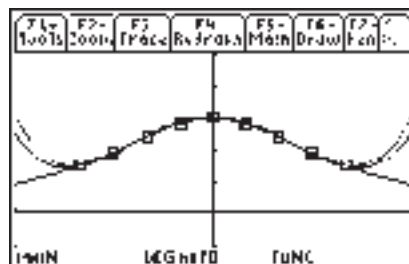
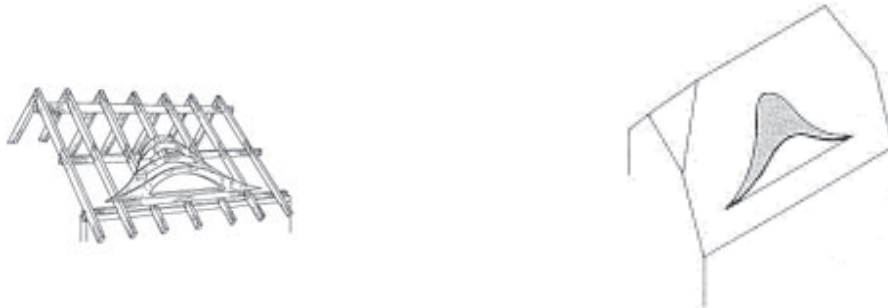


# Mathematikunterricht mit Taschencomputern in der Jahrgangstufe 12 an Thüringer Gymnasien:

## Erfahrungen

### methodische Überlegungen

### Hinweise zur Klassenstufe 12



## INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT .....	2
<b>DIDAKTISCH-METHODISCHE HINWEISE ZU AUSGEWÄHLTEN THEMENBEREICHEN .....</b>	<b>4</b>
1 ENTDECKENDES LERNEN MIT DEM TI-89/VOYAGE™ 200 IM MATHEMATIKUNTERRICHT .....	4
2 TANGENTEN AN PARABELN 3.ORDNUNG .....	17
3 HINWEISE ZUM LÖSEN VON GLEICHUNGEN .....	26
4 STOFFGEBIET „STOCHASTIK II“ .....	31
5 KONSTRUKTION DER NÄHERUNGSFORMEL VON DE MOIVRE-LAPLACE .....	40
6 NULLSTELLEN GANZRATIONALER FUNKTIONEN .....	46
7 EINE AUFGABE WIDER DIE ROUTINE .....	55
8 WIE VERÄNDERT MAN AUFGABEN, SO DASS SIE „CAS-GERECHT“ WERDEN? .....	58
9 AUFGABEN LÖSEN OHNE JEDLICHE HILFSMITTEL .....	66
<b>AUSGEWÄHLTE BEISPIELAUFGABEN .....</b>	<b>78</b>
1 DACHGAUBE .....	78
2 ANALYSIS - AUFGABE (LÖSUNG MITHILFE CAS) .....	84
3 EINFLUSS VON CAS-RECHNERN AUF ABITURAUFGABEN .....	85
4 ANDERE AKZENTE BEI AUFGABEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE .....	95
5 TELEFONDAUER .....	97
6 SIMULATIONEN- WOZU? .....	101
<b>PROGRAMMIEREN MIT DEM TC .....</b>	<b>105</b>
1 PROGRAMMIERUNG EINES EIGENEN MENÜS .....	105
2 PROGRAMM ZUR LAGEUNTERSUCHUNG VON GERADEN IM RAUM .....	107

## VORWORT

Der Arbeitskreis „Computeralgebrasysteme“ am ThILLM hat im Jahre 2003 für die Einführung ein „Schülermaterial<sup>1</sup> zum Einsatz des TI-89 in der Klasse 10 an Thüringer Gymnasien“ und ein Heft „Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 10 an Thüringer Gymnasien“ herausgegeben. Im Folgejahr wurde ein Heft „Der Einsatz des TI-89 in der Jahrgangsstufe 11 an Thüringer Gymnasien“ vorgelegt. Diese Reihe wird nun durch das vorliegende Heft für die Jahrgangsstufe 12 abgeschlossen.

