

Komplexe Zahlen – Alter Wein in neuen Schläuchen

Die komplexen Zahlen bilden ein klassisches Wahlthema der Oberstufenmathematik, das sich z.B. für die Zeit zwischen schriftlichem und mündlichem Abitur eignet. Der TI-83 / TI-84 Plus kann hierbei als Werkzeug nicht nur zum Rechnen mit diesen komplexen Zahlen genutzt werden, sondern es können vor allem viele Dinge visualisiert werden, die es ermöglichen, (geometrische) Sachverhalte von den Schülerinnen und Schülern selbst entdecken zu lassen. Im folgenden wird ein möglicher Unterrichtsgang beschrieben, wie er in zwei Mathematik-Kursen (Kernkompetenzfach) der neuen Kursstufe von Baden-Württemberg durchgeführt wurde.

1. Einführung der komplexen Zahlen

Die Einführung der komplexen Zahlen kann algebraisch motiviert werden, indem man an die im Laufe der Schulzeit (und auch historisch) vorgenommenen Zahlbereichserweiterungen erinnert: Den Ausgangspunkt bilden die natürlichen Zahlen, die schrittweise zu den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen erweitert wurden, da gewisse Gleichungen in den jeweiligen Bereichen nicht lösbar waren. Auch noch im Bereich der reellen Zahlen tritt dieses Problem z.B. bei der Gleichung $x^2 = -1$ auf. Dies gibt Anlass zu einer weiteren Zahlbereichserweiterung zu den komplexen Zahlen, indem man eine bisher nicht vorhandene Lösung i („imaginäre Einheit“) dieser Gleichung und in Konsequenz auch alle Ausdrücke $x+iy$ (mit reellen x und y) zu den reellen Zahlen hinzunimmt. Nun sollte die Deutung dieser Zahlen in der gaußschen Zahlenebene erfolgen, die man sich aus der reellen Zahlengeraden durch Hinzunahme einer imaginären Achse entstanden denken kann (siehe Abb. 5).

Das Rechnen (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren) mit diesen „Ausdrücken“ (Zahlen) $x+iy$ ist dann fast selbstverständlich, wenn man dabei i wie eine Unbestimmte behandelt und immer, wenn bei der Vereinfachung i^2 auftritt, dies durch -1 ersetzt. Hierzu können Beispiele gerechnet und mit dem TI-83, der das Rechnen mit komplexen Zahlen beherrscht, kontrolliert werden (siehe Abb. 1).

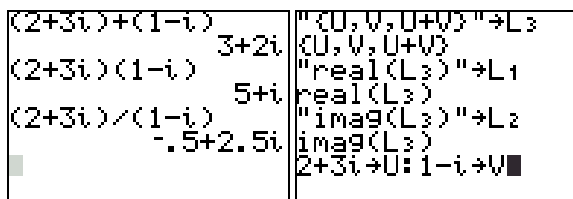


Abb. 1

Abb. 2

Zur Darstellung komplexer Zahlen in der Zahlenebene mit dem TI-83 bedient man sich eines kleinen Tricks:

Die TI-Funktionen $real()$ und $imag()$ aus dem Untermenü CPX des MATH-Menüs, mit denen der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl berechnet wird, sind auch auf Listen komplexer Zahlen anwendbar. So lassen sich von einer Liste komplexer Zahlen (etwa L_3) mit $real(L_3)$ bzw. $imag(L_3)$ die zugehörigen Listen der Real- bzw. Imaginärteile bestimmen und in den weiteren Listen L_1 und L_2 speichern (vgl. Abb. 2).

Die Verwendung der Anführungszeichen (") hat hierbei den Vorteil, dass sich bei späterer Abänderung von U und V auch automatisch alle verwendeten Listen ändern, sodass man dann mit einem Tastendruck (GRAPH) die neue Zeichnung erhält. Die in L_3 gespeicherten Zahlen lassen sich nun vom TI-83 in der (komplexen) Ebene veranschaulichen, indem man im Menü STAT PLOT den Plot1 aktiviert und diesen dann (mit GRAPH und geeigneten Window/Zoom-Einstellungen) zeichnen lässt:

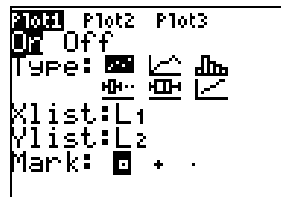


Abb. 3

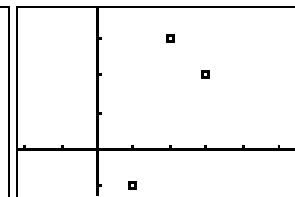


Abb. 4

Die geometrische Bedeutung der Addition und Subtraktion (vektoriell!) und eventuell auch schon der Multiplikation und Division in der komplexen Zahlenebene kann so von den Schülern selbst entdeckt werden.

