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-28}{13} & \frac{28}{13} \end{bmatrix}$
p	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Een numeriek algoritme gaat meestal op zoek naar de pivot met grootste absolute waarde en zal hiertoe desnoods rijen verwisselen tijdens het rijherleiden, P is het product van alle elementaire corresponderende rijverwisselingsmatrices. Zonder rijverwisselingen is $P = I$.

We controleren dat $PA = LU$:

$p \cdot a$	$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 & 13 \\ -2 & 1 & 5 & -8 \\ 2 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$
$l \cdot u$	$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 & 13 \\ -2 & 1 & 5 & -8 \\ 2 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

We vatten samen:
Als A een $m \times n$ matrix is die kan worden herleid tot een echelonvorm U, uitsluitend door elementaire operaties die een veelvoud van een rij optellen bij een rij *daaronder*, dan kan A ontbonden worden als $A = LU$, met L een $m \times m$ eenheidsbenedendriehoeksmatrix.

Tenslotte illustreren we hoe de LU-ontbinding van A eenvoudig kan worden gevonden:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 9 \\ \mathbf{4} & 11 & 6 & 13 \\ \mathbf{-2} & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & \boxed{3} & 8 & -5 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - (5/3)R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{-28/3}} & 28/3 \end{bmatrix} = U$$

U is de verkregen echelonvorm van A en L vinden we als volgt:
beschouw de opeenvolgende pivotkolommen waar de eliminatie plaatsvindt en deel de aangeduide elementen door de pivot bovenaan. De resulterende kolommen vormen de onderste helft van L:

$$\underset{:2}{\begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}} \underset{:3}{\begin{bmatrix} \\ \boxed{3} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}} \underset{:-28/3}{\begin{bmatrix} \\ \\ \boxed{\mathbf{-28/3}} \end{bmatrix}} \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Deze constructie van L kunnen we als volgt verklaren:
A wordt herleid tot U door elementaire rijoperaties:

$U = E_3E_2E_1A$ zodat $A = \left(E_3E_2E_1\right)^{-1}U = LU$ met $L = \left(E_3E_2E_1\right)^{-1}$, en dus
$E_3E_2E_1L = \left(E_3E_2E_1\right)\left(E_3E_2E_1\right)^{-1} = I$.

$E_3E_2E_1A = U$ en ook $E_3E_2E_1L = I$,
de *rijoperaties die A herleiden tot U, herleiden dus tevens de matrix L tot I,* dit wordt gewaarborgd door onze constructie van L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5/3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(5/3)R_2} I$$

Opgave:

Vind de LU-ontbinding van $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Je zal vaststellen dat A slechts drie pivotkolommen heeft, zodat de bovenstaande werkwijze slechts de drie eerste kolommen van L oplevert. De overblijvende kolommen van L zijn dan de twee laatste kolommen van I_5.

Oplossing:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Een stelsel oplossen met de LU-ontbinding kan eenvoudig door achtereenvolgens een voorwaartse en een achterwaartse substitutie uit te voeren.

Voorbeeld: $\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 2 \end{aligned}$ of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Met de LU-ontbinding van A wordt het stelsel $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$, we herschrijven dit als $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$.
Bepaal nu eerst $\mathbf{y}$ uit $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ met voorwaartse substitutie,
vervolgens vind je $\mathbf{x}$ uit $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ met achterwaartse substitutie.

We bepalen eerst de LU-ontbinding van A:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3} & -7 & -2 \\ \mathbf{-3} & 5 & 1 \\ \mathbf{6} & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 \\ 0 & \mathbf{10} & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix} = U \quad \text{zodat } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ga na dat $\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Je vindt meteen $\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot 6 = 6$

a) Voorwaartse substitutie van het stelsel $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ of $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

De eerste vergelijking geeft $y_1 = -7$, de tweede vergelijking $-y_1 + y_2 = 5$ levert $y_2 = 5 + y_1 = -2$, met de derde vergelijking vinden we $y_3 = 2 - 2y_1 + 5y_2 = 6$.

b) Achterwaartse substitutie van het stelsel $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ met uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

De laatste vergelijking levert $x_3 = -6$, de tweede vergelijking wordt $-2x_2 = -2 + x_3$ of $-2x_2 = -8$ zodat $x_2 = 4$. Tenslotte volgt uit de eerste vergelijking $3x_1 = -7 + 7x_2 + 2x_3 = 9$ of $x_1 = 3$.

De oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is dus $\mathbf{x} = (3, 4, -6)$.

Deze methode levert tijdwinst op van zodra we later op verschillende tijdstippen ook andere stelsels

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}, \; A\mathbf{x} = \mathbf{d}, \; \ldots\ldots$$

moeten oplossen met *dezelfde* coëfficiëntenmatrix A; de LU-ontbinding moet maar één keer worden berekend en kan worden bewaard.

6. Eigenwaarden en eigenvectoren

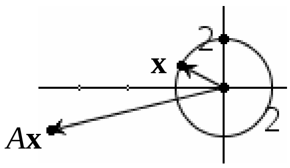
6.1 Inleiding

Zij *A* een vierkante matrix.
Een getal λ is een *eigenwaarde* van *A* als er een vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bestaat waarvoor $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
De vector **x** noemen we een *eigenvector* van *A*, met bijhorende eigenwaarde λ.

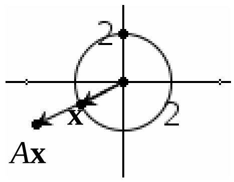
Eigenwaarden en eigenvectoren spelen een belangrijke rol in talrijke toepassingen.

Voorbeeld:

Stel $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. We kunnen meetkundig dynamisch op zoek gaan naar eigenwaarden en eigenvectoren van *A* met de transformatie $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Laat **x** bewegen op een cirkel met de oorsprong als middelpunt en ga na wanneer **x** en $A\mathbf{x}$ op één rechte liggen door de oorsprong.



x is geen eigenvector



x is een eigenvector

Om algebraïsch de eigenwaarden en eigenvectoren te bepalen starten we met de eigenwaarden:

Het getal λ is een eigenwaarde als $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ of $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heeft.
Een homogeen stelsel heeft een niet triviale oplossing als en slechts als de *matrix van het stelsel singulier* is, of als de determinant van die matrix nul is:
het getal λ is dus een eigenwaarde als $\det(A - \lambda I) = 0$, deze veeltermvergelijking in λ noemen we de *karakteristieke vergelijking* van *A*.

a) Bepaal de eigenwaarden van *A* als oplossingen van de vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$.

b) Los voor elke eigenwaarde λ het stelsel $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ op, de oplossingenverzameling is een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ (met *A* een $n \times n$ matrix) en bestaat uit de nulvector en de eigenvectoren met bijhorende eigenwaarde λ. Deze oplossingenverzameling noemen we de *eigenruimte* voor deze eigenwaarde.

