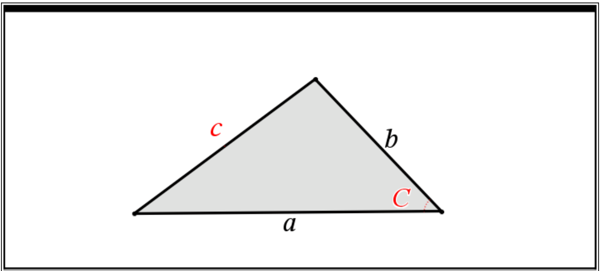
# Utforska en trigonometrisk formel

- Den här lektionen innebär att visualisera och utforska cosinussatsen.
- Obs: vissa delar av aktiviteten kräver CAS funktionalitet.
- Efter aktiviteten kommer eleverna att kunna:
    - manipulera en triangel och observera att likheten i cosinussatsen stämmer
    - manipulera en triangel för att upptäcka varför satsen är sann.
    - se sambanden med tidigare kännedom om trigonometri i rätvinkliga trianglar
    - avgöra när satsen kan användas för att lösa ut längden hos okända sidor och vinklar i trianglar




$a$=10.4 $b$=6.83 $c$=8.17 $C$=51.5° cos $C$=0.623

$c^2$=66.7 $a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos C$ = 66.7

**Cosinussatsen**

**1.** Sidan 1.2 visar en triangel *ABC*, med vinklarna *A*, *B* och *C*, och motsvarande motsatta sidor *a*, *b* och *c*. Du kan ändra triangelns utseende genom att dra i något av hörnen.

**a)** Under triangeln ser du längden på tre sidor, en vinkel, cosinus för vinkeln, och två ekvationer. Beskriv i ord vad uttrycket $a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ berättar om triangeln.

**b)** Dra nu i hörnen hos triangeln och observera förändringarna i värden på sidlängder och vinklar. Trianglarna på sid 1.2 1.4,1.5 och 1.6 är länkade till varandra.

**c)** Tror du att sambandet gäller för de andra sidorna och vinklarna? Om du t.ex. byter sida *a* med sida *c* och vinkel A med vinkel *C*. Kommer ekvationen $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ att gälla då också?

Kommentarer till frågorna:

1 a) Uttrycket $a^2+b^2-2ab\cos C$ ger summan av kvadraterna av längderna på två sidor av triangeln minus två gånger produkten av längden hos dessa sidor gånger cosinus av den mellanliggande vinkeln till dessa sidor.

b) Värdena hos de två uttrycken är lika.

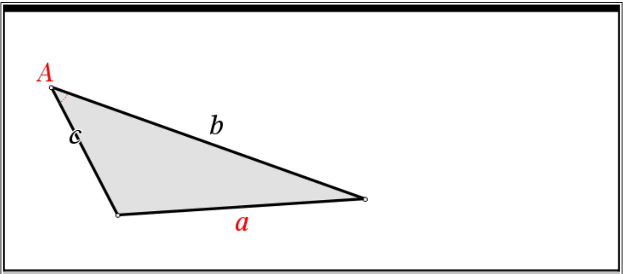
$a$=8.11 $b$=11.2 $c$=5.56 $C$=28.2° cos $C$=0.882

$c^2$=31 $a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos C$ = 31

c) Ja. Triangelns märkning påverkar inte sambanden. Till exempel kan man märka vinkel A som vinkel C, och vinkel C som vinkel A osv.

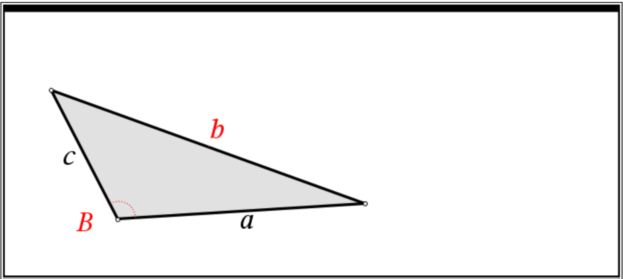
**d)** Flytta nu till sidorna 1.4 och 1.5 för att pröva dina antaganden från delfråga c). Dra i hörnen och observera värdena hos de två ekvationerna. Varför tror du att sambandet antagligen gäller.

**Sid 1.3 och 1.4**




$a$=8.11 $A$=43.5° $cosA$=0.726 $b$=11.2 $c$=5.56

$a^2$=65.7 $b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cosA$ = 65.7




$a$=8.11 $b$=11.2 $B$=108° $cosB$=-0.315 $c$=5.56

$b^2$=125 $a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot cosB$ = 125

Kommentar till delfråga 1 d): Här kan man nog få lite varierande svar från eleverna.

Gå nu tillbaka till **sid 1.2** igen och svara på frågorna nedan.

