Amorteringar på lån

I denna aktivitet tar vi upp hur man kan göra beräkningar år från år på avbetalningar på lån som löper över längre tid. Beräkningar bygger på att man har en konstant räntesats över tid, men så är ju inte fallet. Idag (våren 2021) har vi t.ex. rörliga bolåneräntor som ligger mellan 1,3 % och 2 %. En fast 10-årsränta kanske ligger på 3 %. 2008 hade vi boräntor på mer än 6 %.

När man lånar kan man till exempel amortera ett visst belopp varje år (eller månad). Lånar du t ex 100 000 kr på tio år så amorterar du 10 000 kr varje år. Sedan tillkommer ränta förstås. Detta kallas för *rak amortering*. När du betalar av på lånet så minskar ju den ränta du ska betala så du betalar totalt mindre och mindre under lånets löptid.

Sedan kan du också ha ett lån där du betalar lika mycket inklusive ränta vid varje betalningstillfälle. Sådana lån kallas *annuitetslån*. När du betalar av på lånet så består det mest av amortering i början. Efterhand så ökar räntedelen i beloppet. Ränta +amortering är hela tiden konstant.

När det gäller köp av *bostad* (villa eller bostadsrätt) så har man speciella regler sedan 2016. Amorteringskraven innebär att:

- bolån mindre än 50 % av bostaden värde är amorteringsfria. Du får dock amortera om du vill. Om du lånar mer än 50 % av bostadens värde måste du amortera 1 % eller 2 % av lånebeloppet.
- Om man lånar mer än 4,5 gånger låntagarnas sammanlagda årsinkomst före skatt ska du även amortera ytterligare 1 % av det totala lånebeloppet per år.

Vi tittar först på ett enkelt exempel där vi jämför rak amortering och annuitetslån på ett 5 årigt lån på 100 000 kr. Vi börjar med den enklaste typen, rak amortering.

Avbetalning av ett lån på 100 000 kr på 5 år när räntan är 4,2 % kan se ut så här i ett kalkylprogram. Första året betalar du 24200 kr totalt och sista året 20 840 kr. (*Vi har här använt kalkylarksappen i programvaran TI-Nspire)*. Totalt betalar man 12 600 kr i ränta.

	A skuld	B ränta	C amortering	D	E
=					
1	100000	4200.	20000	ränta_totalt	12600.
2	80000	3360.	20000		
3	60000	2520.	20000		
4	40000	1680.	20000		
5	20000	840.	20000		
6	0	0.			
7					
8					

A2 =a1−c1

När det gäller annuitetslån blir det lite svårare. Vi måste räkna ut det totala belopp vi ska betala varje år i 5 år. Då måste vi ta till lite matematik som du kanske inte har stött på tidigare.

Lösning: Säg att man ska betala *a* kr per år. För varje år räknas skulden upp med en faktor 1,042 och minskar sedan med betalningen *a:* Vi gör en tabell av detta:

år	skuld (i kronor)
0	100000
1	$1,042 \cdot 100000 - a$
2	$((1,042 \cdot 100000 - a) \cdot 1,042 - a) =$ $1,042^2 \cdot 100000 - 1,042a - a$
3	.....
4	....
5	$1,042^5 \cdot 100000 - (1,042^4 a + 1,042^3 a + 1,042^2 a + 1,042a + a)$

Det sista uttrycket ska vara lika med noll eftersom skulden ska vara betald då. Detta ger ekvationen

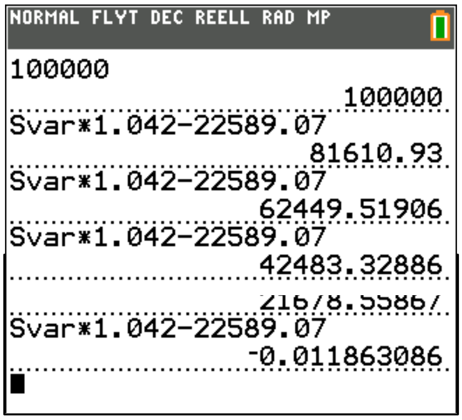
$1,042^5 \cdot 100000 - (1,042^4 a + 1,042^3 a + 1,042^2 a + 1,042a + a) = 0$. Lös nu ut a

$$a = \frac{1,042^5 \cdot 100000}{1,042^4 + 1,042^3 + 1,042^2 + 1,042 + 1} \approx 22589,07.$$