Met $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vinden we

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Uit $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ volgen de eigenwaarden $\lambda = 2$ of $\lambda = 1$.

(i) De eigenruimte voor $\lambda = 2$: we lossen $(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ op

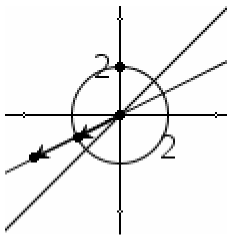
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{zodat} \quad \begin{matrix} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_2 \end{matrix} \quad \text{of} \quad \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (met } x_2 \in \mathbb{R} \text{) ,}$$

d.i. een rechte door de oorsprong

(ii) De eigenruimte voor $\lambda = 1$: we lossen $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ op

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{zodat } \mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (met } x_2 \in \mathbb{R} \text{), tevens}$$

een rechte door de oorsprong



De eigenruimten bij $\lambda = 1$ en $\lambda = 2$

Zij *A* en *B* twee $n \times n$ matrices, dan noemen we *A gelijkvormig* met *B* als er een inverteerbare matrix *P* bestaat zodat $B = P^{-1}AP$ of $A = PBP^{-1}$.
Gelijkvormige matrices hebben dezelfde karakteristieke vergelijking en bijgevolg hebben ze dezelfde eigenwaarden (met dezelfde multipliciteiten).
De eigenwaarden van een diagonaalmatrix of een bovendriehoeksmatrix lezen we af op de hoofddiagonaal.

6.2 Toepassingen

1. Met computeralgebra kunnen we de eigenwaarden voor een 2×2 of een 3×3 matrix bepalen zonder het determinantbegrip, via rijherleiden tot een echelonvorm:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, wanneer heeft $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

$$\text{ref}\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2+3\cdot\lambda-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}\left(-\lambda^2+3\cdot\lambda-2=0,\lambda\right) \qquad \lambda=1 \text{ or } \lambda=2$$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, wanneer heeft $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

De laatste nulkolom van de uitgebreide matrix blijft ongewijzigd en laten we achterwege:

$\text{ref}\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-(\lambda-1)}{2} & 3 \\ 0 & \frac{-\lambda^2}{2}+\frac{5\cdot\lambda}{2}-3 & 3\cdot\lambda-6 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$
$\text{factor}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{-(\lambda-1)}{2} & 3 \\ 0 & \frac{-\lambda^2}{2}+\frac{5\cdot\lambda}{2}-3 & 3\cdot\lambda-6 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-(\lambda-1)}{2} & 3 \\ 0 & \frac{-(\lambda-3)\cdot(\lambda-2)}{2} & 3\cdot(\lambda-2) \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2) \end{bmatrix}$
$\text{ref}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{-(\lambda-1)}{2} & 3 \\ 0 & \frac{-(\lambda-3)}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-(\lambda-1)}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2}-\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}$

A heeft eigenwaarden $\lambda = 2$ (met algebraïsche multipliciteit 2) en $\lambda = 9$

2. De stelling van Cayley-Hamilton

Deze stelling kan als volgt worden "ontdekt":

- kies een 2×2 matrix *A* en bereken zijn karakteristieke veelterm $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- vervang λ in de veelterm $p(\lambda)$ door A (hierbij wordt λ^0 vervangen door $A^0 = I$)
- wat is het resultaat? Probeer ook eens met een 3×3 en een 4×4 matrix.

$a{:=}\text{randMat}(2,2)$	$\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$
$\det(a-\lambda\cdot\text{identity}(2))$	$\lambda^2-8\cdot\lambda+56$
$\lambda^2-8\cdot\lambda+56 \mid \lambda=a$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$a{:=}\text{randMat}(3,3)$	$\begin{bmatrix} -5 & 9 & 6 \\ -6 & 9 & -3 \\ -9 & 4 & -2 \end{bmatrix}$
$\det(a-\lambda\cdot\text{identity}(3))$	$-(\lambda^3-2\cdot\lambda^2+67\cdot\lambda-507)$
$-(\lambda^3-2\cdot\lambda^2+67\cdot\lambda-507) \mid \lambda=a$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

We verkrijgen telkens de nulmatrix en vermoeden dat elke matrix *A* voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking. Dit wordt bevestigd door de stelling van Cayley-Hamilton: als $p(\lambda) = 0$ de karakteristieke vergelijking is van *A*, dan is $p(A) = 0$ (de nulmatrix).

Voor $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ wordt de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 8\lambda + 56 = 0$ (complexe eigenwaarden!) zodat $A^2 - 8A + 56I = 0$ of $A^2 = 8A - 56I$.

Merk op dat $A^3 = A^2 A = (8A - 56I)A = 8A^2 - 56A = 8(8A - 56I) - 56A = 8A - 448I$.

Voor elk natuurlijk getal $k \geq 2$ geldt dat $A^k = \alpha A + \beta I$, waarbij α en β constanten zijn afhankelijk van *k*.

3. De cirkels van Gerschgorin

Zij A een $n \times n$ matrix met elementen in $\mathbb{C}$, dan is elke eigenwaarde van A gelegen binnen (of op) ten minste één van de volgende n cirkels in het *complexe vlak*:
elke rij levert een cirkel met als middelpunt het diagonaalelement en als straal de som van de modulussen van de andere elementen van die rij.

