Arbeta symboliskt med upprepade beräkningar

I denna aktivitet visar vi hur man kan använda funktionen Ans (sista svar) när man utför upprepade beräkningar. Funktionen finns idag på nästan alla någorlunda avancerade räknare. Det speciella med denna aktivitet är att man nu också kan arbeta med symboler.

Det handlar alltså om talföljder och rekursiva beräkningar, som formellt behandlas i kurs 5 men ingenting hindrar att ni tar upp sådana här beräkningar tidigare. I kurs 1 så ska eleverna bland annat syssla med ränta och amortering och beräkningar inom det området kan med fördel utföras med upprepade beräkningar.

Problem 1

Vi börjar med ett problem av en typ som är ganska vanligt förekommande i s.k. matematiska gåtor.

– För att kunna gå genom dörren måste du ge mig hälften av dina mynt plus ett halvt mynt.

Inuti ett slott finns en kista full av guldmynt. För att komma ut från slottet måste du ta dig igenom **fem** dörrar, var och en skyddad av en vakt. De låter dig passera så länge du uppfyller deras krav. Se bilden. Vad är det minsta antalet mynt du borde ta med dig från kistan, så att du kan behålla minst ett för dig själv när du kommer ut från slottet?

Först visar vi hur man kan resonera sig fram genom att börja från slutet (en ofta vanlig strategi i matematik).

Vi *resonerar* oss fram och tittar då på problemet från slutet till början.

Om du lyckades komma ut från slottet med exakt **1** mynt så måste du ha haft **3** mynt innan den sista dörren (dörr 5). Hälften av 3 mynt + ett halvt mynt blir ju 2 mynt som du ger till vakten.

Innan dörr 4 så måste du med samma resonemang ha haft **7** mynt eftersom hälften av 7 mynt + ett halvt mynt blir 4 mynt.

Innan dörr 3 hade du då med samma resonemang **15** mynt eftersom hälften av 15 mynt + ett halvt mynt blir 8 mynt.

Innan dörr 2 hade du då **31** mynt och innan den första dörren så måste du alltså ha **63** mynt.

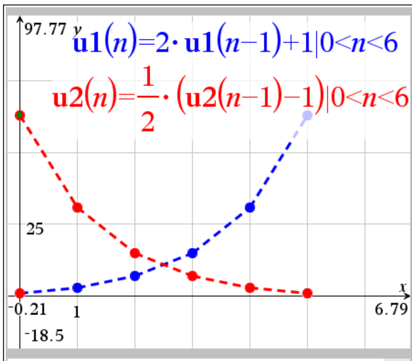
Vakterna får alltså sammanlagt **2** + **4** + **8** + **16** + **32** = **62** mynt och det stämmer ju eftersom du har 1 mynt över på slutet och du hade 63 mynt från början.

Sid 5

Resonera med eleverna hur man kommer fram till det rekursiva uttrycket i *baklängesberäkningen*:

$u1(n) = 2 \cdot u1(n-1) + 1$

Här har vi lagt in talföljden där man gör beräkningarna med start i *n*=63.



n	(n)	u2(n)
0.	1.	63.
1.	3.	31.
2.	7.	15.
3.	15.	7.
4.	31.	3.
5.	63.	1.
6.	#UNDEF	#U...
7.	#UNDEF	#UND...
8.	#UNDEF	#UNDE...
9.	#UNDEF	#UNDEF

$u2(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot(u2(n-1)-1), 0<n<6\end{cases}$

Här börjar vi beräkningen "bakifrån". Start vid *n*=0. Ändra gärna startvärdet och se hur värdena förändras.

I Räknare-appen blir det så här:

1	1
$1\cdot 2+1$	3
$3\cdot 2+1$	7
$7\cdot 2+1$	15
$15\cdot 2+1$	31
$31\cdot 2+1$	63

© här har vi arbetat baklänges!

63	63
$63\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	31
$31\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	15
$15\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	7
$7\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	3
$3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	1

© Här har vi gjort beräkningarna från början till slutet.

Här är det symboliska beräkningarna. Om man bläddrar ner på sidan så ser man lösningarna om man vill ha 2 respektive 0 mynt kvar på slutet.

n	n
$n-\left(\frac{1}{2}\cdot n+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$
$\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{n}{4}-\frac{3}{4}$
$\frac{n}{4}-\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{4}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{n}{8}-\frac{7}{8}$
$\frac{n}{8}-\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{8}-\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{n}{16}-\frac{15}{16}$
$\frac{n}{16}-\frac{15}{16}-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{16}-\frac{15}{16}\right)+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{n}{32}-\frac{31}{32}$
$\text{solve}\left(\frac{n}{32}-\frac{31}{32}=1,n\right)$	$n=63$

Problem 2

Här finns ett liknande problem. Många elever kan säkert komma på egna problem som liknar detta.

