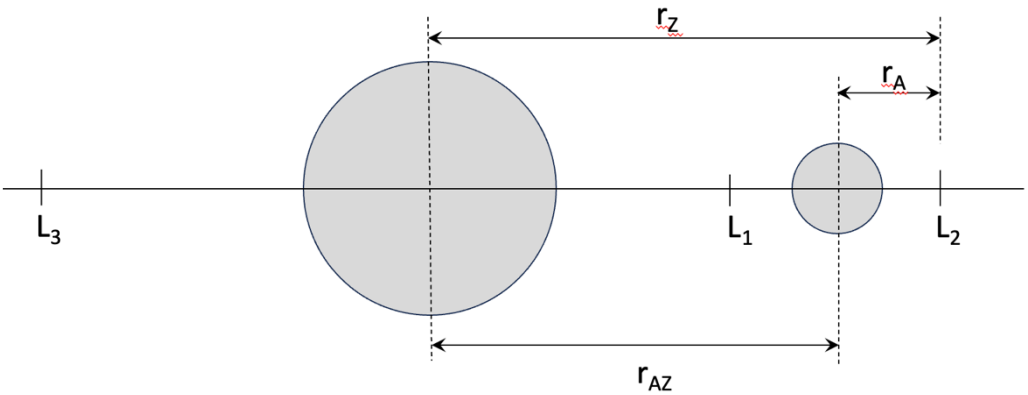
Berekening Lagrangepunt L2

We gaan uit van de volgende vereenvoudigingen:

- Het zwaartepunt van het zon-aarde systeem ligt in het middelpunt van de zon.
- De baan van de aarde om de zon is cirkelvormig.
- De massa van het object in punt L2 is verwaarloosbaar klein ten opzichte van de massa van de aarde.



Gegeven:

Gravitatie constante:	$G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$
Massa van de zon:	$m_Z = 1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Massa van de aarde:	$m_A = 5.97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Massa telescoop:	$m_{Tel} = \cdots\ \mathrm{kg}$
Afstand aarde-zon:	$r_{AZ} = 1.466 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$
Omloopsnelheid aarde om de zon (m/s):	$v_A = \sqrt{G \cdot \frac{m_Z}{r_{AZ}}} = 29786\ \mathrm{m/s}$
Afstand L2-zon:	r_Z
Afstand L2-aarde:	r_A

In punt L2 geldt dat voor de telescoop de radiale kracht gelijk is aan de zwaartekracht (aarde en zon).

De radiale kracht is gelijk aan: $F_r = m \cdot a = m_{Tel} \cdot \frac{{v_{Tel}}^2}{r_Z}$

(v_{Tel} is de omloopsnelheid van de telescoop om de zon)

De zwaartekracht van de aarde is: $F_A = G \cdot \frac{m_A \cdot m_{Tel}}{(r_Z - r_{AZ})^2}$

De zwaartekracht van de zon is: $F_Z = G \cdot \frac{m_Z \cdot m_{Tel}}{{r_Z}^2}$

Er geldt: $F_r = F_A + F_Z$

Dus

$$m_{Tel} \cdot \frac{{v_{Tel}}^2}{r_Z} = G \cdot \frac{m_A \cdot m_{Tel}}{(r_Z - r_{AZ})^2} + G \cdot \frac{m_Z \cdot m_{Tel}}{{r_Z}^2}$$

$$\frac{{v_{Tel}}^2}{r_Z} = G \cdot \frac{m_A}{(r_Z - r_{AZ})^2} + G \cdot \frac{m_Z}{{r_Z}^2} \qquad (1)$$

De omlooptijd T_{Tel} van de telescoop om de zon is gelijk aan:

$$T_{Tel} = \frac{2\pi \cdot r_Z}{v_{Tel}}$$

De omlooptijd T_A van de aarde om de zon is gelijk:

$$T_A = \frac{2\pi \cdot r_{AZ}}{v_A}$$

In L2 geldt $T_A = T_{Tel}$, dus:

$$\frac{2\pi \cdot r_Z}{v_{Tel}} = \frac{2\pi \cdot r_{AZ}}{v_A} \quad \Longrightarrow \quad v_{Tel} = \frac{v_A \cdot r_Z}{r_{AZ}}$$

Invullen in (1):

$$\frac{{v_A}^2 \cdot r_Z}{{r_{AZ}}^2} = G \cdot \frac{m_A}{(r_Z - r_{AZ})^2} + G \cdot \frac{m_Z}{{r_Z}^2} \qquad (2)$$

Deze vergelijking moet opgelost naar r_Z.
Dit is echter niet zo eenvoudig. Oplossen kan eigenlijk alleen maar met numerieke methoden.

1. Met behulp van de TI-Nspire nsolve functie

In onderstaande figuur staat een bijbehorende *Notes*-pagina.