Deze stelling van Gerschgorin is handig om snel een grafisch idee te vormen van de ligging van de eigenwaarden van een matrix:

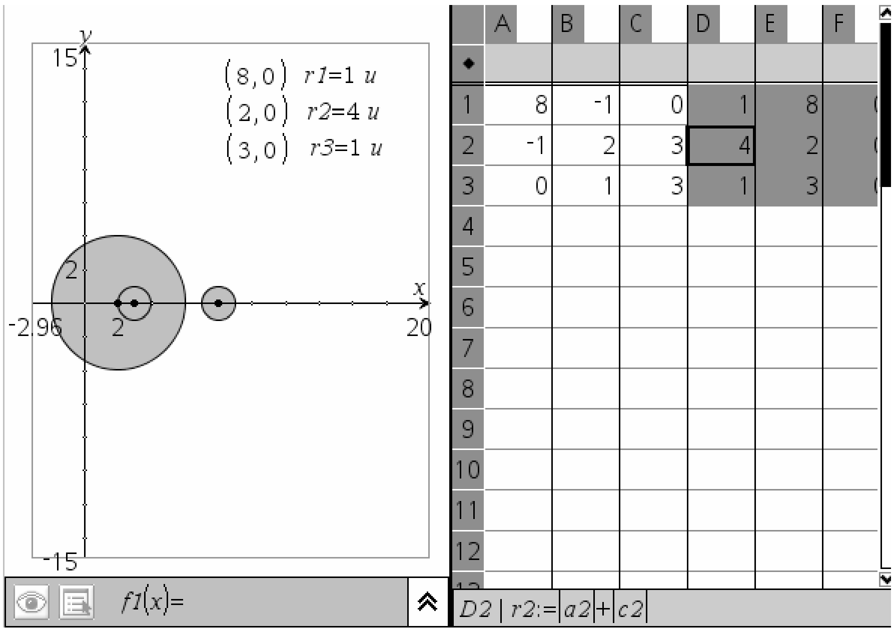
Stel $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. De drie Gerschgorin cirkels zijn

Bij rij 1: middelpunt $8 = 8 + 0i = (8,0)$, straal $|-1| + |0| = 1$

Bij rij 2: middelpunt $2 = 2 + 0i = (2,0)$, straal $|-1| + |3| = 4$

Bij rij 3: middelpunt $3 = 3 + 0i = (3,0)$, straal $|0| + |-1| = 1$

Met dynamische meetkunde worden de cirkels getekend voor een matrix naar keuze, de matrix wordt gedefinieerd in het lijstenscherm:



$a := \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\text{eigVl}(a)$ $\qquad \{8.14856, 2.42572+1.60737 \cdot i, 2.42572-1.60737 \cdot i\}$

De eigenwaarden liggen binnen de unie van de drie schijven. Bovendien vormt de unie van *twee* van die schijven een samenhangend gebied dat disjunct is met de derde schijf, hieruit mogen we concluderen dat er binnen die unie exact *twee* eigenwaarden liggen (rekening houdend met de multipliciteit).

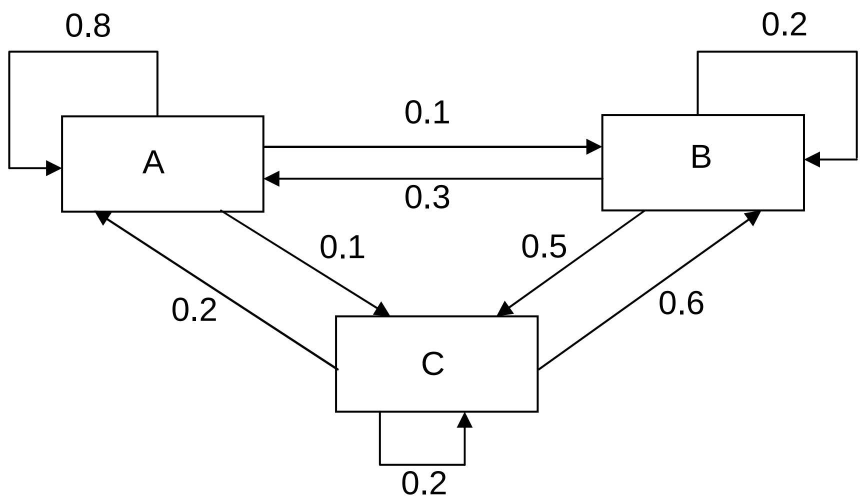
Aangezien A en A^T dezelfde eigenwaarden hebben kunnen we ook drie cirkels bepalen met stralen berekend uit de kolomsommen i.p.v. de rijsommen.
De eigenwaarden liggen dan in de doorsnede van de twee unies van drie schijven.

Toepassingen:

- Als de oorsprong niet gelegen is in de unie van de schijven bepaald door een matrix *A*, dan is 0 geen eigenwaarde van *A*. Dit betekent dat *A* een inverse heeft (waarom?)
- Een stelsel $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ van lineaire eerste orde differentiaalvergelijkingen, met *A* diagonaliseerbaar, is *stabiel* als alle eigenwaarden van *A* een strikt negatief reëel deel hebben. Dit is zeker zo als al de cirkels van Gerschgorin in het halfvlak $x < 0$ gelegen zijn.
- Een groter gebied waarbinnen alle eigenwaarden gelegen zijn wordt gevormd door één cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal bepaald als volgt:
  bereken voor elke rij de som van de modulussen van de elementen, de straal is het maximum van die rijsommen (analoog voor de kolomsommen).

4. Markov ketens en discrete dynamische systemen

De jaarlijkse populatiemigratie tussen drie geografische gebieden A, B en C wordt gegeven door het volgende schema:



Zo verhuist er jaarlijks 10% van de populatie van gebied *A* naar gebied *B*.
Deze overgang wordt beschreven door de volgende *stochastische* matrix, d.i. een matrix met kolomsommen gelijk aan 1:

$$\begin{array}{cc} & \text{van}: \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \quad \text{naar}: \\ P = & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

a) Stel dat de *starttoestandsvector* gegeven wordt door $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ (d.i. een kansvector met positieve elementen waarvan de som 1 is).
Op dat ogenblik woont 40% van de populatie in A, 50% in B en 10% in C.

De Markov keten wordt gevormd door een *rij* van opeenvolgende toestandsvectoren

$\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2, \ldots$ (met $\mathbf{x}_k$ de toestandsvector na k jaar).