Die Grundlage für diese Hefte stellte das im Schuljahr 1999/2000 in Thüringen in Kraft getretene Lehrplanwerk dar, das in allen Schularten und Fächern einer gemeinsamen Konzeption folgt. „Dieses stellt den Unterricht im einzelnen Fach stark in den Kontext eines gemeinsamen Grundanliegens, das auf die Entwicklung von Lernkompetenz gerichtet ist.“<sup>2</sup>

Der Inhalt der Hefte für die Jahrgangsstufen 10 und 11 lehnte sich stark an den Lehrplan für das Gymnasium, Mathematik, Erfurt 1999, an. Diese starke Lehrplanbindung ist im vorliegenden Heft für die Jahrgangsstufe 12 bewusst nicht vorgenommen worden (Ausnahme: Stochastik). Die Begründung dafür ist, dass inzwischen mehrjährigen Erfahrungen im CAS-Zentralabitur, das natürlich lehrplankonform ist, und ausreichend viele Unterrichtserfahrungen vorliegen. Daher stehen didaktisch-methodische Überlegungen im Vordergrund, Beispiele zur Motivation werden vorgestellt, Unterrichtsbeispiele angeboten, Möglichkeiten für innere Differenzierung aufgeführt, Beispiele für Fächer übergreifendes Arbeiten demonstriert, der Modellierungsaspekt an Praxisaufgaben oder zumindest praxisnahen Aufgaben erläutert und unterschiedliche Wege bei der Problemlösung vorgestellt usw.

Die einzelnen Inhalte des Heftes machen deutlich, dass Unterricht in Verantwortung des jeweiligen Lehrers gestaltet wird. Die verschiedenen Unterrichtsstile und –auffassungen sind in den Beiträgen bewusst erhalten geblieben. Die Autoren der Einzelbeiträge sind namentlich genannt. Bitte nehmen Sie bei Interesse Kontakt mit dem jeweiligen Autor auf. Alle Mitglieder des Arbeitskreises sind an einer konstruktiven Diskussion und weiterführenden Anregungen sehr interessiert.

Das Heft enthält Angebote für den Unterrichtenden, es will aber keine Unterrichtshilfe sein. Der Unterrichtende muss selbst entscheiden, in welchem Umfang er der Darstellung folgt, welche Beispiele er auswählt, welche Methoden er einsetzt usw.

Die Bildschirmausdrucke (Screenshots) sind im Wesentlichen mit dem TI-89 bzw. dem Voyage™ 200 erstellt. Damit wird der aktuellen Thüringer Realität entsprochen. Der Markt kann in den nächsten Jahren bzgl. des konkret im Unterricht genutzten Taschencomputers durchaus Änderungen hervorbringen. Natürlich sind die vom Lernenden und Unterrichtenden zu erwerbenden Kompetenzen vom jeweiligen Rechner unabhängig.

In einer Lehrplanrevision in Thüringen werden die Bedingungen für einen Einsatz eines Computeralgebrasystems neu formuliert werden müssen, weil z. B. in der Fachpräambel der Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik formuliert ist:

„Neue Technologien können zur Unterstützung aller drei Grunderfahrungen<sup>3</sup> wirksam eingesetzt werden. Insbesondere können Rechner durch dynamische Visualisierungen den Auf-

---

<sup>1</sup> Personenbezeichnungen gelten für beide Geschlechter.

<sup>2</sup> „Was ist neu an den Thüringer Lehrplänen?!“, Broschüre des ThILLM, 1998

<sup>3</sup> Siehe <http://www.kmk.org>, Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (Beschluss der KMK vom 1.12.1989 i.d.F. vom 24.5.2002)

bau von Grundvorstellungen mathematischer Begriffe unterstützen, als leistungsfähiges Werkzeug bei Modellbildung und Simulation verwendet werden und heuristisch experimentelles Arbeiten fördern.“ Eine bereits erfolgte konkrete Umsetzung aus den Rahmenrichtlinien für das Gymnasium Schuljahrgänge 7 – 10 Mathematik in Niedersachsen wird im Heft angeführt (vgl. in diesem Heft Kapitel 3 Hinweise zum Lösen von Gleichungen).

Das ThILLM und die Mitglieder des Arbeitskreises „Computeralgebrasysteme“ bedanken sich bei „Texas Instruments“ für die Unterstützung, die das Erscheinen dieses Heftes ermöglichte.

Für den Arbeitskreis „Computeralgebrasysteme“ am ThILLM

Dr. Wolfgang Moldenhauer

Im Arbeitskreises „Computeralgebrasysteme“ am ThILLM arbeiten mit:

Martin Bellstedt, Hans-Joachim Brenner, Harald Böckel, Wolfgang Cott, Petra Daubner, Mario Dietzel, Barbara Dürer, Udo Eckert, Gabriele Felsmann, Dr. Annett Fiedler, Prof. Dr. Michael Fothe, Helga Fritsche, Dr. Torsten Fritzlar, Heidrum Gasch, Bernd Geyling, Jürgen Haaß, Gerald Hägebarth, Elke Hellmich, Ralph Huste, Dr. Hubert Kaller, Irmhild Kantel, Thomas Kniese, Angelika Kraußner, Andreas Kretschmar, Dr. Bernd-Günther Kurtz, Dr. Hubert Langlotz, Barbara Mehnert, Birgit Merten, Thomas Meyer, Dr. Wolfgang Moldenhauer, Grit Moschkau, Marita Most, Mike Müller, Frank-Ronald Otto, Hartmut Stein, Gabriele Steiner, Eva-Maria Volknant, Karen Willingshöfer, Dr. Wilfried Zappe

