Fermiaufgaben

Alfred Roulier

Diese sog. Quickies sind eine Sammlung von Aufgaben mit dem Ziel, die Bedeutung und den Nutzen von Überschlagsrechnungen oder Abschätzungen aufzuzeigen und dabei den sicheren Umgang mit Einheiten und Zehnerpotenzen zu trainieren.

Solche Probleme finden sich im Internet mit den Suchbegriffen "order of magnitude physics", "back-of-the-envelope-physics" oder "Fermi Probleme". Der Nobelpreisträger Enrico Fermi pflegte seine Studenten mit Schätzaufgaben herauszufordern. Es ging dabei darum, eine auf den ersten Blick "unmögliche" Frage zu strukturieren und in Teilschritte zu zerlegen, um schlussendlich ein vernünftiges Resultat zu erhalten. Sein Klassiker lautet "wieviele Klavierstimmer gibt es in Chicago?"

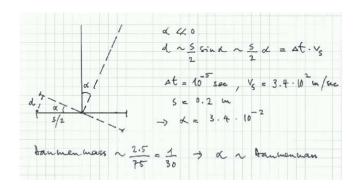
In der Reinform, d.h. ohne Verwendung von Hilfsmitteln, setzen Fermi-Probleme allerhand Kenntnisse in Physik und von naturwissenschaftlichen Zahlen voraus. Dies trifft natürlich in der Schule noch nicht zu, und man muss einen Kompromiss wählen zwischen vorgeben und "zappeln lassen". Ausserdem soll ausdrücklich der Taschenrechner TI-nspire CAS verwendet werden. Es geht, wie gesagt, um Abschätzungen. Daher ist in den Dokumenteinstellungen die Anzeige "2 Ziffern" gewählt.

Röhrender Hirsch

Stichworte: Richtungshören, Bogenmass, kleine Winkel

<u>Aufgabe</u>: Im Herbst, auf einer Bergwanderung, hören wir im Gegenhang in einer Distanz von ca 800 Metern einen Hirsch röhren. Dort, wo wir ihn vermuten, ist mit Büschen durchsetzter Niederwald, und wir hoffen, ihn von blossem Auge zu sehen. Welche Fläche sollen wir absuchen? Wie genau ist unser Richtungsempfinden in Grad?

<u>Hintergrund</u>: Es geht hier um das "Richtungs-hören". Unser Gehirn ermittelt die Richtung zu einer Schallquelle aufgrund sowohl der Laufzeit- als auch der Pegeldifferenz zwischen beiden Ohren. Die Pegeldifferenz spielt bei stark seitlicher Richtung eine dominierende Rolle, weil der Kopf den Pegel im abgewandten Ohr merklich dämpft. Sobald wir aber den Kopf in Schallrichtung drehen, dominiert die Laufzeitdifferenz-Erkennung. Dazu muss das Signal mehrmals ertönen (was ein Hirsch in Hitze hinreichend oft tut). Unser Gehirn ist in der Lage, mit Koinzidenzneuronen Laufzeitunterschiede rechts/links hinunter bis auf 10 Mikrosekunden zu unterscheiden (Internet).





Der Hirsch steht in dem durch den ausgestreckten Daumen abgedeckten Bereich.

Grillenmusik

Stichworte: Schalldruck, Hörschwelle, Dezibelskala

 $\underline{\text{Aufgabe}}$: An einem Sommerabend beschallt uns eine Grille aus d = 20 m Distanz eine geschlagene Stunde lang. Das Zirpen ist gut hörbar und man fragt sich, wieviel Energie in cal das Tierchen wohl dazu benötigt.