Dit *dynamisch systeem* varieert jaar na jaar volgens

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k \quad \text{of} \quad \mathbf{x}_k = P^k\mathbf{x}_0\ ,\ \text{met } k = 0,1,2,\ldots$$

Bereken de opeenvolgende toestandsvectoren en bestudeer hun evolutie op de lange duur.

b) Bepaal een *evenwichtstoestandsvector,* d.i. een kansvector $\mathbf{q}$ waarvoor $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$.

c) Bestudeer de evolutie van P^k , met $k = 0,1,2,\ldots$

Oplossing:

a)

$$p := \begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix}$$

$$x0 := \begin{bmatrix} .4 \\ .5 \\ .1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .4 \\ .5 \\ .1 \end{bmatrix}$$

$$p \cdot x0 \qquad \begin{bmatrix} .49 \\ .2 \\ .31 \end{bmatrix}$$

$$p \cdot \begin{bmatrix} .49 \\ .2 \\ .31 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .514 \\ .275 \\ .211 \end{bmatrix}$$

....

$$p \cdot \begin{bmatrix} .5567783809 \\ .229810466 \\ .2134111531 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .557048 \\ .229687 \\ .213265 \end{bmatrix}$$

$$p \cdot \begin{bmatrix} .55704807514 \\ .22968662315 \\ .21326530171 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} .557198 \\ .229601 \\ .213201 \end{bmatrix}$$

De toestandsvectoren stabiliseren klaarblijkelijk naar $\begin{bmatrix} 0.557 \\ 0.230 \\ 0.213 \end{bmatrix}$.

b) Merk op dat $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$ zeker een oplossing heeft aangezien een stochastische matrix P steeds eigenwaarde 1 heeft (voor P^T is $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ een eigenvector met eigenwaarde 1).

eigVl(p) $\quad \{1.,.547214,-.347214\}$

$$p:=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

rref(p−identity(3)) $\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-34}{13}\\ 0 & 1 & \frac{-14}{13}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Met de cirkels van Gerschgorin kun je concluderen dat alle eigenwaarden een modulus hebben kleiner dan of gelijk aan 1 (werk met de kolomsommen).
De eigenruimte horende bij eigenwaarde 1 wordt gegeven door de vectoren

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}34/13\\14/13\\1\end{bmatrix}$ met $x_3 \in \mathbb{R}$. Met $x_3 = 13$ vinden we de eigenvector $\begin{bmatrix}34\\14\\13\end{bmatrix}$, delen door $34+14+13=61$ levert de enige kansevenwichtsvector $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}34/61\\14/61\\13/61\end{bmatrix}$ met $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$.

$$p\cdot\begin{bmatrix}\frac{34}{61}\\ \frac{14}{61}\\ \frac{13}{61}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\frac{34}{61}\\ \frac{14}{61}\\ \frac{13}{61}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{34}{61}\\ \frac{14}{61}\\ \frac{13}{61}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}.557377\\ .229508\\ .213115\end{bmatrix}$$

We stellen vast dat de rij toestandsvectoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$ convergeert naar $\mathbf{q}$, *onafhankelijk van de gekozen startvector* $\mathbf{x}_0$ (probeer eens met een andere startvector).

Waarom is dat zo?

Kies een basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ van $\mathbb{R}^3$, bestaande uit eigenvectoren van *P* die horen bij de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.55$, $\lambda_3 = -0.35$. We stellen alvast $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 34 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}$.

De vector $\mathbf{x}_0$ kan op een unieke manier geschreven worden als lineaire combinatie van de basisvectoren: $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$

Nu is $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0 = c_1P\mathbf{v}_1 + c_2P\mathbf{v}_2 + c_3P\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2 0.55\mathbf{v}_2 + c_3(-0.35)\mathbf{v}_3$

en $\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = c_1P\mathbf{v}_1 + c_2 0.55P\mathbf{v}_2 + c_3(-0.35)P\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(0.55\right)^2\mathbf{v}_2 + c_3\left(-0.35\right)^2\mathbf{v}_3$

algemeen vinden we: $\mathbf{x}_k = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(0.55\right)^k\mathbf{v}_2 + c_3\left(-0.35\right)^k\mathbf{v}_3 \quad (k \geq 0)$

Hieruit volgt dat $\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = c_1\mathbf{v}_1$

De limietvector is bijgevolg een vector uit de eigenruimte der vectoren met eigenwaarde 1.

Omdat elke $\mathbf{x}_k$ een kansvector is met kolomsom 1, is de limietvector ook een kansvector.

$c_1\mathbf{v}_1 = c_1\begin{bmatrix} 34 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}$ met $34c_1 + 14c_1 + 13c_1 = 1$, waaruit $c_1 = 1/61$ zodat $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 34/61 \\ 14/61 \\ 13/61 \end{bmatrix}$.

Dit is zo voor elke startvector $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, merk op dat de eerste term $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}$ steeds dezelfde is voor elke startvector!

c) We observeren opeenvolgende machten van de overgangsmatrix *P*:

p	$\begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix}$
p^2	$\begin{bmatrix} .69 & .4 & .38 \\ .16 & .37 & .26 \\ .15 & .23 & .36 \end{bmatrix}$
p^{10}	$\begin{bmatrix} .558444 & .556162 & .555896 \\ .228945 & .230162 & .230277 \\ .212611 & .213676 & .213828 \end{bmatrix}$
p^{20}	$\begin{bmatrix} .55738 & .557374 & .557373 \\ .229507 & .22951 & .22951 \\ .213114 & .213116 & .213116 \end{bmatrix}$

We vermoeden dat $\lim_{k\to\infty} P^k = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{q} & \mathbf{q} \end{bmatrix}$

Waarom is dat zo?

Merk op dat $P^k = P^k \cdot I = P^k \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} P^k\mathbf{e}_1 & P^k\mathbf{e}_2 & P^k\mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$

Nu geldt $\lim\limits_{k\to\infty} P^k = \begin{bmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} P^k\mathbf{e}_1 & \lim\limits_{k\to\infty} P^k\mathbf{e}_2 & \lim\limits_{k\to\infty} P^k\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{q} & \mathbf{q} \end{bmatrix}$

aangezien $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ kansvectoren zijn.

Stelling:
Als P een *reguliere* $n \times n$ stochastische matrix is (d.w.z. dat er een k bestaat waarvoor P^k uitsluitend strikt positieve elementen bevat), dan heeft P een unieke evenwichtsvector $\mathbf{q}$, waarvoor $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$.
Als $\mathbf{x}_0$ eender welke starttoestand is en $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ met $k = 0,1,2,\dots$, dan convergeert de Markov keten $\{\mathbf{x}_k\}$ naar $\mathbf{q}$ en P^k naar $\begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{q} & \dots & \mathbf{q} \end{bmatrix}$ als $k \to \infty$.