Ausblick

Das Thüringer Kultusministerium hat in einem Rundschreiben vom 10. April 2002 an die Staatlichen Schulämter festgestellt, dass die bisherigen Projektergebnisse für die Fortsetzung und den Ausbau der Nutzung von Computeralgebrasystemen in der Thüringer Oberstufe sprechen. Thüringer Schulen mit gymnasialer Oberstufe können danach eine Genehmigung zur Nutzung von CAS-Taschencomputern beim Thüringer Kultusministerium ab dem Schuljahr 2002/2003 über das jeweils zuständige Staatliche Schulamt beantragen. Dabei haben die Schulen die Verfügbarkeit der Geräte und die Fortbildung der Lehrer in eigener Verantwortung abzusichern und ihr diesbezügliches Vorgehen im Antrag darzustellen. Natürlich werden die Lehrer durch den Arbeitskreis CAS am ThILLM in ihrer Arbeit unterstützt. Zudem verfügt jedes Schulamt über eine Liste mit Namen von Kollegen, die ggf. unterstützen und beraten können.<sup>4</sup>

Damit wird zugleich eine Stärkung der Eigenverantwortung anberaumt, weil „dies der beste Weg ist, den anstehenden Herausforderungen wirksam zu begegnen. Das Vortreffliche – und das ist die Freiheit der eigenverantwortlichen Schule – das soll nicht selten, es soll zur Regel, zum Schulalltag werden!“<sup>5</sup>

---

<sup>4</sup> vgl. Forum Schulleitung und Schulentwicklung, Reihe Forum, Heft 11, Bad Berka, 2005, S. 74-75

<sup>5</sup> Prof. Dr. Jens Goebel auf dem ThILLM-Forum „Schulleitung und Schulentwicklung“, Erfurt, 27.11.2004

## DIDAKTISCH-METHODISCHE HINWEISE ZU AUSGEWÄHLTEN THEMENBEREICHEN

Wilfried Zappe

### 1 ENTDECKENDES LERNEN MIT DEM TI-89/VOYAGE™ 200 IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Grafikfähige Taschencomputer mit Computeralgebrasystem können den Mathematikunterricht durch ihre technischen Möglichkeiten zum entdeckenden Lernen und zum Überprüfen selbst gefundener Lösungen bereichern.

Dazu werden einige Beispiele vorgestellt.

Alles Alte, soweit es Anspruch darauf hat, sollen wir lieben, aber für das Neue sollen wir recht eigentlich leben.

Theodor Fontane (1819-98), dt. Erzähler

Bei der Erziehung muss man etwas aus dem Menschen herausbringen und nicht in ihn hinein.

Friedrich Fröbel (1782-1852), dt. Pädagoge, 1837 Gründer des ersten Kindergartens

#### **Vorbemerkung:**

Bereits in den Thüringer CAS- Materialien für Klasse 10 und Klasse 11 gibt es zahlreiche Hinweise zum entdeckenden Lernen, z. B. im Zusammenhang mit dem Entdecken von Ableitungs- oder Integrationsregeln.

Eine veränderte Unterrichtskultur braucht aber noch viel Zeit und Anregungen, um sich durchzusetzen. Deshalb soll dieses Thema hier aufgegriffen und zur Diskussion gestellt werden.

**Wichtige pädagogische Grundsätze:****Entdeckendes Lernen**

Entdeckendes Lernen bedeutet, dass Schüler sich selbstständiges Fragen und Denken angewöhnen, dass sie Verantwortung für ihre Lernprozesse übernehmen und sich als erfolgreiche, manchmal gar als kreative Forscher erleben. Als Folge sind die Wissensnetze, die sie knüpfen, solider und dauerhafter.

**Fehlerfreundlichkeit**

Stellt der Lehrer Fehler erst einmal in den Vordergrund und kreidet sie einem Kind unnachgiebig an, erstickt er dessen Freude am Entdecken und dessen Stolz auf sein Tun. Wir können nicht lernen, wenn wir keine Fehler machen dürfen. In den meisten Fehlern steckt eine geistige Leistung, oft eine wichtige Stufe auf dem Weg zu einer richtigen oder gar originellen Lösung. Selbstverständlich muss die Korrektur, gut erläutert, in einem zweiten Schritt folgen.