<u>Lösung</u>: Die Hörschwelle unseres Ohrs beträgt $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa (Internet). Das heisst, dass wir solche Druckunterschiede gerade noch wahrnehmen können. Das Dämpfungsmass Dezibel ist definiert als $10*log p/p_0$. Der Grillenschall liegt zwischen 20 dB (Blätterrauschen) und 40 dB (normales Gespräch). Unter der Annahme von 30 dB erreicht uns also ein Schalldruck von $p = 10^{-3}$ $p_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ Pa . Bei einer angenommenen Schallfrequenz von v = 2000 Hz , einer Bewegungsamplitude des Trommelfells von $a = 10^{-9}$ cm und einer Trommelfellfläche von $t = 55 \text{ mm}^2$ (Internet) ergibt das eine Schalleistung an unserem Ohr von $t = 10^{-10}$ W .

Die Grille zirpt am Ausgang ihrer Höhle, welche als Schalltrichter wirkt, und wir nehmen eine Divergenz der Schallkeule von 1/4 der Kugelvollfläche an. Somit verteilt sich die Schalleistung auf eine Fläche von $f = d^2 \cdot \pi = 1.3 \ 10^3 \ m^2$ und die Leistung der Grille ergibt sich zu $lt = sl \cdot f/ft = 10^{-6} \ W$.

Eine Grille zirpt mit einer Rate von 60 sec⁻¹ (Internet) und wir schätzen für die Dauer eines Zirps 5 Millisekunden. Der Zeitanteil währenddem Schall erzeugt wird beträgt also 0.3. In einer Stunde verbraucht die Grille

 $eg = 0.3.3600.lt = 1.1 \cdot 10^{-3} J$. In cal sind 2.6 10^{-4} cal.

Reifenabrieb

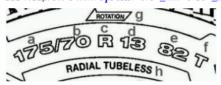
<u>Aufgabe</u>: Wie gross ist die Masse an Reifenstaub, welche jährlich durch Abrieb auf dem Berner Felsenauviadukt anfällt?

<u>Lösung</u>: Die Streckenlänge und die über 1 Jahr gemittelte Anzahl Fahrzeuge, welche den Viadukt täglich passieren, findet man unter <u>www.stadttangentebern.ch/30505/Daten-und-Fakten/index.aspx</u>

```
strecke:=1.1 _km • 1.1E3 _m fzanz:=10 • 100000
```

Daraus ergibt sich für die Totalstrecke pro Jahr fzkm:=strecke fzanz 365 * 4.E10 _m

Die "Lebensdauer" eines Reifens beträgt ca $\mathbf{lr}:=40^{\circ} \cdot 10^{3} \cdot _\mathrm{km} + 4.\mathbf{E}7^{\circ} \cdot _\mathrm{m}$. Das minimal erlaubte Restprofil ist 1.6 mm, das Neuprofil 8 mm. $\mathbf{rprofil}:=0.8^{\circ} \cdot _mm - 0.16^{\circ} \cdot _mm + 6.4\mathbf{E}-4^{\circ} \cdot _m$. Reifenabmessungen :



a = Reifenbreite in mm; b = Reifenhöhe in % von a; d = Felgendurchmesser in Zoll. Das Bild enthält PW-Werte.

ist $p:=1.5 \cdot _gm \cdot _cm^{-3} \cdot 1.5$ = 3 · $\frac{_kg}{_m^3}$. In der Berechnung des abgeriebenen Volumens kommt die Form $x^2 - (x - \varepsilon)^2$

mit $\epsilon << x \ vor$, wofür die Näherung $2 \cdot \epsilon$ angewendet werden kann.

Somit ist der Gummiabrieb eines pw-Reifens am Ende der Lebensdauer

```
abrpw:=apw· 2· (bpw+dpw)· π· rprofil· ρ ► 4.8E-1· _kg
```

Bei einem LKW sind die Reifenzahlen 315/70/22.5., also $alkw:=315\cdot _mm + 3.2e^{-1}\cdot _m$, $blkw:=alkw: 0.7 + 2.2e^{-1}\cdot _m$, $dlkw:=22.5\cdot _in + 5.7e^{-1}\cdot _m$

abrlkw:=alkw: 2: (blkw+dlkw): π: rprofil: ρ • 1.5E0: _kg

Beim PW rechnen wir mit 4, beim LKW mit 6 Rädern. Den Anteil LKW schätzen wir zu 10 %.

