Arbeta med CAS – tangent given och funktion okänd

I denna aktivitet så utnyttjar vi några av TI-Nspire´s CAS-funktioner för att lösa ett ganska svårt problem. I Nspire-dokumentet går vi i flera steg och i detalj igenom hur man kan lösa problemet. Detta dokument är tänkt som lösningsmall för lärare. Vissa elever kan säkert lösa problemet utan någon hjälp medan de flesta säkert behöver hjälp med tips i flera steg.

Arbeta med CAS – finna funktioner utifrån en given tangent

I det problem vi går igenom i detta dokument, och som handlar om att finna andragradsfunktioner som matchar en tangent, så tar vi upp hur man kan arbeta ***symboliskt*** med olika beräkningsverktyg. Funktionerna som vi inte känner till kan då skrivas på formen $a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Problemet är tänkt som inspiration för dig som vill lära dig mer hur man kan arbeta med CAS, dvs symbolhanterande verktyg!

Så här lyder problemet

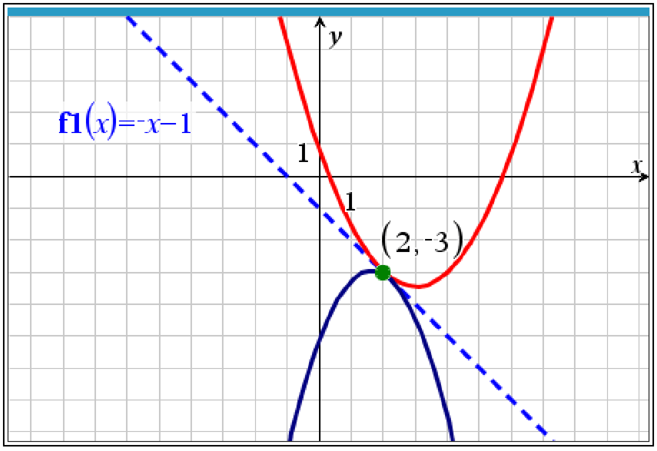
Tangenten i en viss punkt på en andragradskurva är given men vilken är funktionen?

En tangent till en andragradsfunktion har ekvationen $y=-x-1$. Tangeringspunkten har koordinaterna $(2, -3)$. Bestäm funktioner som uppfyller villkoren ovan.

Det här är ju tvärtom som det brukar vara. Ofta känner man funktionen och ska bestämma något om tangenten. Kan det vara så att det finns flera funktioner som uppfyller villkoret?

Se till att eleverna verkligen förstår problemet. Man kan börja med att rita upp tangenten och tangeringspunkten och sedan dra en andragradsfunktion och försöka passa in den så att det ser ut som den har tangenten y=-x-1 i punkten (2, -3). Börja då med att mata in funktionen $y=x^2$ och sedan kan du ”dra” i kurvan så att det ser ut som linjen är en tangent i den givna punkten.

I nästa spalt har vi plottat två kurvor som ungefär passar in. Man inser alltså snabbt att det finns flera möjliga funktioner.



Problemet nu är att hitta ett *allmänt och exakt uttryck* för funktioner som passar in.

Genom att lösa ekvationen nedan får man ett uttryck som ska ha värdet 2 (*x*-koordinaten för tangeringspunkten). Här har vi alltså utnyttjat CAS-funktionen *solve* för att lösa ekvationen. För att eleverna ska känna igen sig så kan man skriva om den som

$$x^2+\frac{b+1}{a}\cdot x+\frac{c+1}{a}=0$$

Funktionen, som vi kallar $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, och tangenten $y=-x-1$ har en ***gemensam*** punkt, nämligen $(2, -3)$. Här kan vi ställa upp en ekvation för att finna ett uttryck för x-koordinaten för skärningspunkten. Vi löser sedan ekvationen med funktionen ***solve***.

Observera att ordningen på termerna i lösningarna är annorlunda än så som de brukar presenteras i läroböcker och formelsamlingar.

$$\text{solve}(a\cdot x^2+b\cdot x+c=-x-1,x) \blacktriangleright x=\frac{\sqrt{(b+1)^2-4\cdot a\cdot(c+1)}-b-1}{2\cdot a} \text{ or } x=\frac{-\left(\sqrt{(b+1)^2-4\cdot a\cdot(c+1)}+b+1\right)}{2\cdot a}$$

Lösningen på förra sidan ger mycket information. Eftersom linjen och kurvan tangerar varandra så har vi en ***dubbelrot***, dvs. uttrycket under rottecknet i lösningarna har värdet **noll.**

Vi har då $(b+1)^2-4\cdot a\cdot(c+1)=0 \blacktriangleright (b+1)^2-4\cdot a\cdot(c+1)=0$ (1)

Eftersom rotuttrycket har värdet noll så vet vi då att

$\frac{-b-1}{2\cdot a}=2$ som kan skrivas

$a=-\frac{(b+1)}{4}$ (2)

Gå igenom med eleverna varför uttrycket under rottecknet måste vara noll när vi har en tangeringspunkt. Samtidigt vet vi också att uttrycket utanför rottecknet måste ha värdet 2.

På sid 5 visas att man med hjälp av *derivata* också kan komma fram till uttrycket $a=-\frac{b+1}{4}$.

Nu har vi två ekvationer. Den tredje ekvationen får vi genom att sätta in koordinaterna (2, 3) i andragradsuttrycket.