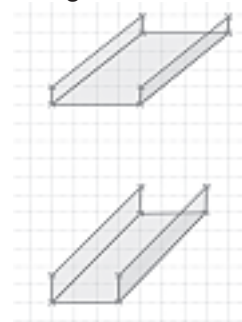
**Lernen im eigenen Tempo**

Das Lernen im Standardtakt kann Neugier und Tatendrang zerstören, unterfordert einen Teil der Schüler und überfordert den anderen, stets die Differenz und die Konkurrenz betonend. Offene und kooperative Unterrichtsformen sollen ermöglichen, dass Kinder ihrem Lernstand entsprechend arbeiten.

**Ein ausführlich beschriebenes Beispiel für entdeckendes Lernen:**

Aus einem Streifen Kupferblech mit 50 cm Breite soll eine Rinne mit rechteckigem Querschnitt geformt werden.

Untersuchen Sie, wie die Abmessungen zu wählen sind, damit die Rinne möglichst viel Wasser fasst.<sup>6</sup>



Die klassische – vom Mathematiklehrer meist erwartete – Lösung beginnt mit der Einführung von Variablen und dem Aufstellen einer Zielfunktion, etwa  $A(x) = x \cdot (50 - 2x)$  mit  $0 < x < 25$ .

Wird diese Funktion als quadratische Funktion identifiziert, kann der Maximalwert über die Scheitelpunktskoordinaten bestimmt werden. Falls verfügbar, kann der Extremwert auch über das Ableitungskalkül berechnet werden. Es ergibt sich ein Maximum für  $x = 12,5$  cm.

Nach meiner Erfahrung ist dieses Vorgehen vor allem bei jüngeren Schülern nicht von Beginn an zu erwarten. Es steht vielmehr am Ende eines längeren Erkenntnisprozesses.

Ich halte es im Sinne des entdeckenden Lernens für zweckmäßig, diesen Weg die Schüler – wenn auch lehrergelenkt – möglichst selbstständig gehen zu lassen.

<sup>6</sup> Vgl. für die Aufgaben 1 bis 5 Klaus-Peter Röttger, „Quadratische Funktionen; Parabeln“, Unterrichtsmaterialien zum Einsatz eines GTR im Mathematikunterricht des Sekundarbereichs I Heft 4, T<sup>3</sup> Deutschland 2004

Unsere CAS-Rechner sind eine gute Hilfe auf diesem Wege.

Schüler probieren in der Regel zuerst!

Man ermuntere sie auch ausdrücklich dazu, genügend viele Beispiele auszuprobieren, denn schon durch das eigene Probieren werden die Schüler entdecken können:

- dass die beiden nach oben zu klappenden Seitenflächen auch bei der Rechnung doppelt zu berücksichtigen sind,
- dass für die Fragestellung die Länge des Blechstreifens zunächst vernachlässigt werden kann,
- dass die Querschnittsfläche von der Höhe der Seitenstreifen bzw. der Breite der Grundseite abhängt,
- dass es für die Auswahlmöglichkeiten der Höhe der Seitenstreifen ein nach beiden Seiten beschränktes Intervall gibt.

Ergebnisse des Probierens können zum Beispiel so aussehen:

Breite Grundseite	Höhe Seitenstreifen	Flächeninhalt
50	0	0
48	1	48
25	12,5	312,5
10	20	200
0	25	0

Es ist naheliegend, die Ergebnisse über den Data-Matrix-Editor zu visualisieren.

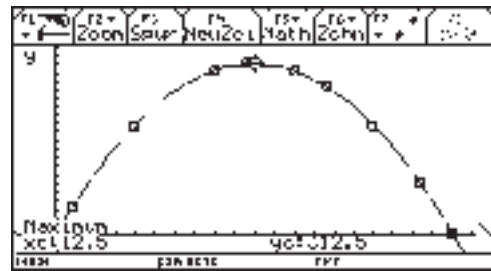
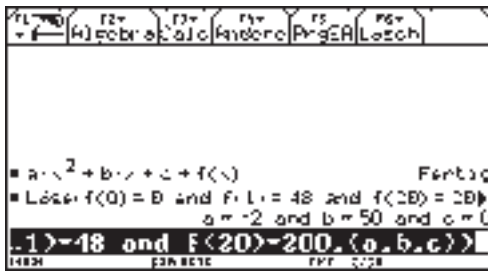
Nun beginnt eine erste Phase des Modellierens.

Je mehr Probiererergebnisse vorliegen (Schülerergebnisse zusammenfassen!), desto besser wird erkennbar, dass die Werte auf einer Parabel liegen könnten. Wenn das so ist, kann aus drei Punkten schnell die Gleichung der Parabel gefunden werden und nachgeschaut werden, ob die Vermutung sich bestätigt.

(Ggf. kann das auch über quadratische Regression geschehen.)

Über die graphische Darstellung wird das Maximum der Parabel bestimmt.