**2.** Justera triangeln så att vinkeln C är 90°.

**a)** Vad är då cosinus för vinkeln C? Hur vet du det?

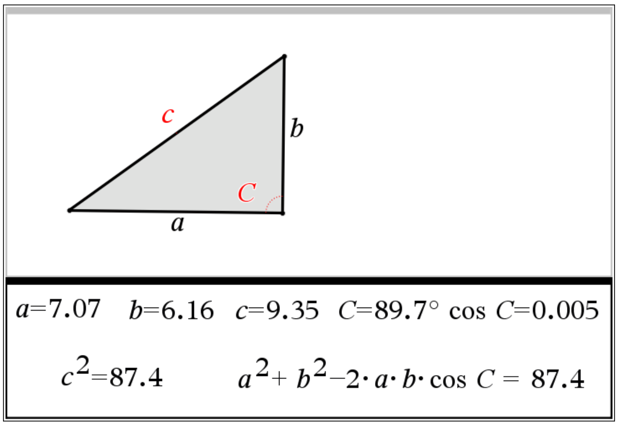
**b)** Hur ser uttrycket $a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ ut för en triangel där *C* = 90°. Hur vet du det?

**c)** Varför måste det i detta fall vara sant att $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$?

**d)** Hur skulle likheten i fråga c) se ut om vinkel *A* var den räta vinkeln? Om vinkel B var den räta vinkeln? Förklara.

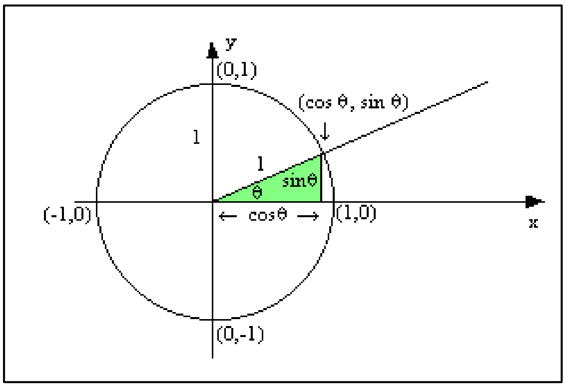
När du är klart går du till sid 1.6.

Kommentarer till frågorna finns på nästa sida:




2 a) Cosinus hos vinkel C är 0. Här kan man nog anta att de flesta elever kommer ihåg detta. Det vet också att sinus för en rät vinkel är 1. Många tänker på enhetscirkeln.

Det kan vara svårt att dra i hörnen och ställa in så att vinkel C blir exakt 0 grader.




b) Uttrycket är alltid $a^2+b^2$. Eftersom cos C =0 så är $2ab\cos C$ =0.

c) Eftersom triangeln har en rät vinkel så ger Pythagoras sats att $a^2+b^2=c^2$ och delfråga b) visar att $a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2$. Då måste ju gälla att $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

d) Om vinkel *A* var den räta vinkeln så skulle satsen kunna skrivas $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ osv.

**3.** Den likhet som vi just visade i fråga 2 kallas cosinussatsen. Den är sann för alla trianglar, inte bara rätvinkliga trianglar. På sidan 1.7, utreder vi varför cosinussatsen är sann.

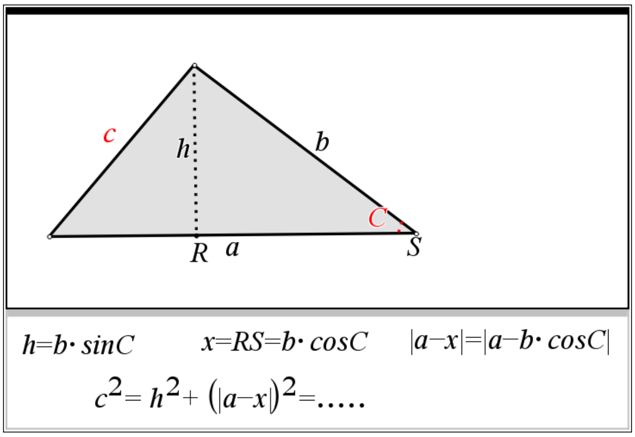
**a)** Dra i ett hörn men så att vinkeln *C* fortfarande är spetsig. *h* kallas triangelns höjd och den är vinkelrät mot den sida den skär. Förklara varför satsen $h=b\cdot\sin C$, längst ner på skärmen är sann.

**b)** Förklara varför satsen $RS=|b\cdot\cos C|$, också är sann.

**c)** Förklara varför satsen $c^2=h^2+(|a-x|)^2$ längst ner på skärmen är sann.

**d)** Skriv om satsen i fråga c) för sidorna och vinklarna i den ursprungliga triangeln.

**Gå nu till sid 2.1.**




3 a) Vi får en rätvinklig triangel med sidorna *h*, b och *RS*. Vi får att $\sin C=h/b$ vilket skrivs om som $h=b\cdot\sin C$.

b) Samma resonemang som i fråga a). $\cos C=RS/b$ ger $RS=b\cos C$ och alltså gäller då att $RS=|b\cos C|$.

c) Vi får en annan rätvinklig triangel med sidolängderna *c*, *h* och *a-RS*=*a-x*. P:s sats ger då att $c^2=h^2+(|a-x|)^2$.

d) $a^2+b^2-2ab\cos C$

Gå till sid 2.1

**4.** Du ska nu testa din likhet i fråga **3d** genom att utveckla $(b\cdot\sin(c))^2+(a-b\cdot\cos(c))^2$

**a)** Utveckla uttrycket på två sätt: med programmet och för hand. Jämför resultaten. Skiljer sig resultaten åt?

**b)** Om du behöver kan använda programmet för att få resultaten att överensstämma. Vilken viktig identitet använder programmet i beräkningarna?

