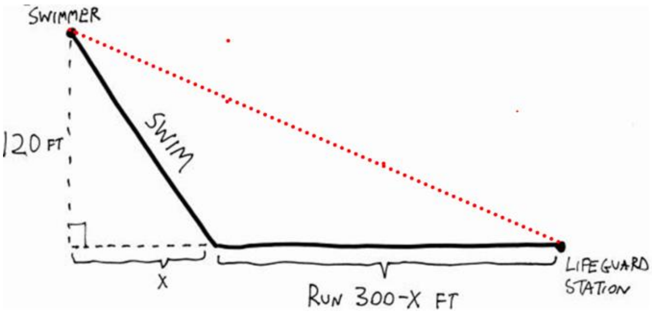
Ljusvägar

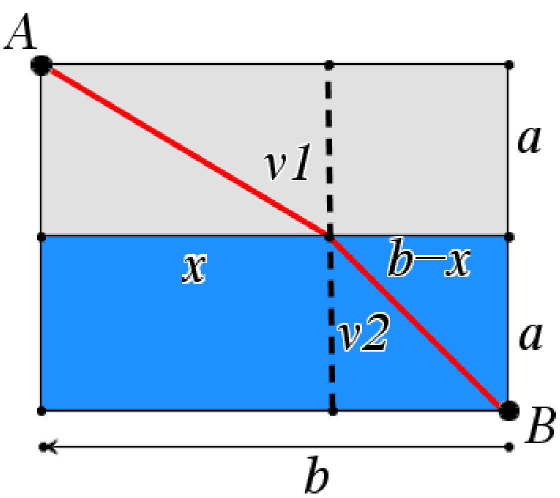
Den princip vi nu ska göra beräkningar på görs helt symboliskt. Vi anger alltså inte några värden på avstånden i figuren. När vi ska beräkna den kortaste tiden så använder vi derivata, vilket inte Pierre de Fermat hade tillgång till. Han formulerade principen 1662 och hans bevis var synnerligen krångligt.

Problemen med ljuset kan liknas vid en typ av problem av typen snabbast tiden för att rädda någon som håller på att drunkna. Den kortaste sträckan (markerat med rött) är inte den snabbast eftersom man simmar mycket långsammare än man springer.



Problemet här är att man ska komma fram till ett samband som gäller infalls- och brytningsvinkeln och inte specifikt den kortaste tiden. Efter derivering måste man ur figuren se att

$$\sin(v1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \text{ och } \sin(v2)=\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}$$



Define $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{\frac{c}{n1}}+\dfrac{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}{\frac{c}{n2}}$ ▸ *Klar*

$\dfrac{d}{dx}(t(x))$ ▸ $\dfrac{n2\cdot(x-b)}{c\cdot\sqrt{x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2}}+\dfrac{n1\cdot x}{c\cdot\sqrt{x^2+a^2}}$

Titta nu på första delen av uttrycket under rottecknet . Det kan skrivas som $(x-b)^2+a^2$. Dessutom är (x−b) =−(b−x). Om vi nu sätter $\dfrac{d}{dx}(t(x))=0$ får vi

$\dfrac{n2\cdot(b-x)}{c\cdot\sqrt{(b-x)^2+a^2}}=\dfrac{n1\cdot x}{c\cdot\sqrt{x^2+a^2}}$= **Gå nu till nästa sida.**

Vi har här definierat vår tidsfunktion som *t*(*x*). Det går naturligtvis bra att mata in den som *f1*(*x*) också.

Här har vi förutom variabeln x använt 4 st parametrar: n1, n2, c, a och b. Vad hade vi kommit fram till om vi hade satt in värden istället för beteckningar?

Observera att man använder sig av att $(x-b)=-(b-x)$. och att $x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2$ kan skrivas om som $(x-b)^2+a^2$. När man hanterar uttryck är det inte alltid som TI-Nspire skriver resultat som man har förväntat sig.

Elementära kunskaper i algebra får här användning.