130	130
$130-\frac{1}{2}\cdot 130+1$	66
$66-\frac{1}{2}\cdot 66+1$	34
$34-\frac{1}{2}\cdot 34+1$	18
$18-\frac{1}{2}\cdot 18+1$	10
$10-\frac{1}{2}\cdot 10+1$	6
$6-\frac{1}{2}\cdot 6+1$	4
$4-\frac{1}{2}\cdot 4+1$	3

2	2
$2-\frac{1}{2}\cdot 2+1$	2
$2-\frac{1}{2}\cdot 2+1$	2
$2-\frac{1}{2}\cdot 2+1$	2
$2-\frac{1}{2}\cdot 2+1$	2
$2-\frac{1}{2}\cdot 2+1$	2

© Om man startar med två har man fortfarande 2 kvar efter 7 grindar.

$\text{solve}\left(\frac{n}{128}+\frac{127}{64}=2,n\right)$ $\quad n=2$

Problem 3

läkemedelsdos som avklingar

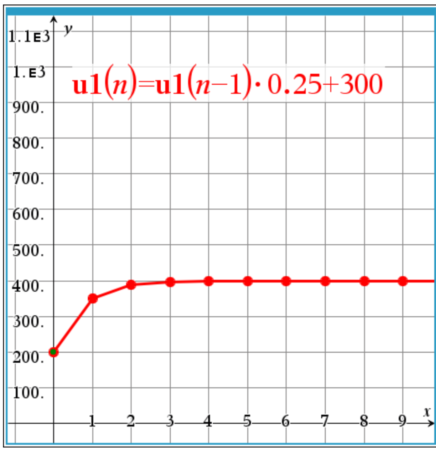
Du får en dos 1000 mg av en medicin. På ett dygn bryts 75 % ner och du får ett dagligt tillskott på 300 mg. Hur mycket har du i kroppen efter ett dygn? Efter 1 vecka, efter två veckor?

Detta problem kan vi visualisera med en *rekursiv* talföljd i appen Grafer. Man matar in uttrycket och startvärde.

Man kan dra i punkten som representerar startvärdet och se hur kurvan uppför sig. Man kan också se värdena i tabellen.

Vid vilket värde verkar mängden medicin stabilisera sig?

Låt eleverna dra i startpunkten och be dem observera hur stor mängden medicin blir efter efterhand. Vilken roll spelar startdosen?



n	u1(n)
	...
0.	199.36
1.	349.84
2.	387.46
3.	396.865
4.	399.216
5.	399.804
6.	399.951
7.	399.988
8.	399.997
9.	399.999
10.	400.

199.36034115139

Mängden medicin verkar stabilisera sig vid 400 mg efterhand.

På sid 5 generaliserar vi problemet. ***a*** är den ursprungliga dosen, ***p*** står här för den andel som är kvar efter ett dygn och ***b*** är det dagliga tillskottet.

a	a
$a\cdot p+b$	$a\cdot p+b$
$(a\cdot p+b)\cdot p+b$	$a\cdot p^2+b\cdot(p+1)$
$(a\cdot p^2+b\cdot(p+1))\cdot p+b$	$a\cdot p^3+b\cdot(p^2+p+1)$
$(a\cdot p^3+b\cdot(p^2+p+1))\cdot p+b$	$a\cdot p^4+b\cdot(p^3+p^2+p+1)$
$(a\cdot p^4+b\cdot(p^3+p^2+p+1))\cdot p+b$	$a\cdot p^5+b\cdot(p^4+p^3+p^2+p+1)$
$(a\cdot p^5+b\cdot(p^4+p^3+p^2+p+1))\cdot p+b$	$a\cdot p^6+b\cdot(p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)$
$(a\cdot p^6+b\cdot(p^5+p^4+p^3+p^2+p+1))\cdot p+b$	$a\cdot p^7+b\cdot(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)$

© termen $a\cdot p^7$ blir försvinnande liten.

$a\cdot p^7+b\cdot(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)\vert p=0.25 \text{ and } a=1000 \text{ and } b=300$	400.037

Här tar vi upp formeln för summan av geometrisk talföljd. Ta gärna upp hur man kommer fram till Den allmänna formeln. Brukar behandlas i samband med beräkningar på avbetalningar på skulder t ex.

Vi får alltså uttrycket

$a\cdot p^7+b\cdot(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)$

Den rödmarkerade delen blir väldigt liten och har på sikt ingen betydelse för det sammanlagda värdet. Nu är den delen: $1000\cdot(0.25)^7 \blacktriangleright 0.061035$

Sedan har vi en *geometrisk* talföljd som vi kan beräkna summan av.

$$300\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^7}{1-\frac{1}{4}} \blacktriangleright 399.976$$

Efter "väldigt lång tid" så kommer naturligtvis värdet att bli

$$\frac{300}{\frac{3}{4}} \blacktriangleright 400$$

eftersom 1/4 upphöjt till ett stort tal blir ungefär lika med noll.