Damit ist diese Aufgabe bereits gelöst.



(Aus Platzgründen werden nur wenige Arbeitsschritte durch Bildschirmausdrucke illustriert.)

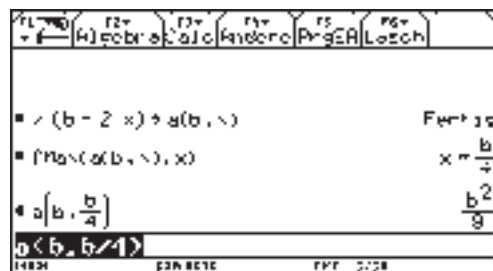
Jetzt bietet sich in einer zweiten Modellierungsphase an, arbeitsteilig für andere Breiten des Kupferblechs die analoge Aufgabenstellung zu bearbeiten und nach einer Verallgemeinerung zu suchen.

(Gelegenheit zur Festigung, Vertiefung und Differenzierung.)

Blechbreite	50	60	80	100
Seitenhöhe	12,5	15	20	25
Grundseite	25	30	40	50
Flächeninhalt	312,5	450	800	1250

Die Verallgemeinerung für eine Zielfunktion  $A(x) = x \cdot (50 - 2x)$  mit  $0 < x < 25$  ist jetzt für die Schüler viel besser verständlich.

Sie kann nun auch mit dem CAS-Rechner zu einer allgemeinen Lösung geführt werden, die bereits eine hohe Abstraktionsleistung verlangt.



Ergebnis:

Bei einem Kupferblech der Breite  $b$  cm erhält man maximalen Querschnitt, wenn die Grundseite  $\frac{b}{2}$  cm breit und die beiden Seitenflächen je  $\frac{b}{4}$  cm hoch sind. Der maximale Flächeninhalt ist dann  $A = \frac{b^2}{8}$  cm<sup>2</sup>, und somit beträgt bei einer Blechlänge von  $d$  cm das maximale

Volumen der Rinne  $V = \frac{b^2 \cdot d}{8}$  cm<sup>3</sup>.

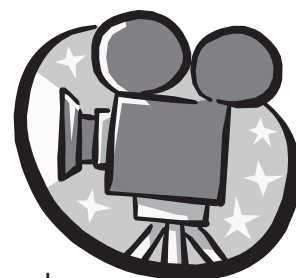


**Analoge und weiterführende Aufgabenstellungen<sup>7</sup>:**

1. Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von 6 Euro durchschnittlich 225 Besucher pro Vorstellung.

Aus langer Erfahrung weiß der Besitzer: Würde der Eintrittspreis um 0,5 Euro, 1 Euro usw. erhöht, so ginge die Besucherzahl um 10 Personen, 20 Personen usw. zurück.

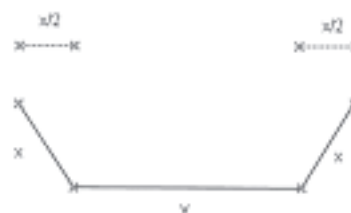
- a) Erarbeiten Sie eine mathematisch begründete Empfehlung für den Kinobesitzer.
- b) Für eine Benefizveranstaltung möchte der Kinobesitzer nur seine Unkosten in Höhe von 700,- Euro erhalten. Zu welchem Preis sollte er die Karten anbieten?



2. Ein Designer hat eine neue Kuchenform zum Backen von Rührkuchen entwickelt.

Diese hat einen trapezförmigen Querschnitt und soll aus einem Blech mit der Breite 40 cm hergestellt werden.

Berechnen Sie die Maße für den maximalen Querschnitt.



3. Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge 14 cm soll ein oben offener Kasten mit quadratischer Grundfläche und maximalem Volumen hergestellt werden.

(Bekanntlich führt diese Aufgabe auf eine kubische Funktion. Durch die Möglichkeiten der graphischen Darstellung und Auswertung mit dem CAS-Rechner lässt sie sich bereits ab Klasse 9 behandeln.)



4. Statt kastenförmiger Regenrinnen findet man an den Häusern in der Regel halbkreisförmige Konstruktionen. Spielen für die Wahl der Form der Regenrinne – Kastenrinne oder halbkreisförmige Rinne – nur ästhetische Gesichtspunkte des Bauherrn eine Rolle?

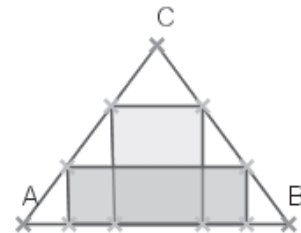


<sup>7</sup> Vgl. Klaus-Peter Röttger, „Quadratische Funktionen; Parabeln“, Unterrichtsmaterialien zum Einsatz eines GTR im Mathematikunterricht des Sekundarbereichs I Heft 4, T<sup>3</sup> Deutschland 2004

5. In ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 8 cm soll ein Parallelogramm mit minimaler Fläche eingeschrieben werden.

