Thème : pensées algébrique et algorithmique TI-Collège Plus Solaire

Pattern

S. ETIENNE

Résumé : les patterns sont des objets mathématiques pour développer les pensées algébrique et algorithmique suivant le type de pattern, et notamment sa règle de construction. Dans cette activité, les élèves travaillent autour de différents patterns.

Niveau : à partir de la classe de 6e.

Mots-clés : pensée algébrique ; pensée algorithmique ; pattern ; calcul numérique.

Fiches professeur et élève, compléments : flasher le code 2D ou cliquer dessus

Compétences visées

Chercher : « S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture. » et « Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. »

Modéliser : « Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques). »

Raisonner : « Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation. »

Communiquer : « Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. »

Situation-problème

Depuis les colliers de perles de maternelle aux suites de nombres vues au lycée, certaines structures ont des aspects évolutifs ou répétitifs, comme les premiers rangs de la série de tartes ci-contre, formant des éléments liés les uns aux autres par une règle.

Le rang 1 est défini ici par l'objet le plus à gauche, suivi des rangs 2 et 3 vers la droite.

Crédit : S.E.

On considère le pattern visuel défini ci-dessus.

1. En expliquant votre règle, représenter le rang 4.

En utilisant la règle choisie en classe, répondre aux questions suivantes.

2. En expliquant votre démarche, calculer le nombre de tartes au rang 10.
3. En expliquant votre démarche, calculer le nombre de tartes au rang 100.
4. En expliquant votre démarche, trouver une façon de calculer le nombre de tartes à n'importe quelle étape. (On attend, suivant le niveau, une phrase et/ou une formule)
5. Déterminer alors le nombre de tartes pour les rangs 78 et 295.
6. [Pattern évolutif] Est-il possible d'avoir un élément à 62 tartes ? Et 799 tartes ?
7. [Pattern répétitif] A partir de quel rang, au minimum, le nombre de 5 000 tartes sera-t-il dépassé ?

Scénario pédagogique

- Cette activité est de type tâche flash ou intermédiaire suivant le protocole suivi et la fréquence de ce type d'activité. Bien que toutes les questions ne puissent se traiter ainsi en classe de 6e, il peut être intéressant de développer cette pratique de question flash au plus tôt sur les patterns afin de développer la pensée algébrique.
- Ce pattern est déjà de niveau intermédiaire et il serait profitable aux élèves de commencer par des exemples plus simples. Davantage d'informations sur les quatre premières questions et d'exemples sur les patterns se trouvent dans le « guide bleu » collège sur la résolution de problèmes[1], (2021, p. 111) ou sur le site pédagogique de Nice[2].
- La première question est une question de créativité en mathématiques, toutes les règles correctement justifiées par les élèves peuvent être correctes. Il faut alors s'entendre avec les élèves sur une règle commune pour traiter les autres questions. Il y a deux types de pattern :
  - répétitif, où après une certaine période, on répète les mêmes éléments dans le même ordre ou dans un autre ordre structuré et calculable : par exemple, pour ce pattern, avec une période de 3, l'élément de rang 4 serait identique à celui de rang 1, soit 4 tartes, celui de rang 5 identique à celui de rang 2, soit 9 tartes et ainsi de suite ;
  - évolutif, dans lequel les éléments sont modifiés de proche en proche avec une règle établie : par exemple, pour ce pattern, à chaque rang supplémentaire, on trouve une barre de 4 tartes de plus et une tarte de plus, en partant de 4 tartes au rang 1. Visuellement, il est possible de modifier l'organisation des éléments pour faire apparaître un rectangle de dimensions n par 5 auquel on enlève 1, où n est le numéro du rang, soit $5n - 1$. L'idée de pouvoir compter en utilisant un nombre figuré de type rectangle est à privilégier.
- La calculatrice peut servir ici à tester des valeurs ou à effectuer de nombreux calculs rapidement.
- Une courte vidéo est disponible en scannant le code 2D ci-contre d'utilisation de la calculatrice TI-Collège Plus sur le thème de la division décimale et de la division euclidienne.
- **Pour les élèves les plus en avance :** il est possible de leur proposer un ou plusieurs prolongements, décrits en fin de fiche.

