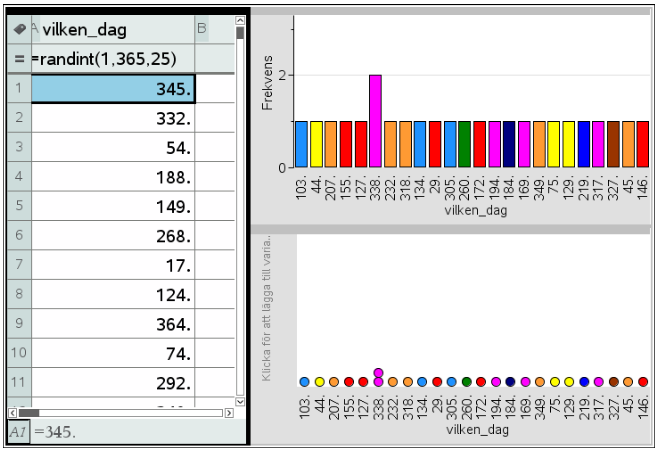
Födelsedagsparadoxen

Ett av de mest klassiska problemen i sannolikhetsläran som är lätt att demonstrera i en skolklass.

Den här övningen passar bäst att göras i kurs 5 när fakultetsbegreppet är bekant. Man kan dock även göra den tidigare om eleverna har en viss vana att arbeta med kalkylprogram.

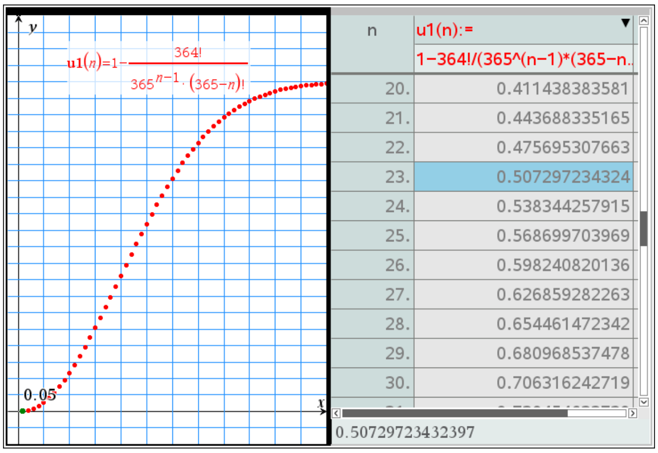
Sid 2: Börja med att göra ett antal simuleringar. Om man placerar markören i kalkylarket på någon rad och trycker på Ctrl r får man nya slumptalsserier. Pröva detta ett antal gånger och se resultatet. Vi delar sidan och visa både punktdiagram och stapeldiagram. Tänk på att du måste ha ett namn på listan i kalkylarket för att kunna skapa diagram.

Man upptäcker vid simuleringen att man ibland får dubbletter av par som har gemensamma födelsedagar.

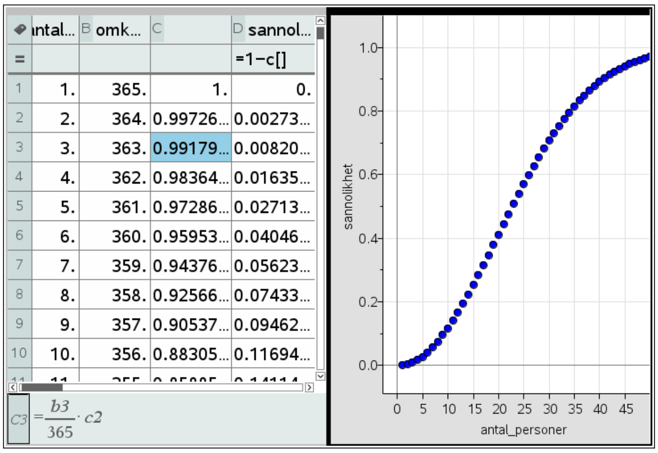


Sid 3-4: Här börjar resonemanget omkring beräkningen av sannolikheterna. Vi visar i steg för steg hur vi beräknar sannolikheten med 2, 3 … personer. Begreppet fakultet införs. Ett alternativ utan detta begrepp är att utföra beräkningen i kalkylark. Vi visar detta på sid 6 och 7.

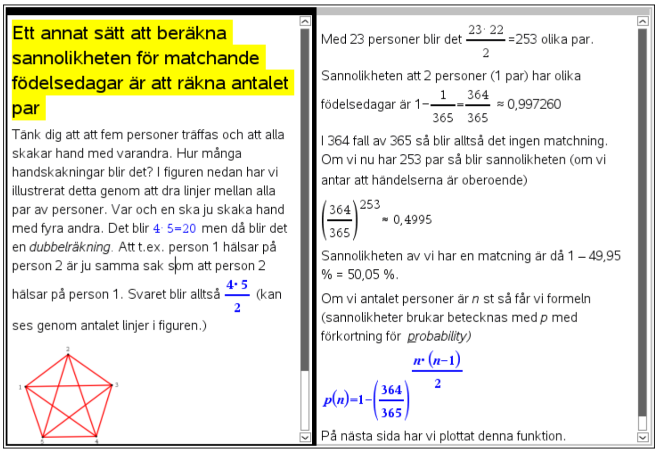
Sid 5: här har vi ritat sannolikhetskurvan som en talföljd eftersom den oberoende variabeln *n* bara kan anta heltalsvärden. Du kan alltså använda fakultet i uttrycket. Om du klickar på formeln ser du inställningarna.