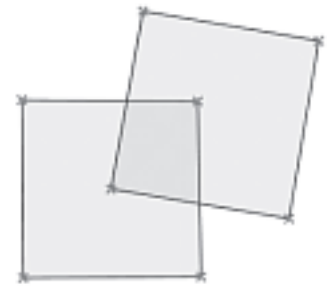


6. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit  $\overline{AB} = 6$  cm,  
 $\overline{AC} = \overline{BC} = 5$  cm.



- a) Das dem Dreieck eingeschriebene Rechteck soll maximalen Flächeninhalt haben.
- b) Erfinden Sie entsprechende dreidimensionale Probleme und lösen Sie diese.<sup>8</sup>

7. Zwei zueinander kongruente Quadrate sind so platziert, dass ein Eckpunkt des einen im Mittelpunkt des anderen liegt und darum drehbar gemacht wird. So wird von beiden Quadraten eine Fläche eingeschlossen. In welcher Lage ist diese Fläche maximal?<sup>3</sup>



<sup>8</sup> vgl. „mathenet“ – Analysis, Klasse 11, S. 169

**Weitere Beispiele für das Initiieren entdeckenden Lernens**

**1. Tangentenanstieg → 1. Ableitung**

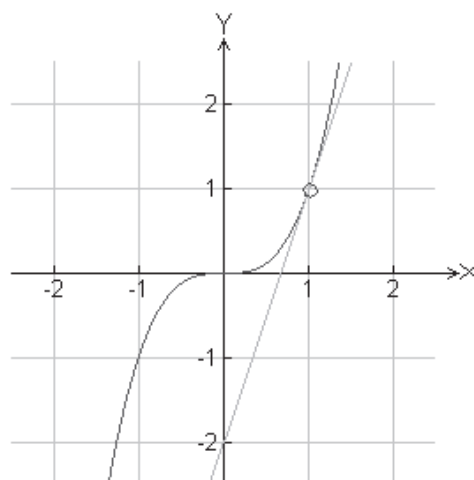
Zwei Folien beschreiben einen Zugang zum Ableitungsbegriff durch entdeckendes Lernen.

Folie 1

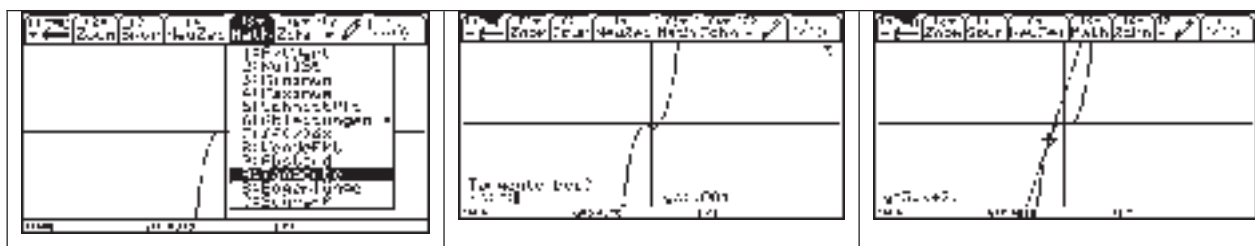
An den Graphen von  $y = x^3$  wurde im Punkt  $P(1; 1)$  die Tangente („Berührende“) eingezeichnet.

Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.

Zeichnen Sie nach Augenmaß die Tangenten an diese Kurve an den Stellen  $x = -1$  und  $x = 0,5$  ein und ermitteln Sie deren Gleichungen.



Die Bildfolge zeigt, wie man Tangentengleichungen mit dem Taschencomputer bestimmt:



Bestimmen Sie mit dem Taschencomputer Gleichungen für Tangenten an die Parabel  $y = x^3$ .