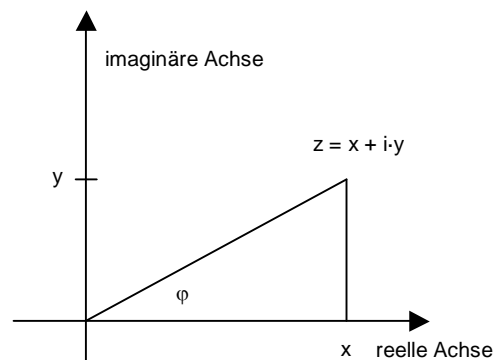


Abb. 5

2. Polardarstellung komplexer Zahlen

Jede komplexe Zahl $z=x+iy$ kann in der sog. Polardarstellung

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

geschrieben werden (siehe Abb. 5). Definiert man

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

so lautet die Polardarstellung kurz:

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

wobei r der Betrag und φ das (ein) Argument der komplexen Zahl genannt wird.

Diese Form kennt auch der TI-83, und im MATH-Untermenü CPX lässt sich mit 7:>Polar die Umwandlung in Polardarstellung durchführen. Umgekehrt verwandelt der TI-83 mit 6:>Rect eine in Polardarstellung vorliegende komplexe Zahl zurück in die kartesische Darstellung $x+iy$. Besonders zum Verständnis der geometrischen Bedeutung der Multiplikation (und der Division) ist die Polardarstellung nützlich, da hierbei bekanntlich die Beträge multipliziert und die Argumente addiert werden. Unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus lässt sich dieser Sachverhalt auch beweisen. Besonders schön visualisieren lässt sich dieser Zusammenhang durch Darstellung der Potenzen z, z^2, z^3, z^4, \dots für eine komplexe Zahl z , was der fortgesetzten Multiplikation mit der immer gleichen Zahl z entspricht:

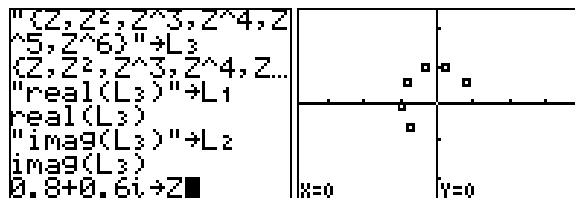


Abb. 6

Abb. 7

3. Lineare Funktionen (Abbildungen)

Die Klasse der linearen Funktionen mit dem Funktionsterm $f(x)=m \cdot x+c$ lässt sich vom Reellen ohne weiteres auf die komplexen Zahlen übertragen, wenn man für x, m und c statt reellen nun komplexe Zahlen zulässt (und wie üblich z statt x schreibt). Ein Schaubild wie im reellen Fall ist im Komplexen natürlich nicht möglich. (Dies wäre vierdimensional!) Jedoch hat eine solche Funktion f als Abbildung der komplexen Zahlenebene eine sehr schöne geometrische Bedeutung: Es handelt sich nämlich stets um eine gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung (Drehstreckung mit Streckfaktor $|m|$ und Drehwinkel $\arg(m)$). Umgekehrt lässt sich auch jede gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung der komplexen Zahlenebene in dieser Form mit geeigneten Zahlen m und c darstellen. Als Spezialfälle ergeben sich die identische Abbildung ($m=1$ und $c=0$), eine (echte) Translation ($m=1$ und $c \neq 0$), eine (echte) Drehung ($m \neq 1$ und $|m|=1$) oder eine

(echte) Streckung ($m \neq 1$ und $\arg(m)=0$, d.h. m reell und größer Null).

All diese Dinge können die Schüler an geeigneten Beispielen selbst mit dem TI-83 entdecken, wenn man für die komplexe Zahlenebene das in 1. und 2. vorgestellte Darstellungskonzept wählt. Hierzu lässt man sich z.B. ein Dreieck, dessen Eckpunkte als komplexe Zahlen in der Liste L_3 gespeichert werden, in Plot1 sowie das Bild dieses Dreiecks unter der Abbildung f (als Liste L_6) in Plot2 zeichnen:

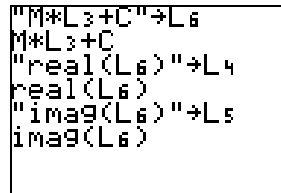


Abb. 8

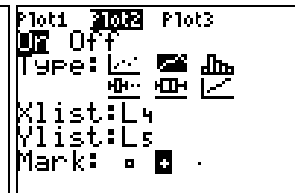


Abb. 9

Wählt man in Plot1 und Plot2 verschiedene Formen der Punkte („Mark“), so lassen sich auch in der gemeinsamen Darstellung Urbild und Bild des Dreiecks unterscheiden. Neben den Eckpunkten U, V und W des Dreiecks können zusätzlich noch die Seitenmitten $(U+V)/2, (V+W)/2$ und $(W+U)/2$ gezeichnet werden. Wählt man als Plot-Type die Punkte verbunden, so wird bei geeigneter Reihenfolge der Punkte ein nicht ganz geschlossenes Dreieck sowie sein Bild unter f dargestellt:

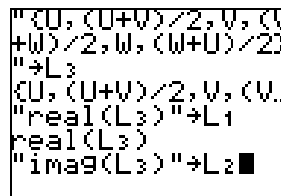


Abb. 10

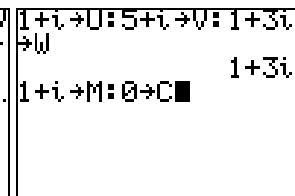


Abb. 11

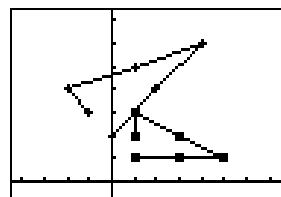


Abb. 12

Durch den scheinbaren Darstellungsmangel, dass die Dreiecke nicht ganz geschlossen sind, kann das Abbildungsverhalten jedoch sehr viel besser analysiert werden, weil dadurch dem Bild zu entnehmen ist, bei welchem Eckpunkt des Dreiecks es sich um U, V oder W (bzw. deren Bildern unter f) handelt. Das Setzen der Anführungszeichen (") bei der Eingabe der Listen ermöglicht es nach dieser umfangreicheren Vorarbeit, durch Neueingabe von U, V und W das Dreieck und durch Neueingabe von M und C die Funktion f schnell zu verändern. So können die Schülerinnen und Schüler in relativ kurzer Zeit zahlreiche Beispiele zu den verschiedenen Fällen untersuchen und die erwähnten Gesetzmäßigkeiten entdecken.

4. Komplexe Konjugation und gegenseinnige Ähnlichkeitsabbildungen

Nachdem sich im letzten Abschnitt die linearen Funktionen als gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen herausstellten, erhebt sich nun die Frage nach den gegensinnigen Ähnlichkeitsabbildungen der komplexen Zahlenebene, deren einfachste die Spiegelung an der reellen Achse (komplexe Konjugation) ist. Dies motiviert die Definition der zu einer komplexen Zahl $z=x+iy$ konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}=x-iy$, die mit dem TI-83 im MATH-Untermenü CPX durch $1:\text{conj}$ erhalten werden kann.¹ Damit erhält man die oben angesprochene Spiegelung durch $f(z)=\bar{z}$ und alle (!) gegensinnigen Ähnlichkeitsabbildungen der komplexen Zahlenebene durch $f(z)=m \cdot \bar{z} + c$.

Mit dem TI-83 können diese Abbildungen wie im letzten Abschnitt visualisiert und untersucht werden, wenn man "M*L3+C" durch "M*conj(L3)+C" ersetzt. Sind die anderen dortigen Eingaben nicht gelöscht worden, sondern noch gespeichert, so erübrigt sich sogar deren nochmaliges Eintippen.

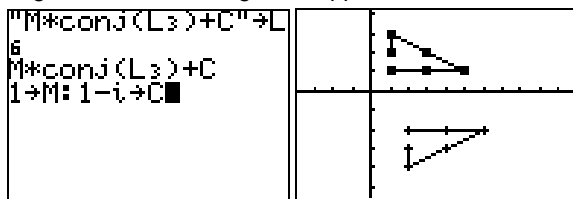


Abb. 13

Abb. 14

5. Die Spiegelung am Einheitskreis und weitere Abbildungen der komplexen Zahlenebene

Neben den Abbildungen der letzten beiden Abschnitte erweist sich f mit $f(z)=1/\bar{z}$ aufgrund ihres Abbildungsverhaltens als besonders interessant, weshalb sie ja Spiegelung oder Inversion am Einheitskreis genannt wird. In diesem Zusammenhang ist es sinnvoller, statt der Bilder von Dreiecken besser die Bilder von Geraden/Strecken und Kreisen zu betrachten. Denn eine wesentliche Eigenschaft dieser Abbildung ist die Kreisverwandtschaft: Bilder von Kreisen oder Geraden („verallgemeinerten Kreisen“) sind wieder Kreise oder Geraden. Um dies die Schülerinnen und Schüler mit dem TI-83 entdecken zu lassen, kann man entweder das bisherige Konzept beibehalten und die Objekte, die man abbilden möchte, durch eine genügend große Anzahl von einzelnen Punkten annähern. Besser und eleganter ist es jedoch, sich zu diesem Zweck einer anderen Fähigkeit des TI-83 zu bedienen, nämlich der Darstellung von parametrisierten Kurven. In diesem Kontext genügen als parametrisierte Kurven Kreise und Geraden/Strecken: Ein