Opgave:

Gegeven het volgende prooi-roofdier model :

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= 0.5r_k + 0.4p_k \\ p_{k+1} &= -0.104r_k + 1.1p_k \end{aligned} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} r_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ p_k \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

Hierin is r_k het aantal roofdieren en p_k het aantal prooien na k maanden.

De eigenwaarden en eigenvectoren van A verklaren de evolutie van het discrete dynamische systeem. Ga na dat A de eigenwaarden $\lambda_1 = 1.02$ en $\lambda_2 = 0.58$ heeft met corresponderende eigenvectoren $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Een willekeurige startvector kan worden geschreven als $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, zodat

$$\mathbf{x}_k = c_1 (1.02)^k \mathbf{v}_1 + c_2 (0.58)^k \mathbf{v}_2 ,$$

dit is de *algemene oplossing* van de recursievergelijking $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, de algemene oplossing vinden we met de eigenwaarden en eigenvectoren van A!

Kies nu een startvector met $c_1 > 0$, voor grote k geldt dan:

$$\mathbf{x}_k \simeq c_1 (1.02)^k \mathbf{v}_1 \quad \text{waaruit} \quad \mathbf{x}_{k+1} \simeq 1.02\mathbf{x}_k \quad (\text{voor } k \text{ groot})$$

Uit de twee laatste uitdrukkingen kunnen we besluiten dat voor grote k:
a) de verhouding p_k / r_k ongeveer 13/10 is
b) zowel het aantal roofdieren als prooien maandelijks ongeveer met 2% toeneemt.

5. Diagonalisatie van een vierkante matrix

Een vierkante matrix A is *diagonaliseerbaar* als hij gelijkvormig is met een diagonaalmatrix D, d.w.z. dat er een inverteerbare matrix P bestaat waarvoor $A = PDP^{-1}$.

Deze matrixontbinding levert veel informatie over A:
de kolommen van P zijn lineair onafhankelijke eigenvectoren van A en de diagonaalmatrix D bevat de opeenvolgende corresponderende eigenwaarden op de hoofddiagonaal.

Een $n \times n$ matrix is diagonaliseerbaar als en slechts als de matrix n lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft.

Diagonalisatie speelt o.a. een rol bij

- Het diagonaliseren van een kwadratische vorm.
- Lineaire discrete en lineaire continue dynamische systemen (stelsels van lineaire differentievergelijkingen of lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde).
- Het berekenen van matrixfuncties.

Als voorbeeld van een matrixfunctie berekenen we $\sqrt[3]{A}$ met $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Er geldt dat $A = PDP^{-1}$ met $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

We definiëren $\sqrt[3]{A} = P \begin{bmatrix} \sqrt[3]{5} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{3} \end{bmatrix} P^{-1}$.

Men rekent vlug na dat deze matrix de gewenste eigenschap $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = A$ heeft.

$a := \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
$p := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
$p \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot p^{-1}$	$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
$p \cdot \begin{bmatrix} 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 3^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot p^{-1}$	$\begin{bmatrix} 1.9777 & .267726 \\ -.535453 & 1.17452 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1.977702323046 & .2677263763693 \\ -.5354527527386 & 1.1745231939381 \end{bmatrix}^3$	$\begin{bmatrix} 7. & 2. \\ -4. & 1. \end{bmatrix}$

Is dit echter een goede definitie, onafhankelijk van de gekozen eigenvectoren in P?

$p:=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
$p\cdot\begin{bmatrix} 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 3^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}\cdot p^{-1}$	$\begin{bmatrix} 2\cdot 5^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}} & 5^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}} \\ 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}-2\cdot 5^{\frac{1}{3}} & 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$
$p:=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}$
$p\cdot\begin{bmatrix} 3^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 5^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}\cdot p^{-1}$	$\begin{bmatrix} 2\cdot 5^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}} & 5^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}} \\ 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}-2\cdot 5^{\frac{1}{3}} & 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$

Klaarblijkelijk vinden we dezelfde matrix voor $\sqrt[3]{A}$ bij een andere keuze van *P*.

Stelling:

Zij $A = PDP^{-1}$ een diagonaliseerbare matrix waarbij de gelijke eigenwaarden in $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \ldots, \lambda_k I)$ gegroepeerd zijn. Voor een functie $f(z)$ die gedefinieerd is in elke eigenwaarde λ_i definiëren we de matrixfunctie

$$f(A) = P\cdot f(D)\cdot P^{-1} = P\begin{pmatrix} f(\lambda_1)I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)I & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & f(\lambda_k)I \end{pmatrix}P^{-1}$$

Deze definitie is onafhankelijk van de gekozen diagonalisatie van *A*.

Opgave:

Bewijs dat $\sin^2(A)+\cos^2(A) = I$ en controleer dit met $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

$a:=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
$\sin(a)$	$\begin{bmatrix} -2.05897 & -1.10004 \\ 2.20009 & 1.24116 \end{bmatrix}$
$\cos(a)$	$\begin{bmatrix} 1.55732 & 1.27365 \\ -2.54731 & -2.26365 \end{bmatrix}$
$(\sin(a))^2+(\cos(a))^2$	$\begin{bmatrix} 1. & 0. \\ -2.\mathrm{E}{-13} & 1. \end{bmatrix}$

6. Eigenwaarden onderzoeken met computeralgebra

Opdracht 1:
Genereer twee 3×3 matrices *A* en *B* waarvan de elementen gehele getallen zijn tussen -9 and 9. Bepaal de eigenwaarden van *A* en *B*.
Bepaal ook de eigenwaarden van de volgende matrices en ga op ontdekkingstocht.

a) A^T
b) $A+B$.
c) AB .
d) $5A$ en $3B$.
e) AB en BA . Wat als *A* een 3×4 matrix is en *B* een 4×3 matrix?

a:=randMat(3,3):eigVl(a)	{11.8,4.25,-9.09}
a	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & -7 & 2 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$
b:randMat(3,3):eigVl(b)	{-15.1,-2.75,2.88}
b	$\begin{bmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & -9 \end{bmatrix}$
eigVl($a\cdot b$)	{-8.16,-37.4+73.·$\boldsymbol{i}$,-37.4−73.·$\boldsymbol{i}$}
eigVl($b\cdot a$)	{-37.4+73.·$\boldsymbol{i}$,-37.4−73.·$\boldsymbol{i}$,-8.16}

Opdracht 2:
Construeer een 3×3 matrix *A* (geen diagonaalmatrix of driehoeksmatrix) met gehele elementen en eigenwaarden 1, 1 en 2.

