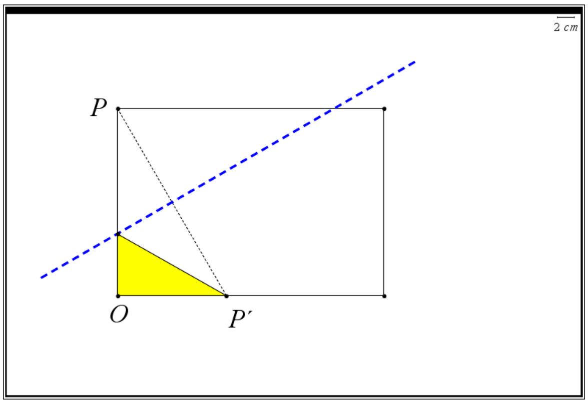
Vika en A4

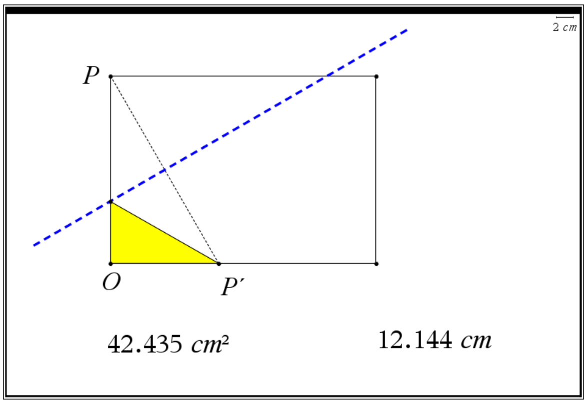
Vik ett A4-papper så att det övre vänstra hörnet, *P*, hamnar på motstående långsida i en punkt som vi kallar *P´*. Då bildas en rätvinklig triangel där den nedvikta sidan blir hypotenusa. Undersök hur arean av denna triangel beror av läget av det nedvikta hörnet, dvs. av läget av *P´*. Se bilderna nedan där den intressanta triangeln är färgad!

Några steg på vägen

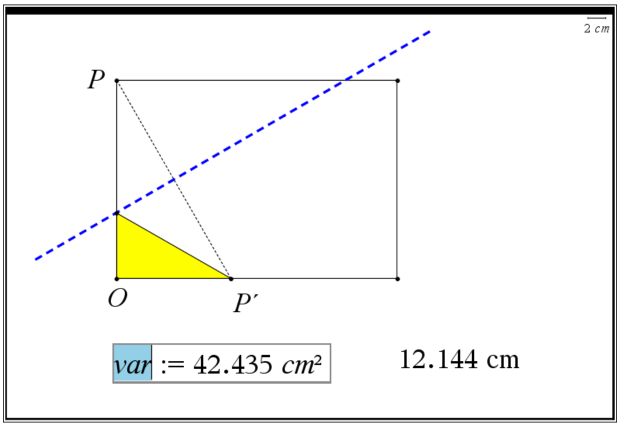
- Bekanta dig med problemet genom att göra några olika vikningar av ett A4-papper. Mät lämpliga sträckor och beräkna triangelarean i de olika fallen.



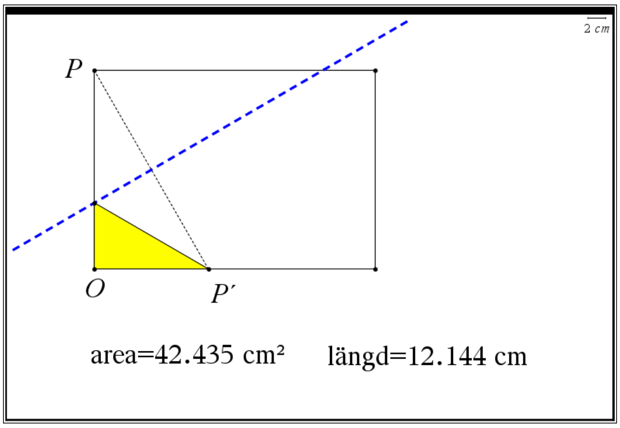
- Öppna filen *vika en A4.tns* där konstruktionen finns gjord så som bilden ovan visar. Rektangeln är konstruerad så att dess mått är skalenliga med ett A4-papper.
- Punkten *P´* är flyttbar längs den nedre långsidan. Använd greppverktyget och flytta den för att studera vad som inträffar med triangeln.
- Mät arean hos triangeln med verktyget Area. Välj då Mätning och sedan area och använd pekaren för att klicka på triangeln. Arean visas.
  Mät också triangelns bas, dvs. längden mellan nedre vänstra hörnet och *P´*. Använd verktyget Längd och klicka på sträckans ändpunkter. Då visas längden.