Massa aarde (kg):	$\mathbf{ma}:=5.97\text{E}24$
Massa zon (kg):	$\mathbf{mz}:=1.989\text{E}30$
Afstand aarde−zon (m):	$\mathbf{raz}:=149.6\cdot 10^{9}$
Gravitatie constante Nm^2/kg^2:	$\mathbf{gr}:=6.673\text{E}^{-}11$
Omloopsnelhied aarde (m/s):	$\mathbf{va}:=\sqrt{\mathbf{gr}\cdot\frac{\mathbf{mz}}{\mathbf{rgaz}}} = 29786.$

$$\mathbf{rz}:=\text{nSolve}\left(\frac{\mathbf{va}^2\cdot r}{\mathbf{raz}^2}=\mathbf{gr}\cdot\frac{\mathbf{ma}}{(r-\mathbf{raz})^2}+\mathbf{gr}\cdot\frac{\mathbf{mz}}{r^2},r\right) = 1.51101\text{E}11$$

$$\mathbf{ra}:=\mathbf{rz}-\mathbf{raz} = 1.50122\text{E}9$$

In de laatste regel is de afstand van de L2 tot de aarde berekend. Deze is:
$1{,}501\cdot 10^9\ \text{m} \ = \ 1{,}501\cdot 10^6\ \text{km}$ ofwel: 1,501 miljoen km.

2. Met behulp van Python

De vergelijking (2) kan geschreven worden in de vorm:

$$G\cdot\frac{m_A}{(r_Z-r_{AZ})^2}+G\cdot\frac{m_Z}{{r_Z}^2}-\frac{{v_A}^2\cdot r_Z}{{r_{AZ}}^2}=0$$

Het linker deel kan gezien worden als een functie *f* van *r*:

$$f(r)=G\cdot\frac{m_A}{(r-r_{AZ})^2}+G\cdot\frac{m_Z}{r^2}-\frac{{v_A}^2\cdot r}{{r_{AZ}}^2}$$

De oplossing van $f(r)=0$ geeft dan de afstand *r* van L2 tot de zon.

Om in Python het nulpunt van f te vinden gebruiken het zogenaamde verdeel en heers algoritme (devide and coquer algorithm).
Dit algoritme gaat ervan uit dat de functie continu is.
Het algoritme werkt als volgt:

Neem een waarde e voor de nauwkeurigheid van de oplossing.

1. Begin met een interval (links, rechts) waarbinnen het nulpunt zich bevindt.
2. Bereken het midden m van dit interval.
3. Is de breedte van het interval kleiner dan e, dan is m de oplossing.
4. Zo niet, ga dan na of de functiewaarden van links en van m tegengesteld van teken zijn.
5. Als dat het geval is herhaal dan het proces met het interval (links, m) anders met het interval (m, rechts).

We gaan uit van een nauwkeurigheid van 100 km (100000 m)

Het programma begint met het importeren van de sqrt-functie om de wortel te kunnen gebruiken.
Dan krijgen de verschillende variabelen de bijbehorende waardes en wordt de functie f gedefinieerd.

```
from math import sqrt

gr = 6.673e-11
mz = 1.989e30
ma = 5.97e24
raz = 1.496e11
va = sqrt(gr*mz/raz)

def f(r):
  return gr*ma/(r-raz)**2 + gr*mz/r**2 - va**2*r/raz**2
```

De functie *nulpunt (links, rechts)* voert het beschreven algoritme uit.
Er zijn twee verschillende versies voor deze functie, een iteratieve versie en een recursieve versie:

Iteratief	**Recursief**

`def nulpunt(links, rechts):`
`  e = 100000`
`  m = (links + rechts)/2`
`  while abs(rechts - links) > e:`
`  if f(links)*f(m) <= 0:`
`  rechts = m`
`  else:`
`  links = m`
`  m = (links + rechts)/2`
`  return m`
	`def nulpunt(links, rechts):`
	`  e = 100000`
	`  m = (links + rechts)/2`
	`  if abs(rechts - links) < e:`
	`  return m`
	`  else:`
	`  if f(links)*f(m) <= 0:`
	`  return nulpunt(links, m)`
	`  else:`
	`  return nulpunt(m, rechts)`

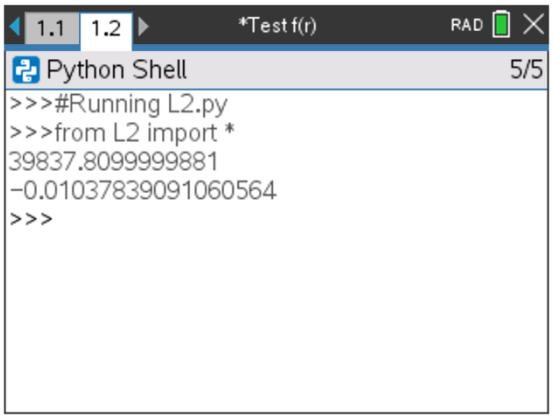
Als de oplossing gevonden is kan ook de afstand van L2 tot de aarde worden berekend.

```
rz = nulpunt(raz+100000,2*raz)
ra = rz - raz

#afronden naar miljoenen km:
rz = round(rz / 1e+09, 3)
ra = round(ra / 1e+09, 3)

print(); print()
print("Positie van Lagrangepunt L2")
print("Afstand tot de zon in miljoenen km:", rz)
print("Afstand tot de aarde in miljoenen km:", ra)
```

We gaan ervan uit dat het Lagrangepunt L2 minimaal 100 km verder van de zon ligt dan de aarde maar niet verder dan 2 maal die afstand. In het programma wordt daarom voor de linker grens raz+100000 genomen en voor de rechter grens 2*raz.
Dit moeten wel waarden zijn zo dat de bijbehorende functiewaarden tegengesteld van teken zijn.

Controle:

```
links = raz + 100000
rechts = 2 * raz
print(f(links))
print(f(rechts))
```



Uitvoering van het volledige programma Levert de volgende uitkomst op:

Dit programma geeft voor L2 ook 1,501 miljoen km van de aarde.