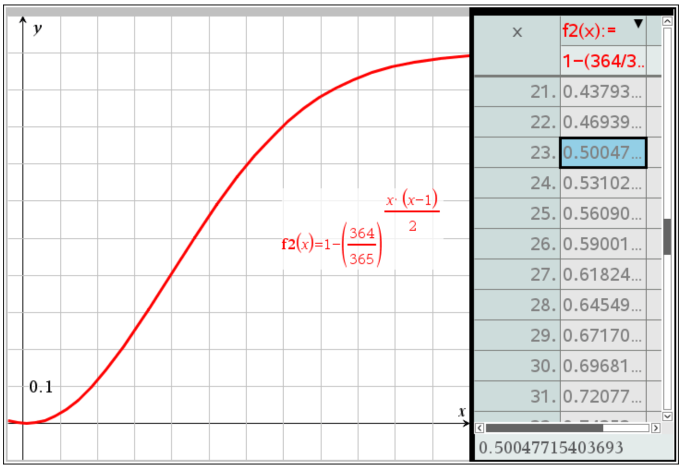
Sid 6-7: Här utför vi beräkningarna i ett kalkylark istället. Vi ritar ett diagram i Data&Statistik-applikationen. Kräver inte att man använder begreppet fakultet. Vi förklarar på sid 6 hur vi bygger upp kalkylarket.



Sid 8-9: Här förklarar vi med ett annat resonemang. Man antar då att händelserna är oberoende.



Vi ritar här sannolikhetskurvan som en vanlig funktion.

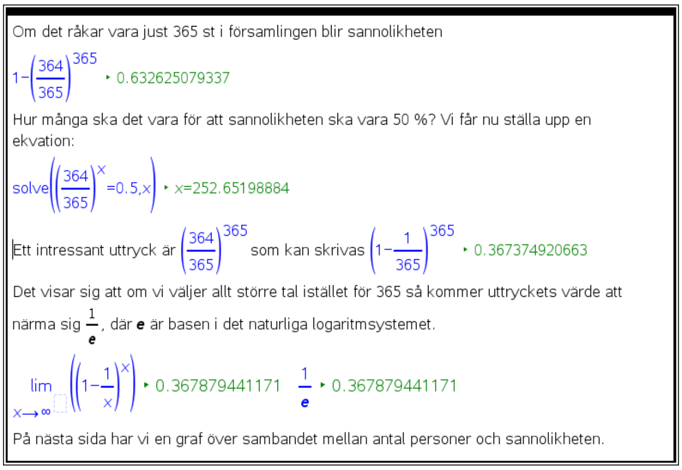


Problem 2:

Här har vi en annan variant av på problemet:

Tänk dig att du befinner dig inför en stor församling med 300 deltagare. Du råkar fylla år just idag och nu undrar du om det är någon eller några fler som också råkar fylla år just idag. Du kan ju naturligtvis ropa ut till församlingen och fråga men först vill du göra en kalkyl hur stor sannolikheten är. Hur ska du tänka? Problemet är hämtat från Professor Allan Guts bok Sant eller sannolikt.

Sid 2-3


Om det råkar vara just 365 st i församlingen blir sannolikheten

$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{365}$ ▸ 0.632625079337

Hur många ska det vara för att sannolikheten ska vara 50 %? Vi får nu ställa upp en ekvation:

$\text{solve}\left(\left(\frac{364}{365}\right)^{x}=0.5,x\right)$ ▸ $x=252.65198884$

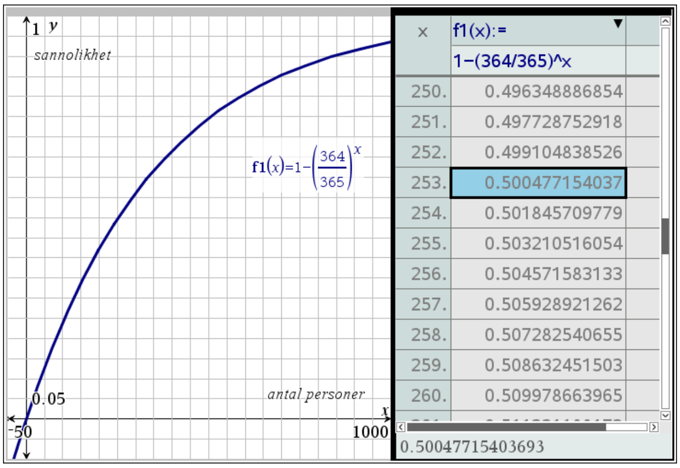
Ett intressant uttryck är $\left(\frac{364}{365}\right)^{365}$ som kan skrivas $\left(1-\frac{1}{365}\right)^{365}$ ▸ 0.367374920663

Det visar sig att om vi väljer allt större tal istället för 365 så kommer uttryckets värde att närma sig $\frac{1}{e}$, där e är basen i det naturliga logaritmsystemet.

$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right)$ ▸ 0.367879441171 $\frac{1}{e}$ ▸ 0.367879441171

På nästa sida har vi en graf över sambandet mellan antal personer och sannolikheten.

Här kommer man in på exponentialfunktioner och basen i det naturliga logaritmsystemet, ***e***.



Ska du vara 95 % säker på att någon har samma födelsedag som du krävs ca 1100 personer i församlingen.