Kan man använda samma metod med upprepade beräkningar när det gäller sparande och avbetalning av skulder?

Vi tar upp detta i Problem 4.

Problem 4

Vi fortsätter här tillämpningarna med sparande och avbetalningar på lån. Vi har till denna aktivitet en extra Nspire-fil för dig som lärare. Kan anses som fördjupning för eleverna. Beräkningarna i kalkylarket är också exempel på *rekursion*.

Ekonomiska tillämpningar

På nästa sida visas ett exempel på sparande. Man sparar ***a*** kr varje år, räntefaktorn är ***p***. På de sista raderna på sidan beräknar vi sedan

– hur stort sparbeloppet är efter 7 år

– vilken räntesats man ska ha för att komma upp i 12 000 kr.

sid 3:

Man kan också göra samma typ av beräkning när det gäller avbetalningar av ett fast belopp från en skuld. Lånet löper på 7 år.

– ***k*** är lånebeloppet,

– ***r*** är räntefaktorn

– ***a*** är det belopp vi betalar av skulden med varje år.

Vi beräknar sedan hur mycket vi ska betala av skulden med varje år. Räntefaktorn är 1,06 och lånebeloppet 100 000 kr.

På sid 2 visar vi hur man bygger upp det långa uttrycket för sparat belopp efter 7 år. På de två sista raderna så beräknar vi

- ackumulerat sparbelopp efter 7 år om man sparar 1000 kr varje år och räntan är 10 %.
- vilken ränta ska man ha om man vill komma upp i 12 000 kr Vi löser då en ekvation.

a	a
$a\cdot p+a$	$a\cdot(p+1)$
$a\cdot(p+1)\cdot p+a$	$a\cdot(p^2+p+1)$
$a\cdot(p^2+p+1)\cdot p+a$	$a\cdot(p^3+p^2+p+1)$
$a\cdot(p^3+p^2+p+1)\cdot p+a$	$a\cdot(p^4+p^3+p^2+p+1)$
$a\cdot(p^4+p^3+p^2+p+1)\cdot p+a$	$a\cdot(p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)$
$a\cdot(p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)\cdot p+a$	$a\cdot(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)$
$a\cdot(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)\cdot p+a$	$a\cdot(p^7+p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)$
$a\cdot(p^7+p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)\vert a=1000 \text{ and } p=1.1$	11435.9
$\text{solve}(1000\cdot(p^7+p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)=12000,p)$	$p=1.11323$

På sid 3 har vi motsvarande beräkning för avbetalning av ett lån. Vi löser ut annuiteten symboliskt och beräknar sedan annuitetsbeloppet genom att sätta in värden för ränta och lånebelopp.

$$\text{solve}(k\cdot r^7-a\cdot r^6-a\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a=0,a)$$

$$a=\frac{k\cdot r^7}{r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+1}$$

$$\frac{k\cdot r^7}{r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+1}\Bigg|r=1.06 \text{ and } k=100000 \qquad 17913.5$$

k	k
$k\cdot r-a$	$k\cdot r-a$
$(k\cdot r-a)\cdot r-a$	$k\cdot r^2-a\cdot r-a$
$(k\cdot r^2-a\cdot r-a)\cdot r-a$	$k\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a$
$(k\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a)\cdot r-a$	$k\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a$
$(k\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a)\cdot r-a$	$k\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a$
$(k\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a)\cdot r-a$	$k\cdot r^6-a\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a$
$(k\cdot r^6-a\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a)\cdot r-a$	$k\cdot r^7-a\cdot r^6-a\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a$
$\text{solve}(k\cdot r^7-a\cdot r^6-a\cdot r^5-a\cdot r^4-a\cdot r^3-a\cdot r^2-a\cdot r-a=0,a)$	$a=\frac{k\cdot r^7}{r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+1}$
$\frac{k\cdot r^7}{r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+1}\vert r=1.06 \text{ and } k=100000$	17913.5

I extramaterialet tar vi upp hur man kan arbeta med symboliska beräkningar i kalkylark. Där finns förklarande text till de olika operationerna.

	A	B	C	D
1	a			
2	a*r−b			
3	a*r^2−b*r−b			
4	a*r^3−b*r^2−b*r−b			
5	a*r^4−b*r^3−b*r^2−b*r−b			
6	a*r^5−b*r^4−b*r^3−b*r^2−b*r−b			
7	a*r^6−b*r^5−b*r^4−b*r^3−b*r^2…			
8	a*r^7−b*r^6−b*r^5−b*r^4−b*r^3…			
9	a*r^8−b*r^7−b*r^6−b*r^5−b*r^4…			
10	a*r^9−b*r^8−b*r^7−b*r^6−b*r^5…			

A2 $=a1\cdot r-b$