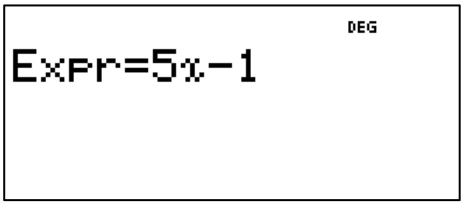
[1] https://eduscol.education.fr/document/13132/download
[2] https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/plan-mathematiques-un-exemple-dactivite-autour-des-patterns/

Procédure possible

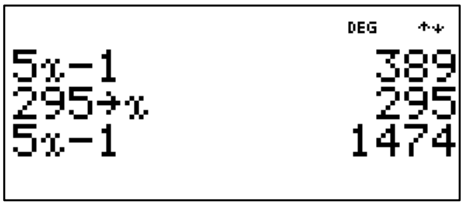
Voici quelques pistes pouvant aider à la résolution.

Dans le cas où la règle associée à l'issue de la première question est de type évolutif comme spécifié dans la partie précédente :

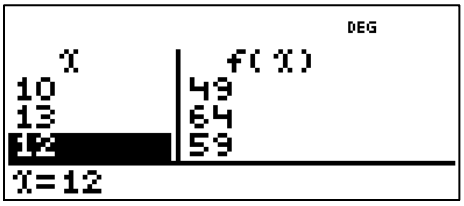
- Une fois la question 4 établie, la formule $5n-1$, où n est le numéro du rang, est disponible pour être utilisée en tant qu'expression ou fonction dans la calculatrice TI-Collège Plus. Appuyer sur [2nde] [f(x)] [5] [x] [−] [1] [entrer] afin de définir l'expression, valider et entrer le numéro du rang, ce qui permet d'obtenir 389 et 1 474 respectivement pour les rangs 78 et 295.

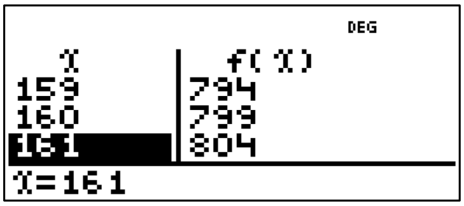


- Il est possible de rentrer directement les instructions sur l'écran d'accueil en utilisant la touche variable, avec la séquence : [2] [9] [5] [sto▸] [x] [entrer] [5] [x] [−] [1] [entrer]. Le passage de n à x (notion de variable muette) peut être une source d'incompréhension de la part des élèves.



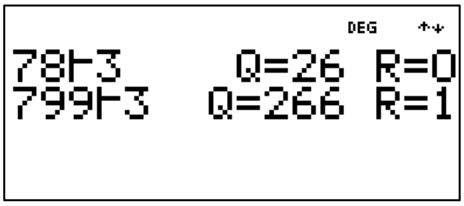
- Pour la question 6, il devient difficile de tester un grand nombre de valeurs par ce biais, et l'introduction de la notion de fonction prend du sens. Dans cet exercice, inverser la fonction est assez simple, ce n'est pas toujours le cas. Appuyer sur [f(x)] [5] [x] [−] [1] pour écrire la fonction, valider et choisir selon les élèves une table automatique « `Auto` », ou une table renseignée par l'utilisateur « $x=$? ». Après validation et apparition de la table de valeurs, il suffit de descendre jusqu'aux valeurs demandées ou rentrer les valeurs à tester. Sur le premier écran ci-contre, l'utilisateur a testé pour 10, puis 13 et enfin 12 pour se rendre compte que 62 n'est pas atteignable. Attention aux confusions entre le numéro de rang et le nombre de tartes, certains élèves vont chercher 62 comme numéro de rang. Dans le second écran, c'est table automatique qui a été choisie.