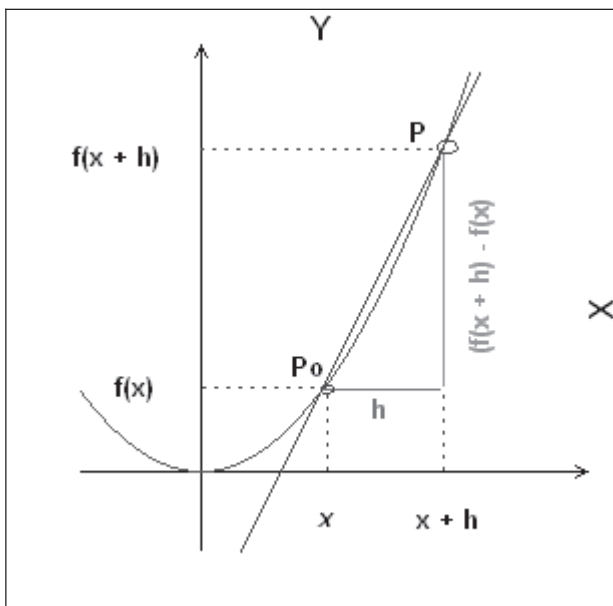
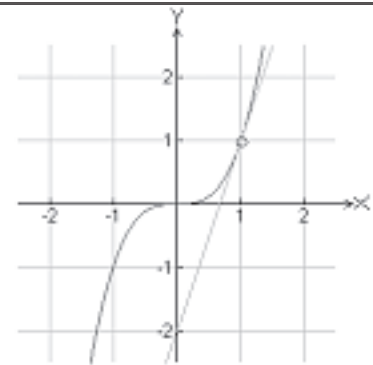
- Erstellen Sie eine Tabelle für den Tangentenanstieg  $m$  und die Berührstelle  $x_0$ !
- Vermutung für den Zusammenhang von  $m$  und  $x_0$ ?

Berührstelle $x_0$	Tangentenanstieg $m$
-0,5	0,75
1	
2	
...	

Folie 2

Vermutung für den Tangentenanstieg  $m$  an den Graph von  $y = x^3$  an der Stelle  $x_0$ :

$$m = 3 \cdot (x_0)^2$$



Begründen Sie:

Der Anstieg  $D(h)$  der Sekante durch die Punkte  $P$  und  $P_0$  lässt sich durch

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

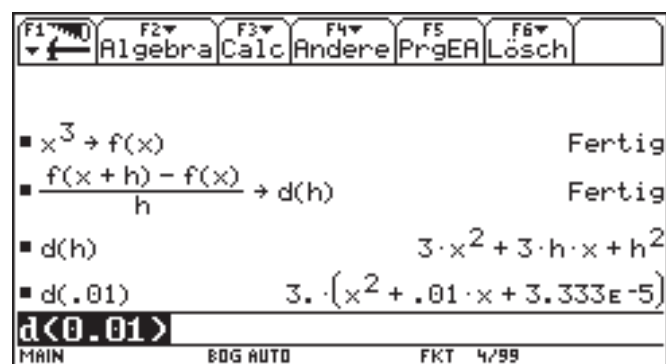
beschreiben.

Untersuchen Sie das Verhalten von  $D(h)$  für  $f(x) = x^3$  für verschiedene Werte von  $h$ , insbesondere

für  $h \rightarrow 0$ .

Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen auch geometrisch.

(Vermutung bestätigt?)



Untersuchen Sie  $D(h)$  auch für  $f(x) = x^2$  (ohne TC) und  $f(x) = \sin(x)$  (mit TC).

## 2. Zusammenhänge zwischen den Graphen<sup>9</sup> von $y$ , $y'$ und $y''$

Lassen Sie sich mit dem Taschencomputer die Graphen der Funktion  $y$  und der Ableitungsfunktionen  $y'$  und  $y''$  darstellen. Beschreiben Sie Zusammenhänge zwischen beiden Kurven, z. B. Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Steigen und Fallen.

a)  $y = x^3 + 2x^2 + 1$

b)  $y = x^3 + 2x^2 - 2$

c)  $y = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$

d)  $y = \sin^2(x)$

Welche Zusammenhänge vermuten Sie zwischen den Graphen von  $y'$  und  $y''$ ?

Skizzieren Sie erst und überprüfen Sie dann Ihre Voraussagen mit dem Taschencomputer.

## 3. Klassifizieren einer gebrochenrationalen Funktion

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$y = f(x) = \frac{(x-5) \cdot (x+3)}{x+4} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Fertigen Sie eine saubere Zeichnung des Funktionsgraphen von  $f$  auf Millimeterpapier an, die wesentliche Eigenschaften von  $f$  erkennen lässt.

Untersuchen Sie, ob sich die Eigenschaften der Funktion  $f$  wesentlich verändern, wenn der Summand „3“ in der Funktionsgleichung durch andere reelle Zahlen ersetzt wird.

<sup>9</sup> vgl. „mathenet Klasse 11 - Analysis“, S. 94

(Die Schüler können entdecken: Durchläuft  $a$  in  $y = f_a(x) = \frac{(x-5) \cdot (x+a)}{x+4}$  alle reellen Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so erfolgt an der Stelle  $a = 4$  ein Umschlag in eine neue „Qualität“. Links von  $a = 4$  existieren stets zwei Extrempunkte, rechts von  $a = 4$  gibt es keine Extrempunkte.