$(b\cdot\sin(c))^2+(a-b\cdot\cos(c))^2 \qquad a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(c)+b^2$

4 a) Uttrycket ovan är ju $c^2=h^2+(|a-x|)^2$ från delfråga c) eftersom $h=b\cdot\sin C$ och $a-x=a-b\cdot\cos C$.

Om du utvecklar för hand så bli det så här:

$(b\cdot\sin(c))^2+(a-b\cdot\cos(c))^2=$

$b^2\cdot\sin^2 c+a^2-2ab\cdot\cos c+b^2\cdot\cos^2 c=$

$=b^2(\sin^2 c+\cos^2 c)+a^2-2ab\cdot\cos c$

då $\sin^2 c+\cos^2 c=1$ (trigonometriska ettan) får vi

$b^2+a^2-2ab\cdot\cos c$

b) trigonometriska ettan bygger ju på Pythagoras sats.

**Sid 2.2**

Gå nu tillbaka till sid 1.7 och gör följande:

**5.** Flytta ett eller flera hörn så att vinkeln *C* blir trubbig.

**a)** Vad händer med höjden *h*?

**b)** Observera att satserna $h=b\cdot \sin C$ och $RS=|b\cdot \cos C|$ fortfarande finns kvar på skärmen. Visa varför de fortfarande båda är sanna.

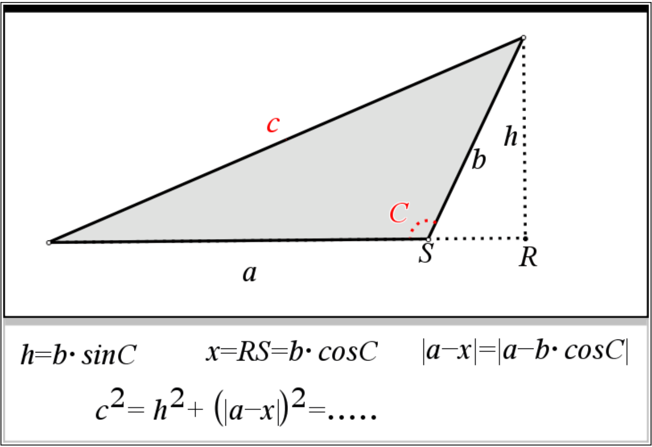
**c)** Är cosinussatsen sann när vinkeln *C* is trubbig? Förklara!

**6.** Använd nu, om det är möjligt, cosinussatsen, för att lösa de sidlängder och vinklar som saknas i trianglarna nedan. Om det inte går att använda cosinussatsen förklara då varför.

**a)** a = 5.8, b = 3.4, C = 64° **b)** a = 5, b = 8, c = 9

**c)** a = 8, c = 12, A = 50°

5 a) Höjden *h* ligger nu utanför triangeln.




b) Titta nu på den delvis streckade lilla triangeln till höger. Vinkeln vid hörnet S är supplementvinkel till vinkel C. Då gäller att $\sin(180-C)=\sin C$ så $h=b\cdot\sin C$.

Vidare gäller att $\cos(180-C)=RS/b$ och då blir $RS=b\cdot\cos(180-C)$. För cosinusfunktionen gäller att cos(180-C)=-cos C så $RS=-b\cdot\cos C$ och därför gäller att $|RS|=b\cdot\cos C$.

c) Cosinussatsen gäller även när vinkeln C är trubbig. Här tittar vi nu på sidan C som är hypotenusa i den rätvinkliga triangeln med kateterna med längd *h* respektive *a*+*x*. Se figuren ovan.

Enligt P:s sats gäller då att

$$c^2=h^2+(a+x)^2=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2=$$
$$b^2\sin^2 C+a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C=$$
$$a^2+b^2-2ab\cos C.$$

$$(b\cdot\sin(c))^2+(a-b\cdot\cos(c))^2$$
$$\blacktriangleright\ a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(c)+b^2$$

TI-Nspire CAS ger svaret direkt!

6 a) c=5,28, A=81°, C=84°

b) A=34°, B=62°, C=84°c)

c) Du kan inte lösa denna uppgift eftersom cosinus-satsen förutsätter två sidor och mellanliggande vinkel eller tre sidor. En sådan här triangel existerar inte.

I problem 3 avslutar vi med att visa ett bevis för cosinussatsen. Förslag: lämna bara denna sida, 3.1, till eleverna och be dem ta fram ett bevis. Det eleganta här är placeringen av triangeln i koordinatsystemet.

**Bevis av cosinusteoremet**

Här är ett annat bevis där man använder *avståndsformeln*. Se figur nedan. Vi har placerat ett hörn i origo och en sida efter x−axeln. Smart!