Der totale Abrieb pro Jahr ergibt sich so zu

$$\mathbf{abrtot} := \frac{\mathbf{fzkm} \cdot \left(4 \cdot 0.9 \cdot \mathbf{abrpw} + 6 \cdot 0.1 \cdot \mathbf{abrlkw}\right)}{\mathbf{lr}} \ge 2.6 \mathbf{E} 3 \cdot \mathbf{kg}$$

Auf dem Felsenauviadukt entstehen also jährlich ca 3Tonnen Reifenstaub, der teils ins Meteorabwasser, teils als Aerosol in die Luft gelangt.

(Am 22.9.2011 meldet das Bundesamt für Strassen, dass 2010 in der CH 25.2 Milliarden Autobahnkm gefahren worden sind. Mit den oben verwendeten Grössen ergibt das 1600 Tonnen Abrieb!)

Wundheilung

Stichworte: exponentielles Wachstumsgesetz, Teilchendichte

<u>Aufgabe</u>: Ein Entzündungsherd enthält Bakterien, deren Population sich alle 20 Minuten verdoppelt. Sie werden von Leukozyten (weisse Blutkörperchen) bekämpft (vernichtet), die einen Ø von 15 μm haben und in 20 sec eine Körperdimension vorankommen. Wieviele Leukozyten pro cm3 sind nötig, um die Bakterienkolonie am Wachsen zu hindern?

<u>Lösung</u>: Die Zuwachsrate $\alpha = \Delta N_b/\Delta t$ der Bakterien ist proportional zur ihrer Anzahl N_b minus der Vernichtungsrate k durch die Leukozyten. Sie soll Null werden, also $0 = \alpha \cdot Nb - k$ Der Faktor α folgt aus der Bedingung "Verdoppelung in 20 Minuten" bei freiem exponentiellem Wachstum. Daraus folgt $\alpha = \frac{\ln 2}{60\cdot 20} = 5.8 \ 10^{-4} sec^{-1}$.

 N_l Leukozyten durchmessen in der Zeit Δt ein Volumen $\Delta V = N_l \cdot v_l \cdot q_l \cdot \Delta t$, dabei ist die Geschwindigkeit v_l der Leukozyten $v_l = 15/20 \ 10^{-4} = 7.5 \ 10^{-5} \ cm \ sec^{-1}$ und der Querschnitt der l Leukozyten $q_l = \pi/4 \cdot 15^2 \cdot 10^{-8} = 1.8 \ 10^{-6} \ cm^2$.

In diesem Volumen ΔV werden alle Bakterien vernichtet. Somit ist $k=n_b*\Delta V/\Delta t$; nb ist die Bakteriendichte.

In einem gegebenen Volumen mit homogenen Verteilungen verhalten sich die Dichten von Bakterien und Leukozyten wie ihre Absolutzahlen. Also kann man $n_b = n_l \ N_b/N_l$ einsetzen. Nun haben wir alles, um die eingangs notierte Bedingung auszuwerten :

 $nl = \alpha/(v_l \cdot q_l) = 4.4 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$. Ein gesunder Mensch verfügt über 0.4 bis $1 \cdot 10^7$ Leukozyten pro cm³. Der hier angenommene Entzündungsherd würde also geheilt.

Auflösungsvermögen der Augen

Stichworte: Bogenmass, Beugungsgrenze

<u>Aufgabe a</u>: Bestimme experimentell das Auflösungsvermögen deiner Augen im Bogenmass und in Bogenminuten. Wie nahe liegt der Wert an der Beugungsgrenze?