Oplossing:

Het volstaat een matrix *P* te construeren met gehele elementen en $\det(P)=1$,
dan heeft $A = P\cdot \operatorname{diag}(1,1,2)\cdot P^{-1}$ de gewenste eigenschap.
Kies bijvoorbeeld $P = L\cdot L^T$ met L een eenheidsbenedendriehoeksmatrix.

diag([1 1 2])	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$l:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
$p:=l\cdot l^T$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \\ 3 & -7 & 11 \end{bmatrix}$
$a:=p\cdot$diag([1 1 2])$\cdot p^{-1}$	$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & -7 \\ -11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$
eigVl(a)	{1.,2.,1.}

7. Een stelsel van differentiaalvergelijkingen

Beschouw de lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde $y' = 5y$.
We zoeken een oplossing van de vorm $y = e^{kt}$ (met de tijd t als variabele)
er moet gelden dat $y' = 5y$ of $ke^{kt} = 5e^{kt}$ zodat $k = 5$.
Een oplossing is dus alvast $y = e^{5t}$.
Elke oplossing van $y' = 5y$ is van de vorm $y = ce^{5t}$ (met $c \in \mathbb{R}$).

Beschouw nu het volgende stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde:

$$\begin{array}{l} u_1' = 7u_1 - 4u_2 \\ u_2' = 5u_1 - 2u_2 \end{array} \quad \text{of} \quad \mathbf{u}' = A\mathbf{u} \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Omdat $y' = \lambda y$ oplossingen heeft van de vorm $y = ce^{\lambda t}$ zoeken we nu voor het stelsel ook een oplossing van de vorm

$$u_1 = \alpha_1 e^{\lambda t} \quad \text{en} \quad u_2 = \alpha_2 e^{\lambda t} \quad \text{of} \quad \mathbf{u} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

Afleiden en invullen in het stelsel levert

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} = 7\alpha_1 e^{\lambda t} - 4\alpha_2 e^{\lambda t} \\ \alpha_2 \lambda e^{\lambda t} = 5\alpha_1 e^{\lambda t} - 2\alpha_2 e^{\lambda t} \end{array} \quad \text{waaruit} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 \lambda = 7\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ \alpha_2 \lambda = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{array}$$

$$\text{of} \quad \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

We zijn vooral geïnteresseerd in een niet triviale vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dan zoeken we dus een eigenvector en bijhorende eigenwaarde van A !

Ga na dat A de eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 3$ heeft met bijhorende eigenvectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit levert de volgende twee oplossingen van het stelsel $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{u}_2 = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

Elke oplossing van het stelsel $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ is een lineaire combinatie van $\mathbf{u}_1$ en $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \quad \text{of} \quad \mathbf{u} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

Klaarblijkelijk bepalen de eigenwaarden en eigenvectoren van A alweer de algemene oplossing!

We herschrijven de oplossing als volgt:

$$\mathbf{u} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} c_3 \\ c_4\end{bmatrix}$$
$$= e^{At}\mathbf{c}$$

met $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} c_3 \\ c_4\end{bmatrix}$ of $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$

Samenvattend stellen we de volgende analogie vast:

a) “continu”: één homogene lineaire differentiaalvergelijking $y' = ay$ van eerste orde versus een stelsel van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ van eerste orde

b) discreet: één homogene lineaire recursievergelijking (of differentievergelijking) $y_{k+1} = ay_k$ van eerste orde versus een stelsel van homogene lineaire recursievergelijkingen $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ van eerste orde.

We beschouwen hier een 2×2 matrix A met eigenwaarden $\lambda_1 \neq \lambda_2$ en bijhorende eigenvectoren $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$, het resultaat is echter veralgemeenbaar voor een $n\times n$ matrix A die diagonaliseerbaar is.

a) De algemene oplossing van $y' = ay$ is $y = ce^{at}$ met $c \in \mathbb{R}$.

De algemene oplossing van $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ is $\mathbf{u} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$ of $\mathbf{u} = e^{At}\mathbf{c}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

b) De algemene oplossing van $y_{k+1} = ay_k$ is $y_k = ca^k$ met $k \geq 0$ en $c \in \mathbb{R}$.
De algemene oplossing van $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ is $\mathbf{x}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2$ of $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{c}$ met $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

7. Orthogonaliteit, overgedetermineerde stelsels en de kleinste kwadraten methode

7.1 Inleiding

Het *scalair product* van twee vectoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ wordt gedefinieerd door

$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ en vaak genoteerd met $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ (“dot product”).

De veralgemening voor het scalair product van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ ligt voor de hand:
het scalair product van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ is de som van de producten van hun corresponderende componenten.

Twee vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^n$ staan *loodrecht op elkaar* als en slechts als $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.
De *norm of lengte* $\|\mathbf{u}\|$ van een vector **u** in $\mathbb{R}^n$ wordt gedefinieerd door $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$.
De *afstand* tussen vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^n$ wordt gedefinieerd door $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

7.2 Toepassingen

1. De QR-ontbinding

Orthogonale basissen van een vectorruimte vereenvoudigen het rekenwerk, zij spelen een belangrijke rol in de numerieke wiskunde, o.a. bij de “*QR*-ontbinding”. Hierbij wordt een $m \times n$ matrix *A* met lineair onafhankelijke kolommen geschreven als $A = QR$, met *Q* een $m \times n$ matrix waarvan de kolommen een orthonormale basis vormen (basisvectoren twee aan twee loodrecht op elkaar en met lengte 1) van de kolomruimte van *A*, en *R* een $n \times n$ inverteerbare bovendriehoeksmatrix met strikt positieve getallen op de hoofddiagonaal:

$a := \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

QR a,q,r *Done*

$q \qquad \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

$r \qquad \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$q^T \cdot q \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$q \cdot r \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

2. Eigenwaarden bepalen met de QR-methode

In de numerieke wiskunde worden eigenwaarden *niet* berekend als nulpunten van de karakteristieke veelterm.