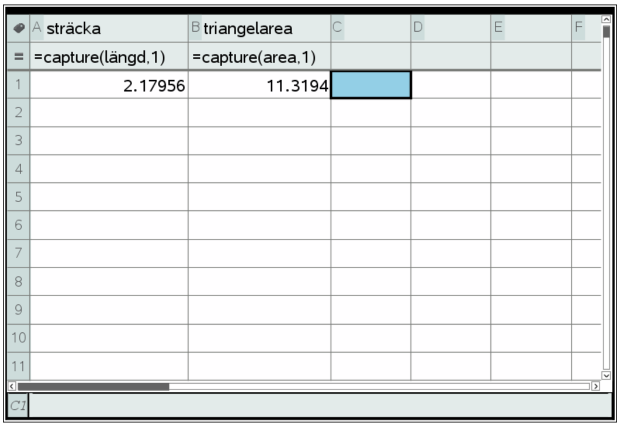
- Lagra dessa båda värden för area och längd som *variabler*. Högerklicka på mätvärdet och välj *Lagra*. Skriv nu in variabelns namn istället för *var*.
  Gör likadant för sträckan *OP´*.



När du har lagrat mätvärdena som variabler ser det ut så här:



- Nu ska vi studera sedan sambandet mellan dessa variabler. Placera först punkten P´ nära punkten *P* så att sträckan *OP´* är liten. Observera vilka värden vi har för area och längd.
- Öppna en ny sida med appen Listor & Kalkylblad. Döp nu kolumn A till *triangelarea* och kolumn B till *sträcka*. Skriv sedan i formelfältet enligt skärmbilden nedan. *capture* betyder här fånga in och vi fångar alltså aktuella värden för area och sträcka.



	A sträcka	B triangelarea	C	D	E	F
=	=capture(längd,1)	=capture(area,1)				
1	2.17956	11.3194				
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						

C1

- Gå nu tillbaka till geometrisidan och dra lugnt punken P´ åt höger. Gå sedan till kalkylbladssidan igen och titta. Vi har nu infångat ett stort antal mätvärden från dragningen av punken *P´*.

	A sträcka	B triangelarea	C	D	E	F
=	=capture(längd,1)	=capture(area,1)				
1	2.17956	11.3194				
2	2.54063	13.1431				
3	2.6309	13.5954				
4	2.90171	14.9431				
5	3.35305	17.1547				
6	3.71412	18.8892				
7	3.80439	19.3175				
8	3.89465	19.7437				
9	4.07519	20.5891				
10	4.25572	21.425				
11	4.34599	21.8393				

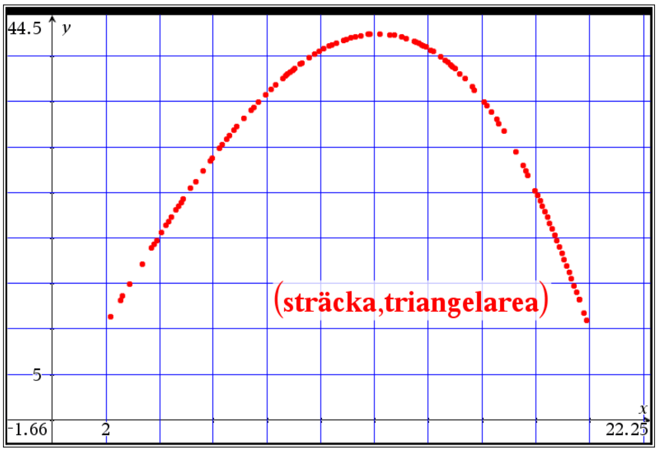
C1

Om dragningen av punken *P´* misslyckas ska du tömma listorna i kalkylbladet och börja om igen.