Kreis (mit Mittelpunkt m und Radius r) kann komplex durch $z=m+re^{it}$ ($t \in [0;2\pi]$), eine Gerade (mit Stützpunkt u und Stützvektor v) durch $z=u+tv$ ($t \in \mathbb{R}$) parametrisiert werden. Im TI-83 ist dies allerdings reell, also getrennt in Real- und Imaginärteil einzugeben (siehe Abb. 15 bzw. 17). Hierbei verwenden wir die Parameterfunktionen x_{1T} und y_{1T} zur Darstellung des Ausgangsobjektes, z.B. das Stück einer Geraden, und x_{2T} und y_{2T} zur Darstellung des Bildobjektes, also z.B. $x_{2T}=\text{real}(1/\text{conj}(x_{1T}+iy_{1T}))$. Verwendet man für die Bildkurve eine andere Strichdarstellung als für die Ausgangskurve (z.B. fett), so lassen sich diese in der ausgegebenen Grafik gut unterscheiden. Die Standard-Einstellungen für das Parameterintervall (im WINDOW-Menü) sind gerade passend für einen vollen Kreis: $T_{\min}=0$ und $T_{\max}=6.2831853... (2\pi)$.

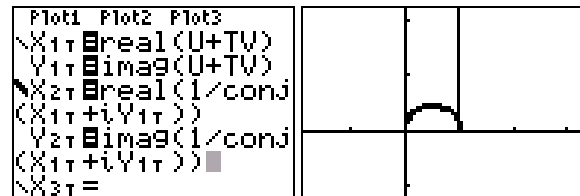


Abb. 15

Abb. 16

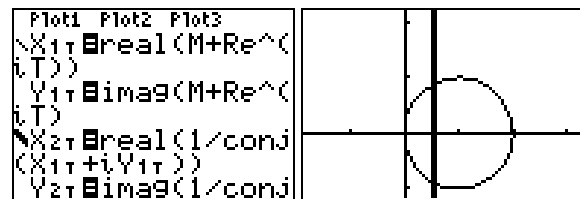


Abb. 17

Abb. 18

Natürlich lassen sich mit dieser Methode auch weitere Abbildungen der komplexen Zahlenebene untersuchen, so z.B. die Quadratfunktion $f(z)=z^2$ oder die komplexe Exponentialfunktion $f(z)=e^z$. Letztere kann in nahe liegender Weise definiert werden durch

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

¹ Die zu z konjugiert komplexe Zahl wird oft auch mit \bar{z} bezeichnet.

6. Lösen von Gleichungen und der Fundamentalsatz der Algebra

Der bisherige Unterrichtsgang war sehr stark von geometrischen Aspekten der komplexen Zahlen geprägt. Natürlich sollte bei einer Behandlung der komplexen Zahlen das Lösen von Gleichungen als algebraischer Aspekt nicht fehlen. Doch leider kann der TI-83 Gleichungen nicht im Bereich der komplexen Zahlen lösen, denn es liegt in der Natur des grafisch-numerischen Taschenrechners, in diesem Punkt auf die reellen Zahlen beschränkt zu sein. Hier müsste man zu CAS greifen. Mit dem TI-83 lassen sich jedoch die Lösungen wie in Abschnitt 2 in der komplexen Zahlenebene veranschaulichen, so z.B. die n -ten Einheitswurzeln als Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, die alle äquidistant auf dem Einheitskreis liegen.

Den (krönenden) Abschluss der Unterrichtseinheit kann bei besonders leistungsstarken Kursen der Fundamentalsatz der Algebra bilden, dessen Wider-

spruchsbeweis nach Argand auf Schulniveau durchführbar ist (siehe [1], S. 46ff).

Literatur:

- [1] Cornelia Niederdrenk-Felgner: Lambacher Schweizer Themenheft Komplexe Zahlen, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2004

Der Autor:

Dr. Matthias Trittler
Riedleinweg 5
89075 Ulm
Schubart-Gymnasium Ulm und Universität Ulm
e-Mail: trittler@mathematik.uni-ulm.de