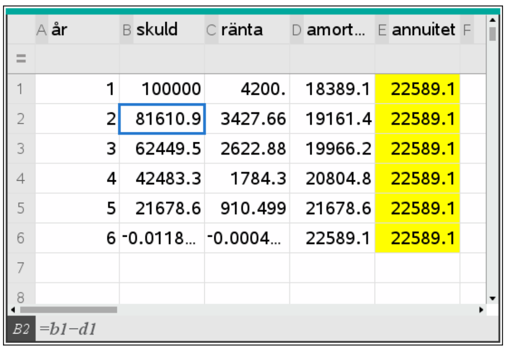
Man ska alltså betala 22589 kr varje år.

Den här typen av avbetalning kallas för **annuitet**. Man betalar då lika mycket varje gång.

Nu kan du göra detta med din grafräknare. Börja med att mata in 100000 och tryck sedan på [enter]. Sedan skriver du ”[×]1.042-22589.07” och trycker på [enter] igen, och igen några gånger. Svar på skärmen här betyder det *sista* beräknade värdet. Se bilden här till höger. Använder du engelsk språkinställning så står det istället *ans*. Efter 5 år har vi bara ca 1 öre över!



Om vi gör beräkningarna i ett kalkylark kan det se ut så här.



	A år	B skuld	C ränta	D amort...	E annuitet	F
=						
1	1	100000	4200.	18389.1	22589.1	
2	2	81610.9	3427.66	19161.4	22589.1	
3	3	62449.5	2622.88	19966.2	22589.1	
4	4	42483.3	1784.3	20804.8	22589.1	
5	5	21678.6	910.499	21678.6	22589.1	
6	6	-0.0118...	-0.0004...	22589.1	22589.1	
7						
8						

B2 =b1−d1

Om du inte är bekant med geometriska serier kan du hoppa över det som sägas om geometrisk serie.

Uttrycket $1{,}042^4+1{,}042^3+1{,}042^2+1{,}042+1$ i formeln ovan är en s.k. *geometrisk serie* och man kan skriva den så här:

$$1{,}042^4+1{,}042^3+1{,}042^2+1{,}042+1=\frac{1{,}042^5-1}{1{,}042-1}$$

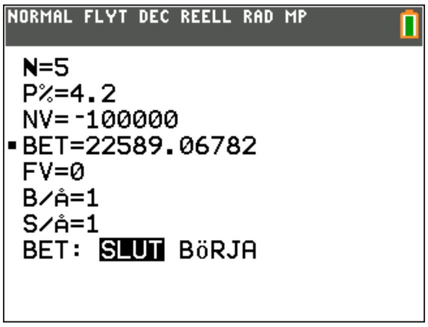
Om vi sätter in detta i uttrycket för a ovan får vi

$$a=\frac{1{,}042^5\cdot 100000}{\frac{1{,}042^5-1}{1{,}042-1}}=100000\cdot\frac{1{,}042^5\cdot 0{,}042}{1{,}042^5-1}=22589{,}07$$

Nu var det här avbetalningsplan för 5 år. Om vi generaliserar detta till ett lån på *L* kr som avbetalas på *n* år med en räntesats på *p* procent får vi följande uttryck för annuiteten:

$$a=L\cdot\frac{(1+p/100)^n\cdot p/100}{(1+p/100)^n-1}$$

Fördjupning: På grafräknaren finns en speciell app, *Finans*, där man kan göra en hel del ganska avancerade beräkningar. Den bör helst användas när man är någorlunda bekant med hur olika beräkningar på lån och sparande görs. Det är ungefär som du sitter på bankmannens sida och kunden frågar efter olika saker. ”Hur mycket ska jag betala per månad om jag kan lägga 200 000 kr kontant?” Om jag högst kan betala 4500 kr per månad, hur mycket får jag låna då på 10 år.



Vi har här matat in värden utom för det som kallas BET (som är annuiteten). Där skriver man 0 och trycker sedan på [alpha] [enter] (dvs funktionen solve). Då beräknas annuiteten direkt.