<u>Lösung</u>: Zeichne 2 senkrechte Linien mit Abstand d = 2 mm und messe die Distanz aus welcher du sie gerade noch getrennt erkennst. Sie beträgt wahrscheinlich ca x = 5 m. Daraus folgt für das Auflösungsvermögen $\theta = d/x = 4$ 10^{-4} = 1.4 Bogenminuten.

Im Spiegel des hell erleuchteten Badezimmers misst man einen Pupillendurchmesser von dp = 5 mm . Die Wellenlänge von grünem Licht (bei welchem man am besten sieht) beträgt λ =500 Å = 5 10^{-8} m . Die Beugungsgrenze liegt somit bei λ/d = 10^{-5} , d.h. das Auflösungsvermögen unserer Augen liegt ca ein Faktor 40 über dem Beugungsminimum.

Stichworte: Abbildungsgesetz

<u>Aufgabe b</u>: Wie gross ist der Abstand zwischen 2 Seezellen (Stäbchen) in mm und wieviele Zellen weist die Netzhaut auf ?

$$b = \theta \cdot da = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8 \mu \text{m}$$
.

Die Netzhaut bedeckt ca 1/4 der Augensphäre, womit die Anzahl n der Stäbchen $n=d_a^2/b^2=6.310^6$. Der richtige Wert ist 6 Millionen und der Stäbchenabstand im Augenzentrum ist 2 Mikron, nimmt aber gegen die Peripherie zu.

Grenzempfindlichkeit der Augen

fgrenz:=flux: 10
$$\frac{-(m1-m2)}{2.5}$$
 \blacktriangleright 1.5 \mathbf{E} -11: $\frac{-kg}{-s^3}$. fgrenz \blacktriangleright _W: $_cm^{-2}$ \blacktriangleright 1.5 \mathbf{E} -15: $\frac{-W}{_cm^2}$

Das ist die Lichtleistung, die wir gerade noch erkennen können.

Stichworte: Strahlensatz, Detektionsschwelle Auge

 $\underline{\text{Aufgabe } b}$: Wäre es möglich, mit einem grünen Laser von p=10 W Dauerleistung und Strahldivergenz 1 mrad einem Astronauten auf dem Mond codierte Signale (Morse) zu übermitteln?

Lösung:

Der Laser beleuchtet auf dem dm:=3.84·10⁵· _km ► 3.8E8· _m entfernten Mond eine Fläche von

$$\mathbf{fl} := \left(\frac{\mathbf{dm}}{2} \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \pi + 1.2 \mathbf{E} 11 \cdot \underline{m}^2$$
.

Die Atmosphäre schwächt den Laserstrahl um 30 %. Somit ist die Leistungsdichte des Lasers auf dem Mond :

$$1d := \frac{0.7 \cdot p}{f1} + 6.E \cdot 11 \cdot \frac{kg}{s^3}$$
. Das ist $\frac{1d}{fgrenz} + 4.1E0$ also ca 4 mal mehr als die Grenzempfindlichkeit, und der

Astronaut würde die Signale knapp erkennen.

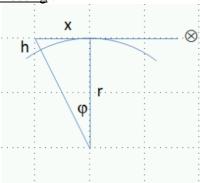
Wir sehen übrigens die Mondscheibe unter einem Winkel von $\frac{3476 \cdot 10^3}{384000}$ $\stackrel{\bullet}{=} 9.1$ E0 mrad oder $\frac{3476 \cdot 180 \cdot 60.}{384000 \cdot \pi}$ $\stackrel{\bullet}{=} 3.1$ E1

Bogenminuten (unser ausgestreckter senkrechter Zeigefinger deckt den Mond zweimal ab). Man müsste also den Laser sorgfältig auf den Standort des Astronauten richten.