- Infoga nu en ny sida med appen Grafer. Välj Grafinmatning/Redigera och sedan Spridnings-diagram. Välj nu variabler för att rita diagrammet.

s2 $\begin{cases} x \leftarrow \text{sträcka} \\ y \leftarrow \text{triangelarea} \end{cases}$

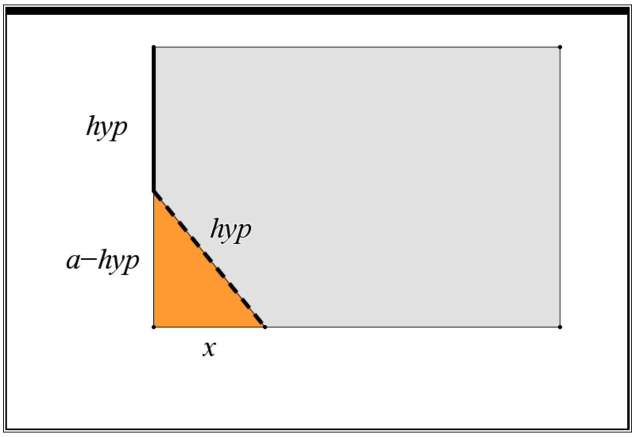
Med en bra fönsterinställning får du detta diagram. Använd t ex Zooma Data som hjälp för inställ-ningen. Använd spårningsfunktionen för att hitta det största värdet på arean.



- Försök att nu att hitta ett samband mellan sträcka och triangelarea. Inför t ex variabeln x för sträckan OP´. Du vet också att höjden *OP*, dvs. papprets höjd i en A4 är 21 cm.

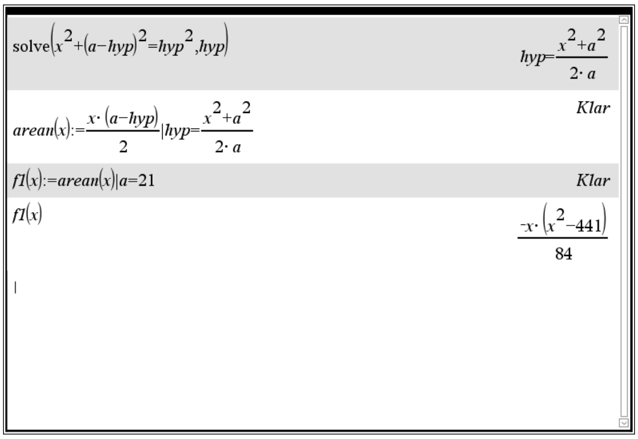
Läraranvisning

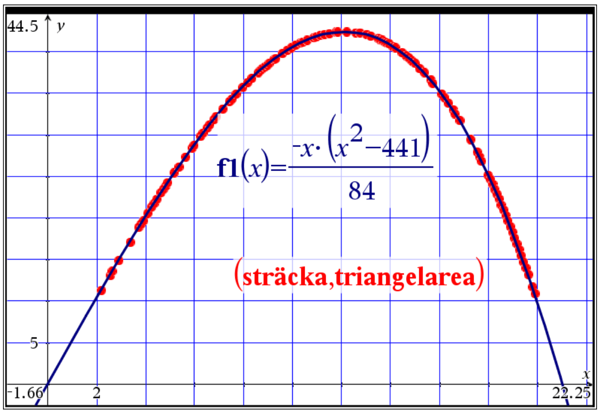
Infoga en Räknare-applikation. Med beteckningarna *hyp* för hypotenusan och *x* för basen (sträckan *OP′*) blir den vertikala kateten i triangeln *a - hyp* där *a* är känd. Det är ju höjden av A4-pappret, 21 cm.