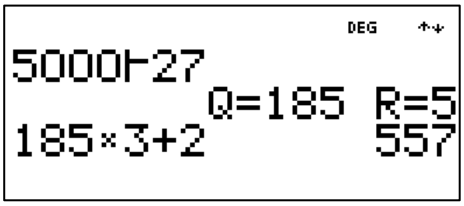


Dans le cas où la règle associée à l'issue de la première question est de type répétitif comme spécifié dans la partie précédente, alors il sera nécessaire de considérer le reste de la division euclidienne du numéro de rang par la période, ici 3 :

- Ainsi, dans la question 5, il faudra appuyer sur [7] [8] [2nde] [÷] [3] [entrer] pour avoir un reste de 0, ce qui signifie que c'est de la forme $3p$, identique au rang 3, il y aura donc 14 tartes. Pour 799, le reste est 1, donc il y aura 4 tartes. Le reste 0 peut engendrer une difficulté auprès des élèves.



- Pour la question du dépassement de 5 000 tartes, Il peut être intéressant de s'intéresser à un invariant : la somme des tartes des 3 premiers rangs ($4+9+14=27$) se répète avec une période de 3. Par conséquent, en prenant la division euclidienne de 5 000 par 27, le quotient est 185 avec un reste de 5. Ces nombres nécessiteront peut-être un étayage : 185 désigne le nombre de

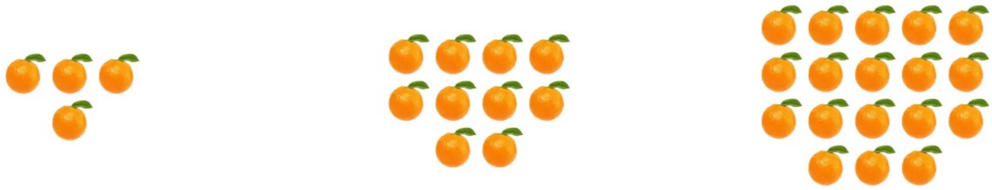


cycle de 3 rangs et 5 est le nombre de tartes restantes sur les 27 tartes du cycle. Or le premier rang du cycle est 4, cela signifie qu'il faudra deux rangs de plus pour dépasser le nombre cible.

Prolongements possibles

Voici des pistes pour les élèves les plus rapides ou qui ont envie de prolonger le travail :

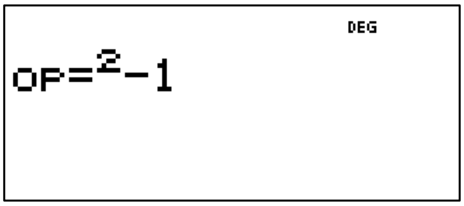
- On considère le pattern évolutif suivant, d'après [Visual Patterns 356] by Fawn Nguyen (CC-BY) :



Rang 1 Rang 2 Rang 3

Reprendre alors les questions de l'énoncé en changeant tarte par orange. La formule comportera ici le carré du rang, il est préférable de donner un tel pattern à partir de la 4e.

- La plupart des formules issues d'un pattern évolutif peuvent aussi se programmer avec la touche « opérateur constant » en appuyant sur [2nde] [op]. Un jeu sérieux peut alors consister à programmer cette touche par un premier élève. Un deuxième élève lui indique un nombre en entrée et reçoit de la part du premier le nombre en sortie, ceci afin de découvrir l'opérateur défini. Par exemple, ici, c'est l'expression $x^2 - 1$ qui a été défini en appuyant sur [x^2] [−] [1] [entrer].



Sur l'écran suivant, après appui sur [annul], des tests pour déterminer cette expression ont été réalisés. Attention à l'utilisation de nombres négatifs par exemple, il est nécessaire d'avoir des parenthèses au risque d'une erreur de priorité, comme pour la dernière ligne en voulant entrer le nombre -6. Toutes les expressions ne sont cependant pas réalisables, comme pour le pattern juste ci-dessus.