Erdumfang

Stichworte : Geometrie, Näherungen sin $\phi \simeq \phi$ für kleine ϕ und $(1+\epsilon)^n \simeq 1+n$ ϵ für $\epsilon << 1$ Aufgabe : Man kann den Erdumfang auf < 10 % genau schätzen, indem man sich an einer W-Küste des Meeres abends auf den Boden legt und feststellt, wann der letzte Strahl der untergehenden Sonne gerade noch sichtbar ist. Dann lässt man eine Stoppuhr laufen, steht rasch auf und hält sie an, wenn man wieder vom letzten Strahl getroffen wird. Die so gemessen Zeit liegt zwischen 10 und 30 Sekunden je nach geographischer Breite. Wie gelangt man mit dieser Zeit zur Schätzung des Erdumfangs ?

Lösung:



Die Sonne dient nur als Referenzpunkt im Raum. Bis die stehende Person der Grösse $\mathbf{h}:=170^{\circ}$ _cm $^{\triangleright}$ 1.7 $\mathbf{E}0^{\circ}$ _m nach beispielsweise $\mathbf{t}:=23^{\circ}$ _s $^{\triangleright}$ 2.3 $\mathbf{E}1^{\circ}$ _s wieder den letzten Sonnenstrahl erblickt, hat sich die Erde um den Winkel

beispielsweise
$$\mathbf{t}:=23^{\circ}_{-}\mathbf{s} + 2.3\mathbf{E}1^{\circ}_{-}\mathbf{s}$$
 wieder den letzten Sonnenstrahl erblickt, hat sich die Erde um den Winkel (Bogenmass) $\phi:=\frac{2^{\circ}\pi^{\circ}\mathbf{t}}{8.64^{\circ}10^{4}^{\circ}_{-}\mathbf{s}} + 1.7\mathbf{E}^{-3}$ gedreht; denn ein voller Tag hat 86400 sec. Aus der Figur kann man die $8.64^{\circ}10^{4}^{\circ}_{-}\mathbf{s}$

Beziehungen sin $\phi \simeq \phi = x/(r+h)$ sowie $x^2 = (r+h)^2 - r^2 \simeq 2rh$ ablesen. Daraus folgt $\phi^2 \simeq 2rh/(r+h)^2 \simeq 2h/r$.

Dies gilt aber nur in Aequatornähe. Bei einem Standort mit geogr. Breite von z.B. θ:=46 ► 46 Grad muss man r mit cos θ multiplizieren und h durch cos θ dividieren.

Somit
$$\mathbf{r} := \frac{2 \cdot \mathbf{h}}{\phi^2 \cdot \left(\cos(\theta)\right)^2} + 6.5 \mathbf{E} 6 \cdot \mathbf{m} \text{ km}$$

In der Annahme, dass der Zeitmessfehler < 70.5 sec sei, ergibt sich ein Schätzfehler von ca 10 %.

Cola Büchse

Stichworte: Aluminium, Recycling, Getränkedosen

<u>Aufgabe</u>: In einigen Ländern lohnt es sich, leere Alu-Büchsen zu sammeln, und man erhält dafürt ca 0.05 SFr pro Büchse, weil der Recyclingprozess wesentlich weniger Energie benötigt als das Herstellen von neuem Aluminium. Wieviel Energie lässt sich so sparen, und ist der genannte finanzielle Anreiz gerechtfertigt?

<u>Lösung</u>: Neues Aluminium wird aus Bauxit gewonnen, indem zuerst Aluminiumhydroxid im Brennofen zu Aluminiumoxyd aufbereitet und dann mittels elektrolytischer Reduktion in Al und CO_2 getrennt wird. Der gesamte Prozess (Bergbau, Transporte, Umwandlung Al(OH)₃ zu Al₂O₃ und Elektrolyse Al₂O₃ zu Al und CO_2 erfordert pro kg reines Aluminium $e_n = 69 \text{ kW}$.

Recycling : Die Verdampfungswärme von Aluminium beträgt c:=293·10³· _J· _mol ⁻¹ ► 2.9E5· ___ kJ/mol (Internet).