Een mogelijke werkwijze is het QR-algoritme. Dit algoritme levert, onder bepaalde voorwaarden, een rij van matrices die allemaal gelijkvormig zijn met A en die meer en meer naar bovendriehoeksmatrices evolueren, zodat de elementen op de hoofddiagonaal de eigenwaarden van A benaderen.

Het basisprincipe is als volgt:
de QR-onbinding van A levert $A = Q_1R_1$ met $Q_1^TQ_1 = I$ (waarom?) of $Q_1^T = Q_1^{-1}$.
Verwissel de factoren en bereken $A_1 = R_1Q_1$.
Aangezien Q_1 inverteerbaar is zal A gelijkvormig zijn met A_1 (waarom?)
Opnieuw ontbinden we $A_1 = Q_2R_2$ om vervolgens $A_2 = R_2Q_2$ te berekenen enz.

We illustreren deze werkwijze met $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & -7 \\ -11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$a := \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & -7 \\ -11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & -7 \\ -11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

QR a,q,r: $a := r \cdot q$: $\qquad \begin{bmatrix} 3.02299 & -.56281 & 23.0143 \\ -.117679 & 1.03274 & -1.33876 \\ -.0928 & .025818 & -.055728 \end{bmatrix}$

QR a,q,r: $a := r \cdot q$: $\qquad \begin{bmatrix} 2.34003 & -.317048 & 23.1254 \\ -.02585 & 1.00612 & -.446101 \\ -.020058 & .004746 & .653859 \end{bmatrix}$

QR a,q,r: $a := r \cdot q$: $\qquad \begin{bmatrix} 2.14548 & -.25768 & 23.1422 \\ -.009454 & 1.00213 & -.191005 \\ -.007306 & .001643 & .852398 \end{bmatrix}$

QR a,q,r: $a := r \cdot q$: $\qquad \begin{bmatrix} 2.06783 & -.235275 & 23.1472 \\ -.00411 & 1.00091 & -.089093 \\ -.003171 & .000699 & .93126 \end{bmatrix}$

We stellen vast dat de diagonaalelementen convergeren naar de eigenwaarden 2, 1 en 1 van A.

3. Overgedetermineerde stelsels en de kleinste kwadraten methode

Orthogonale projecties zijn de sleutel tot het “oplossen” van overgedetermineerde stelsels.
In de praktijk komen er vaak stelsels voor van lineaire vergelijkingen, met meer vergelijkingen dan onbekenden, die geen oplossingen hebben.

Hoe vinden we bijvoorbeeld de "beste" rechte $y = ax + b$ "door" de punten $(1,1),(2,2),(3,2)$?

We wensen dat $y_i = ax_i + b \ \ (i = 1,2,3)$ maar dit stelsel

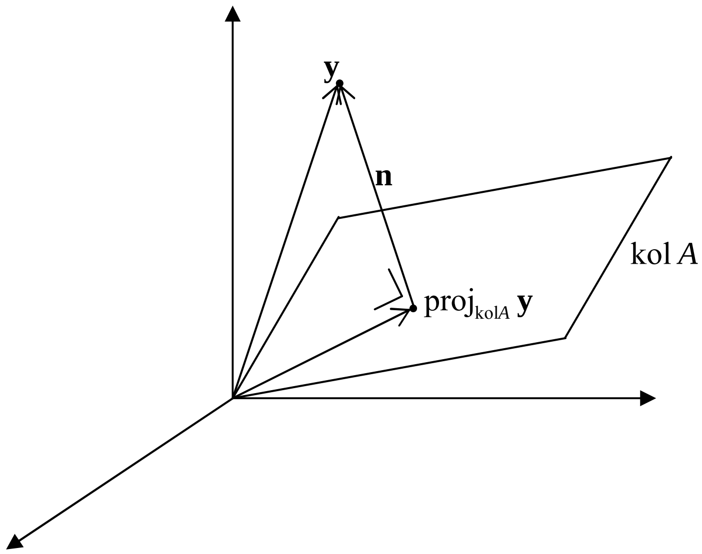
$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2 \\ 3a+b=2 \end{cases} \quad \text{of} \quad a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \quad \text{of} \quad A\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

heeft geen oplossing **x**.

Een "beste oplossing" $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ is een vector zodat $A\hat{\mathbf{x}}$ zo dicht als mogelijk gelegen is bij $\mathbf{y}$, in de zin dat $\|A\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{y}\| \le \|A\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

We noemen $\hat{\mathbf{x}}$ een kleinste kwadraten oplossing, de bijhorende kleinste kwadraten rechte minimaliseert de som van de kwadraten van de verticale afwijkingen van de gegeven punten t.o.v. de rechte.

De vector $A\hat{\mathbf{x}}$ behoort tot de kolomruimte van *A* (notatie kol A), d.i. hier een vlak door de oorsprong.



De vector die in kol *A* het dichtst gelegen is bij $\mathbf{y}$ is de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op kol *A*, dit is de unieke vector $\text{proj}_{\text{kol}A}\,\mathbf{y}$ met de eigenschap dat $\mathbf{y} = \text{proj}_{\text{kol}A}\,\mathbf{y} + \mathbf{n}$ met $\mathbf{n} \perp \text{kol}\,A$ (zie figuur).

Er bestaat zeker een vector $\hat{\mathbf{x}}$ met $A\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{kol}A}\,\mathbf{y}$ want als **x** de verzameling $\mathbb{R}^2$ doorloopt dan doorloopt $A\mathbf{x}$ de volledige kolomruimte van *A*.

Er moet dus gelden dat $\mathbf{y} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n}$ met $\mathbf{n} \perp \text{kol}\,A$ of $\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}} \perp \text{kol}\,A$.

De kolommen van *A* genereren kol A . De vector $\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}$ staat bijgevolg loodrecht op kol *A* als en slechts als $\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}$ loodrecht staat op de twee kolomvectoren van $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$.

Dit betekent dat $\mathbf{a}_1^T\left(\mathbf{y}-A\hat{\mathbf{x}}\right)=0$ en $\mathbf{a}_2^T\left(\mathbf{y}-A\hat{\mathbf{x}}\right)=0$ of $A^T\left(\mathbf{y}-A\hat{\mathbf{x}}\right)=\mathbf{0}$.
Er geldt bijgevolg dat $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{y}$.