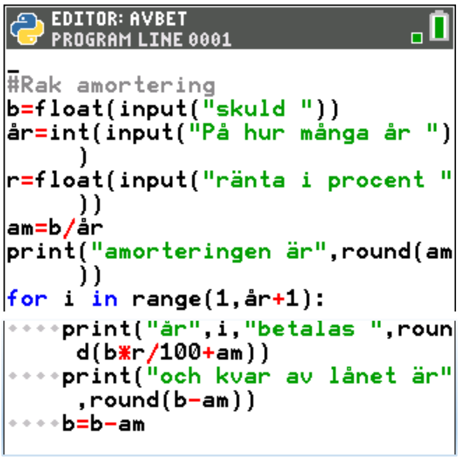
(I TI-Nspire can man också göra beräkningarna symboliskt. Elegant! b är lånebeloppet, rf är räntefaktorn och a är annuiteten.)

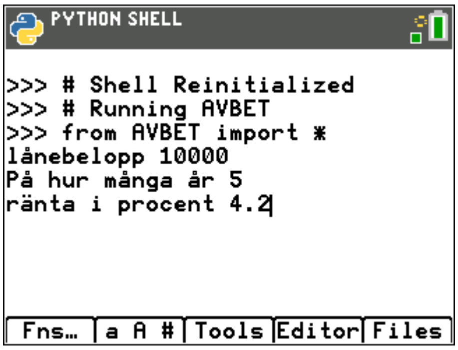
b	b
$b\cdot rf-a$	$b\cdot rf-a$
$(b\cdot rf-a)\cdot rf-a$	$a\cdot(-rf-1)+b\cdot rf^2$
$(a\cdot(-rf-1)+b\cdot rf^2)\cdot rf-a$	$a\cdot(-rf^2-rf-1)+b\cdot rf^3$
$(a\cdot(-rf^2-rf-1)+b\cdot rf^3)\cdot rf-a$	$a\cdot(-rf^3-rf^2-rf-1)+b\cdot rf^4$
$(a\cdot(-rf^3-rf^2-rf-1)+b\cdot rf^4)\cdot rf-a$	$a\cdot(-rf^4-rf^3-rf^2-rf-1)+b\cdot rf^5$
$\text{solve}(a\cdot(-rf^4-rf^3-rf^2-rf-1)+b\cdot rf^5=0,a)$	$a=\frac{b\cdot rf^5}{rf^4+rf^3+rf^2+rf+1}$
$a=\frac{b\cdot rf^5}{rf^4+rf^3+rf^2+rf+1}\vert b=100000 \text{ and } rf=1.042$	$a=22589.1$

Nu har vi gått igenom det mesta om lån. Nu över till programmeringen och vi börjar med rak amortering där man betalar lika mycket varje gång (exklusive ränta förstås). Det är ett ganska enkelt program.

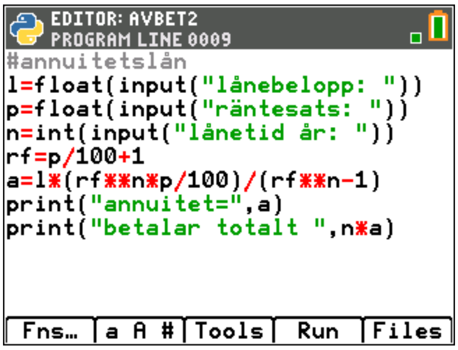
- Vi inleder med tre inputsatser. För att hantera tal så har vi varit tvungna att lägga in *float* och *int* (antalet år är heltal).
- am=b/år är en beräkning av hur mycket man ska betala varje år.
- På nästa rad så skriver vi sedan ut amorteringen.
- Sedan kommer en loop där man för varje år skriver ut hur mycket man ska betala totalt och vad som återstår av lånet.
- Till sist så får man ett nytt värde b för varje år.

Vi kör nu programmet och vi får för varje år en beräkning av hur mycket man ska betala och hur mycket som återstår av lånet.