Wenn wir für Sammeltransporte, Reinigung und Wärmeverluste 20 % der Schmelzenergie rechnen, erhalten wir für

den Recyclingaufwand
$$er := \frac{1.2 \cdot e \cdot _mol}{27 \cdot _gm} + 1.3 E7 \cdot \frac{_m^2}{s^2}$$
.

Der Recyclingaufwand ist also nur $\frac{\mathbf{er}}{\mathbf{en}}$ · 100 ► 5.2**E**0 Prozent vom Primäraufwand.

Eine leere Aludose wiegt **gew**:=13· _gm ► 1.3**E**-2· _kg.

Der Industriepreis pro kWh beträgt z.Z. $preis:=0.15 \cdot _kWh^{-1} + 4.2E-8 \cdot \frac{1}{J}$. Damit wird durch das Recyclen einer

Getränkedose **gew**· (**en-er**)· **preis** ► 1.3**E**-1 Fr gespart, also etwas mehr als das Doppelte des Sammelpreises – ein fairer Anreiz.

In der Schweiz werden jährlich ca m:=3500·_tonne * 3.5 \(\begin{align*} \begin{align*} \lambda \. \lambda \. \lambda \begin{align*} \lambda \. \lambda \. \lambda \. \lambda \begin{align*} \lambda \. \lamb

Ferien in Mauritius



In der Energie- und Oekologiedebatte kann es vorteilhaft sein, über Kennzahlen zum Flugverkehr zu verfügen. Wie verhält sich der Energieaufwand für einen Ferienflug nach Mauritius zum Anspruch einer 2000 Watt Gesellschaft?

Man benötigt dazu : Flugzeugtyp, Passagierzahl, Treibstoffverbrauch pro km, Brennwert von Kerosin (zum Umrechnen in kWh) und die Distanz Zürich - Mauritius längs eines Grosskreises. Mit Zahlen aus dem Internet schätzen wir wie folgt :

Nonstop-Flug mit Airbus 330, vollbesetzt : Anzahl Passagiere
$$\mathbf{np}$$
:=335 * 335 , Tankinhalt Kerosin \mathbf{vt} :=100_m³ * 100. · _m³ , Dichte Kerosin \mathbf{p} :=800_ $k\mathbf{g}$ _m³ * 800. · _kg_ _m³ , Brennwert Kerosin \mathbf{bw} :=43 · 106_ J _kg $^{-1}$ * 4.3 \mathbf{E} 7 · _m² , Reichweite \mathbf{rw} :=104_km * 1. \mathbf{E} 7 · _m , Distanz Zürich \leftrightarrow Mauritius \mathbf{d} :=2 · 8.7 · 10³_km * 1.74 \mathbf{E} 7 · _m

Mit diesen Zahlen ergibt sich für den Energieverbrauch einer Person \mathbf{ev} := $\frac{\mathbf{vt} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{bw} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{np} \cdot \mathbf{rw}}$ * 1.79 \mathbf{E} 10 · _J

Der Energiekredit einer Person in der 2000 Watt Gesellschaft beträgt \mathbf{ek} :=2_ kW · 365 · 24_hr * 6.31 \mathbf{E} 10 · _J

Die Flugreise verbraucht also bereits $\frac{\mathbf{ev}}{\mathbf{ek}}$ * 0.283 des Jahreskredits an Energie.

Solche Ferienreisen wären also in einer 2000 Watt Gesellschaft mit einem Jahreskredit von 17600 kWh pro Person kaum mehr möglich; denn Langstreckenflüge mit direktem Einsatz von erneuerbaren Energien sind zurzeit völlig unbekannt. Man müsste dazu wohl grosstechnisch mit Solartechnik CO2 in Treibstoff umwandeln können.

Dr. Alfred Roulier 3176 Neuenegg, Schweiz a.roulier@bluewin.ch