Titta nu på uttrycket nedan och figuren

$\dfrac{n2\cdot(b-x)}{c\cdot\sqrt{(b-x)^2+a^2}}=\dfrac{n1\cdot x}{c\cdot\sqrt{x^2+a^2}}=$

Vi ser att $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sin(v1)$ **och** $\dfrac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}=\sin(v2)$

Vi får då $n1\cdot\sin(v1)=n2\cdot\sin(v2)$

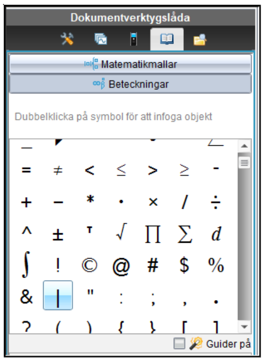
Detta brukar kallas för Snells lag.

Här har vi använt funktionen *Solve* för att beräkna *x* för speciella värden på brytningsindex och avstånden *a* och *b*. Vi har satt ljushastigheten c till 1 med den förkortas ju bort.

$\text{solve}\left(\dfrac{n2\cdot(b-x)}{c\cdot\sqrt{(b-x)^2+a^2}}=\dfrac{n1\cdot x}{c\cdot\sqrt{x^2+a^2}},x\right)|a=1$ and b=2 and n1=1 and n2=1.33 and c=1

▸ **x=1.26841**

Det lodräta strecket efter högre solve-parentesen hittar du i verktygslådan under beteckningar.



I problem 2 handlar det om att undersöka reflektion i en spegel. Vi ser att vi kommer fram till ett liknande uttryck som i Problem 1. Uttrycket står ju för den totala längden.

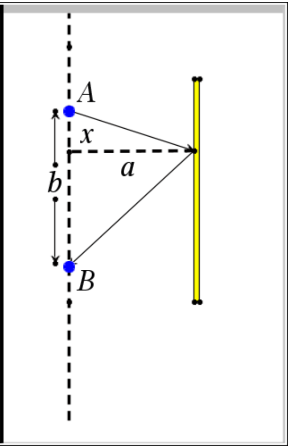
Titta på figuren till höger. Nu ska vi istället titta på reflektion i en spegel.

Längden på vägen från A till B via spegeln kallar vi för *l*. Vi definierar nu *l*:

Define $l=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(b-x)^2+a^2}$ ▸ *Klar*

För att finna den kortaste vägen så deriverar vi längd–funktionen;

$\frac{d}{dx}(l)$ ▸ $\frac{x-b}{\sqrt{x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ⚠



Eleverna borde nu kunna lösa problemet med strålen som reflekteras i spegeln.

Vi visar här en lösning.

solve$\left(\frac{x-b}{\sqrt{x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=0,x\right)$ ▸ $x=\frac{b}{2}$ or $a^2\cdot b=0$ ⚠

Alternativ metod: $\sqrt{x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2}$ kan skrivas som $\sqrt{(x-b)^2+a^2}$ och vi får när vi sätter derivatan lika med noll:

$\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ Vi **kvadrerar** nu bägge led:

$\left(\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}}\right)^2=\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2$ ▸ $\frac{(x-b)^2}{x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2}=\frac{x^2}{x^2+a^2}$

Vi ser att man direkt kan använda Solve-funktionen.

I den utförliga lösningen utnyttjar vi att man kan kvadrera båda led i en ekvation. Sedan utvecklar vi två uttryck och stryker lika termer.

$\frac{(x-b)^2}{x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2}=\frac{x^2}{x^2+a^2}$

expand$\left((x-b)^2\cdot(x^2+a^2)\right)$ ▸ $x^4-2\cdot b\cdot x^3+a^2\cdot x^2+b^2\cdot x^2-2\cdot a^2\cdot b\cdot x+a^2\cdot b^2$

expand$\left((x^2-2\cdot b\cdot x+a^2+b^2)\cdot x^2\right)$ ▸ $x^4-2\cdot b\cdot x^3+a^2\cdot x^2+b^2\cdot x^2$

Vi stryker nu lika termer och får kvar:

$-2\cdot a^2\cdot b\cdot x+a^2\cdot b^2$ som vi sätter lika med noll och löser ekvationen:

solve$(-2\cdot a^2\cdot b\cdot x+a^2\cdot b^2=0,x)$ ▸ $x=\frac{b}{2}$ or $a^2\cdot b=0$