Een beste oplossing $\hat{\mathbf{x}}$ van $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ vinden we dus door het *stelsel van normaalvergelijkingen* $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{y}$ op te lossen.

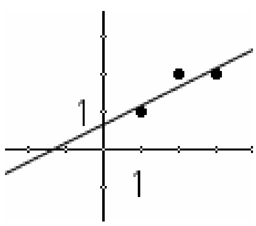
De matrix A^TA heeft een inverse als en slechts als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn (zoals in ons voorbeeld), in dat geval vinden we een unieke vector $\hat{\mathbf{x}}=\left(A^TA\right)^{-1}A^T\mathbf{y}$.

Als de kolommen van A lineair afhankelijk zijn, dan heeft $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{y}$ oneindig veel oplossingen $\hat{\mathbf{x}}$ waarvoor $A\hat{\mathbf{x}}=\text{proj}_{\text{kol}A}\,\mathbf{y}$.

Samenvattend: de beste "oplossing" $\hat{\mathbf{x}}$ voor een overgedetermineerd stelsel $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ vind je door het stelsel $A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{y}$ op te lossen.

Concreet vinden we voor ons voorbeeld $\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\2/3\end{bmatrix}$ en beste rechte $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}$:

$xi:=\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$yi:=\{1,2,2\}$	$\{1,2,2\}$
$a:=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}$
$a:=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}:y:=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$
$(a^T\cdot a)^{-1}\cdot a^T\cdot y$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$
LinRegMx *xi*,*yi*,1: CopyVar *stat.RegEqn*,*f1*: *stat.results*	$\begin{bmatrix}\text{"Title"}&\text{"Linear Regression (mx+b)"}\\\text{"RegEqn"}&\text{"m*x+b"}\\\text{"m"}&.5\\\text{"b"}&.666667\\\text{"r}^2\text{"}&.75\\\text{"r"}&.866025\\\text{"Resid"}&\text{"\{...\}"}\end{bmatrix}$



lineaire regressie door 3 punten

Opgaven:

bovenstaande werkwijze ("curve fitting") kan men toepassen om krommen van de vorm $y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_k f_k(x)$ te zoeken "door" een aantal gegeven punten, let op de *lineaire uitdrukking in de te zoeken coëfficiënten* $a_1, a_2, \ldots a_k$.

i. (a) De beste parabool $y = a + bx + cx^2$ "door" de punten (1,4), (-2,5), (3,-1), (4,1) is

$y = 3.75 - 0.81x - 0.038x^2$.

(b) De beste kromme $y = ax + bx^3$ "door" dezelfde punten is $y = -1.16x + 0.084x^3$.

ii. Men wil experimenteel de versnelling a bepalen van een massa die men laat vallen vanuit stilstand (op positie $s = 0$). Daartoe worden op voorhand drie (exact veronderstelde) posities $s_1 = 0.64\,\text{m}$, $s_2 = 1.00\,\text{m}$, $s_3 = 1.96\,\text{m}$ vastgelegd waar men de tijden t_1, t_2, t_3 zal opmeten (op 0.02 s nauwkeurig) op het ogenblik dat de massa passeert. De verkregen valtijden (gemiddelden van 5 experimenten) zijn $t_1 = 0.36\,\text{s}, t_2 = 0.46\,\text{s}, t_3 = 0.64\,\text{s}$.

Ga uit van het ideale model $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (geldig in het luchtledige) om de "beste" versnelling a te bepalen.

Tip: aangezien de posities exact gekend zijn schrijf je eerst de modelfunctie in de vorm $t = f(s)$.

(Oplossing: $a = 9.59\ \text{ms}^{-2}$).

iii. Er worden 5 punten gemeten in de ruimte (cartesiaanse coördinaten, veronderstel alleen meetfouten op de z-coördinaten) :
(1 , 2 , 0.2) , (2 , 3 , 1.1) , (3 , 5 , 4.9) , (4 , 7 , 8.8) , (5 , 6 , 4.5) .
Bepaal de vergelijking van het beste vlak "door" die punten.
(Oplossing: $z = -1.60x + 2.69y - 3.68$)

Bronnen

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley & Sons, 1991.

2. A. Bultheel, *Inleiding tot de numerieke wiskunde*, Acco, 2006.

3. R.L. Burden, J.D. Faires, *Numerical Analysis, seventh edition*, Brooks/Cole, 2001.

4. S.I. Grossman, *Elementary Linear Algebra, fourth edition*, Saunders College Publishing, 1991.

5. G. James, *Advanced Modern Engineering mathematics, third edition*, Pearson Education, 2004.

6. D.C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications, third edition update*, Pearson Education, 2006. http://www.laylinalgebra.com

7. C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Siam, 2000.

8. G. Strang, *Introduction to linear algebra, third edition*, Wellesley-Cambridge Press, 2003.

Dit cahier gaat over lineaire algebra en toepassingen.

De aanpak is vernieuwend in de opbouw van de matrixalgebra:

- Eerst wordt er gewerkt met vectoren (kolommatrices) en hun meetkundige voorstelling in $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$, men rekent meteen in een vectorruimte. Lineaire combinaties van vectoren vormen een belangrijke bouwsteen en kunnen meetkundig worden voorgesteld.
- Vervolgens wordt het product van een matrix met een vector gedefinieerd als een lineaire combinatie van de kolommen van de matrix. Dit geeft een nieuwe kijk op stelsels van lineaire vergelijkingen.
- Het product van een matrix A met een matrix B wordt tenslotte kolom per kolom gedefinieerd: elke kolom van AB is een lineaire combinatie van de kolommen van A.
  De aandacht gaat dus meer naar de kolommen van matrices i.p.v. de individuele elementen.

Talrijke toepassingen komen aan bod, o.a. stelsels van lineaire vergelijkingen, lineaire transformaties, de LU-ontbinding en QR-ontbinding van een matrix, eigenwaarden en eigenvectoren, dynamische systemen, overgedetermineerde stelsels en de kleinste kwadraten methode, …

Voor het zwaardere rekenwerk, computeralgebra, dynamische meetkunde en grafieken zorgt de software versie van TI-Nspire CAS.

GUIDO HERWEYERS doceert wiskunde en statistiek aan het Departement Industriële Wetenschappen en Technologie van de Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende en is wetenschappelijk medewerker aan de K.U.Leuven.

Texas Instruments