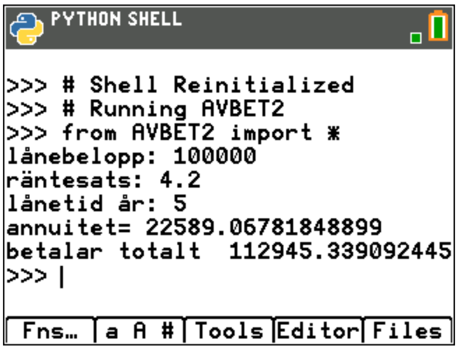


Nu kör vi programmet med samma värden som vi hade i den inledande beskrivningen men nu har vi ett *annuitetslån* istället. Det blir ju lite annorlunda. Det blir ett enkelt program där vi räknar ut annuiteten *a*. *rf* är räntefaktorn och på rad 5 gör vi annuitetsberäkningen enligt formeln på sid 3. Vi räknar också ut hur mycket vi betalar totalt med amortering och ränta. Att det blir så enkelt beror på att vi redan har formeln som räknar ut belopp man ska betala varje år.



Om du har gjort rätt så får du detta resultat. Ändra i programmet så att beräknade värden avrundas till 0 decimaler. Vi tar t.ex. upp detta i aktiviteten *beskrivande statistik.*

Vi ser att man totalt betalar 12 945 kr i ränta.



Fördjupning: Vi ska nu göra samma beräkning, dvs beräkning av *totalbelopp*, för exemplet med *rak* amortering. Titta på räntedelen från år 1 till och med år 5. Hur mycket minskar den varje år?

Man betalar 4 200, 3 360, 2 520, 1 680, 840 kr i ränta under de fem åren. Räntan minskar med 840 kr varje år. Det finns flera sätt att tänka men detta är ju en *aritmetisk serie* där termerna ökar eller minskar med ett konstant värde. Summan av en aritmetisk serie kan beräknas med följande formel:

$$S = \text{antal termer} \cdot \frac{\text{första term+sista term}}{2}$$

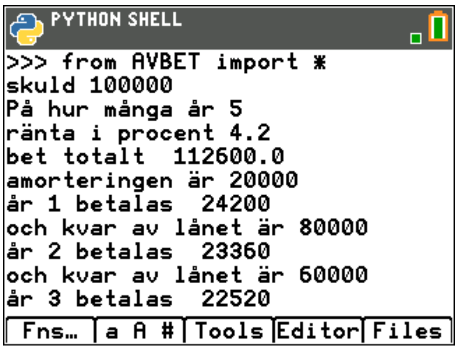
I vårt fall blir det $5\cdot\frac{4200+4200/5}{2}$ och det totala belopp man ska betala blir då 100000 + $5\cdot\frac{4200+4200/5}{2}$

Med beteckningarna i programmet får vi då att totalbeloppet blir

$$b+\text{år}\cdot\frac{\frac{b\cdot r}{100}+\frac{b\cdot r}{100\cdot \text{år}}}{2} \quad \text{som kan förenklas till} \quad b+\frac{b\cdot r\cdot(\text{år}+1)}{200}$$

Man kan sätta in uttrycket som i en print-sats på rätt plats och få totalbeloppet beräknat. Man får tänka på att värdet på *b* i slutet av programmet är 0.

Vid körning av programmet kan det se ut så som på bilden här bredvid. Vi ser att man betalar totalt 112 600 kr. Man kan bläddra uppåt i Shell-fönstret genom att trycka på 2nd ▲.



Det kan också finnas anledning att snygga till programmet så att det blir mer användarvänligt på skärmen vid körning.

Det är alltid dyrare med annuitetslån när man räknar på totalbeloppet. Med annuitetslån betalar man samma belopp varje år vilket kan upplevas som en fördel. Rak amortering innebär att man betalar mer i början.

Titta nu på lite större belopp. Vi tänker oss att man lånar 1 miljon kr på ett 25-årigt lån till 2 % ränta.

- Hur mycket betalar man första respektive sista året på ett lån med rak amortering?
- Hur mycket betalar man varje år om man har ett annuitetslån?
- Hur mycket betalar man totalt (amortering+ ränta) för de båda typerna av lån?

Diskutera också hur lån påverkar den personliga ekonomin om man till exempel har en inflation på 3 %. Man kan ju inte heller få någon garanti att räntan ligger fast med samma räntesats under längre tid?