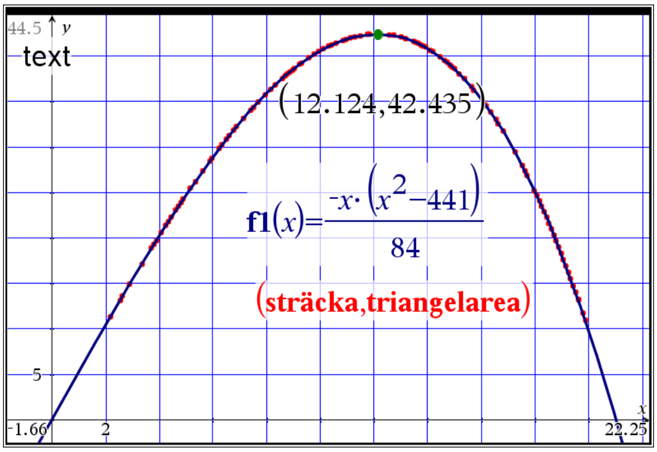
Sambandet mellan *x* och *hyp* tecknas med Pythagoras sats och *hyp* löses ut. Arean av triangeln definieras som *area(x)* för ett allmänt värde på *a*.
Sedan definieras *f1(x)* som den speciella funktion *area(x)* för vilken *a* = 21. Sedan ritas f1(x) på samma sida som spridningsdiagrammet.

Kommentar:
Det är sannolikt mycket enklare föreleverna att direkt införa det numeriska värdet för a redan i Pythagoras sats.

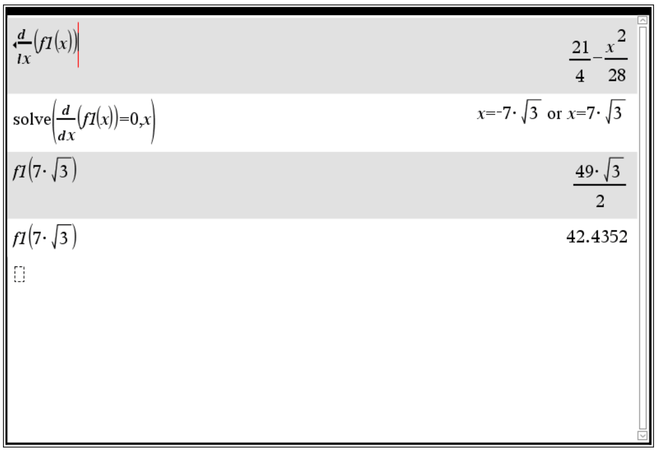




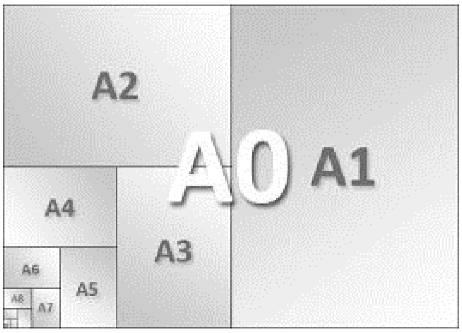
Med Analysera graf hittar vi maximipunkten på *f1(x)*.



Maximipunkten kan också bestämmas med derivatans hjälp. Om en duktig elev vill arbeta i ett mera generellt fall kan denne använda area(*x*) för att definiera derivatan.



Fördjupning: Varför är korta sidan i en A4 21 cm?
I beräkningarna har vi använt måttet 21 cm på A4-papprets höjd. Vi kan få ett exakt mått på höjden utifrån *standarden* av pappersstorlekar i A-format.



A0 har arean 1 m^2 och förhållandet mellan den länge och kortare sidan är $\sqrt{2}$, som också gäller för alla papper i A-format. För varje steg nedåt i A-skalan så halveras arean. Se figur. Papper i olika A-storlekar är alltså likformiga.

För A0 gäller: Vi kallar den längre sidan för *y* och den kortare för *x.* Då gäller att $y = x \cdot \sqrt{2}$ och då kan vi för A0 skriva arean som $x \cdot x \cdot \sqrt{2} = 1,$ vilket kan skrivas om som

$x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Detta ger att $x = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}.$

För att få en A4 så måste vi alltså halvera arean 4 gånger. Det betyder att arean för en A4 är

$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ m^2 = $\frac{10000}{16} = 625$ cm^2.

Vi kallar nu den kortare sidan i en A4 för *x* och den längre för *y*. Vi får då (återigen) $x \cdot x \cdot \sqrt{2} = 625$ vilket ger $x = \sqrt{\frac{625}{\sqrt{2}}} = \frac{25}{2^{\frac{1}{4}}} \approx 21{,}02$

I allmänhet brukar man ange måtten 210×297 mm för A4.