Vi känner också till y–koordinaten för tangeringspunkten. Den informationen kan vi också utnyttja. Vi sätter in värdena på x– och y–kooordinaten i uttrycket $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Vi får då:

$a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=-3$ ▸ $4\cdot a+2\cdot b+c=-3$ (3)

Då har vi tre ekvationer:

$(b+1)^2-4\cdot a\cdot(c+1)=0$	(1)
$a=-\frac{(b+1)}{4}$	(2)
$4\cdot a+2\cdot b+c=-3$	(3)

Vi får ett *ekvationssystem*. Nu ska vi testa vår CAS–motor hos TI–Nspire. ↦ **Gå till nästa sida**

Tre ekvationer, tre obekanta. En av ekvationerna innehåller dock inte alla tre obekanta. Vi matar in ekvationerna i systemet och trycker på enter.

Lös ekvationssystem finns bland algebra–verktygen. Man får en först upp dialogruta där man får fylla i antalet ekvationer och beteckningar för variablerna. Sedan skriver man in ekvationerna och trycker på enter.

$$\text{solve}\left(\begin{cases}(b+1)^2-4\cdot a\cdot(c+1)=0\\ a=\frac{-(b+1)}{4}\\ 4\cdot a+2\cdot b+c=-3\end{cases},\{a,b,c\}\right)$$

▸ $a=\frac{c2+1}{4}$ and $b=-(c2+2)$ and $c=c2$

Nu vet vi hur koefficienterna förhåller sig till varandra. Om t.ex. $c=3$ så är $a=(3+1)/4=1$ och $b=-3-2=-5$. Dessa samband ska vi utnyttja på ett smart sätt i grafappen.

Resultatet visar hur koefficienterna *a* och *b* beror av koefficienten *c*. detta betyder att vi kan mata in vår andragradsfunktion och använda skjutreglaget för parametern. När du matar in funktionsuttrycket så får du automatiskt en fråga om du vill ha ett skjutreglage.

Värdena på koefficienterna a, b och c i andragradsfunktionen hänger ihop och kan beskrivas med *en* parameter *k*. Vi vet ju detta

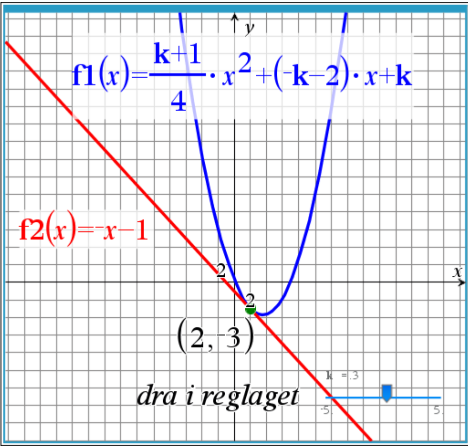
$a=\frac{c1+1}{4}$, $b=-(c1+2)$ **och** $c=c1$

Vi infogar nu ett skjutreglage på en grafsida och definierar funktionen så här:

$f(x)=\left(\frac{k+1}{4}\right)\cdot x^2+(-k-2)\cdot x+k$

Se nästa sida. Dra i reglaget och titta på värdena och kurvan.

Nu kommer höjdpunkten i denna aktivitet och man får betalt för mödan med alla ekvationer. Sidan är delad och till höger har vi en anteckningssida där vi infogat rutor för matematik och skrivit in koefficienterna



a–koefficienten:

$\frac{k+1}{4}$ ▸ 0.325

b–koefficienten:

$-k-2$ ▸ -2.3

c–koefficienten:

k ▸ 0.3

Genom att dra i reglaget så ser vi alla möjliga lösningar. Stora positiva och negativa värden på k ger väldigt ”spetsiga” kurvor. Du ställer in stegstorlek mm för reglaget genom att högerklicka på själva reglaget.

Här är två sidor som inte är med i Nspire-dokumentet. Vi går nu åt andra hållet och beräknar tangentens ekvation i punkten (2, -3) för funktionen (egentligen funktionerna).

Först definierar vi vår funktion:

$\text{funk}(x):=\frac{k+1}{4}\cdot x^2+(-k-2)\cdot x+k$

Vi deriverar densamma:

$\frac{d}{dx}(\text{funk}(x))$ ▸ $\frac{(k+1)\cdot x}{2}-k-2$

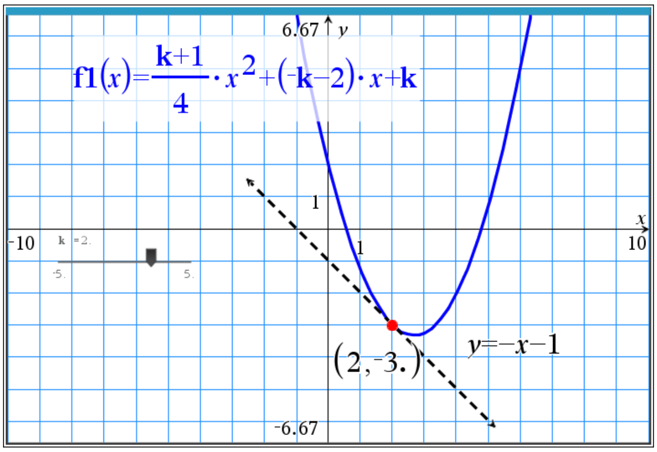
Beräkning av derivatans värde för x=2:

$\frac{(k+1)\cdot x}{2}-k-2|x=2$ ▸ -1

löser ut y ur enpunksformen:

$\text{solve}(y--3=-1\cdot(x-2),y)$ ▸ $y=-x-1$

Plotta nu funktionen igen med ett skjutreglage. Lägg också in punkten (2, -3) med geometriverktyg (gå till Geometri i verktygslådan och sedan Punkter och linjer.) Från samma plats kan du också plotta en tangent i (2, -3). Linjens ekvation skrivs ut.



Pröva nu också vad som händer om du väljer en annan punkt.

Funktionen kan också skrivas

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + k\cdot\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + k\cdot\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$$

Om x=2 blir $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ noll och funktionen har då värdet -3 oberoende av värdet på k. Se figur.