Der linke Extrempunkt ist stets ein Hochpunkt, der andere ein Tiefpunkt.)

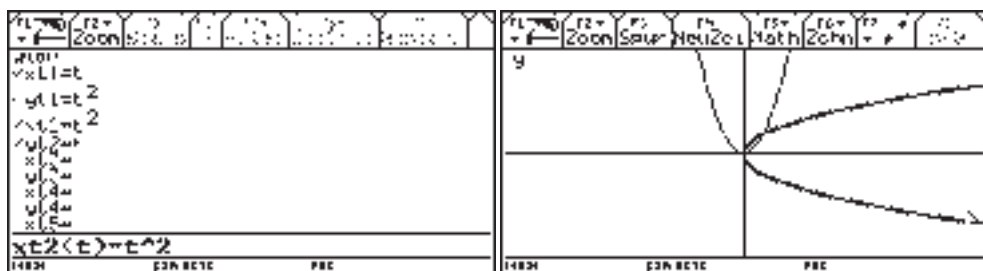
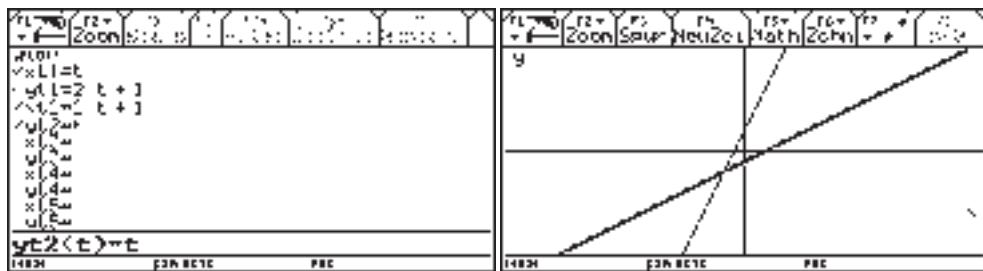
#### 4. Umkehrfunktion

Stellen Sie Ihren Taschencomputer auf den Grafikmodus „parametrisch“ ein. Stellen Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} x_{t1} &= t & \text{und ihre „Umkehrung“} & & x_{t2} &= f(t) \\ y_{t1} &= f(t) & & & y_{t2} &= t \end{aligned}$$

für verschiedene Funktionen  $f$  im ZoomDez (mit gleichgeteilten Achsen) dar.

Beispiele:

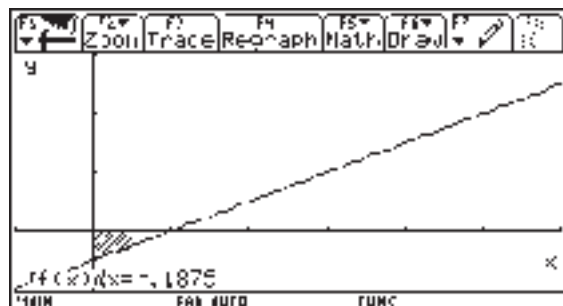


- a) Beschreiben Sie die Auswirkungen des Vertauschens von Definitions- und Wertebereich auf den Graphen der Umkehrzuordnung.
- b) Welche der Umkehrungen kann man als eindeutige Zuordnungen bezeichnen?
- c) Lässt sich die Umkehrzuordnung auch in der Form  $y = f(x)$  schreiben?
- d) Ermitteln Sie Graph und Term der Umkehrzuordnung von  $y = 2^x$ .

### 5. Integralfunktion

Gegeben ist die Funktion  $y = f(x) = 0,5x - 0,5$ . Bestimmen Sie den Flächeninhalt unter dem Graphen von  $f$  von der unteren Grenze 0 bis zu den in der Tabelle angegebenen Stellen  $x_0$ .

Nutzen Sie dazu die Möglichkeit der Flächenberechnung aus der graphischen Darstellung!



Stelle $x_0$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Flächeninhalt		- 0,1875							

Plotten Sie die Funktion  $\Phi$  :

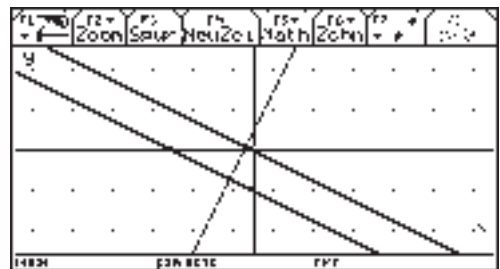
- a)  $Stelle\ x_0 \mapsto Flächeninhalt.$   
 Begründen Sie, dass mit quadratischer Regression ein „passender“ Funktionsterm für diese Funktion zu finden ist.
- b) Zeigen Sie:
  - (1)  $\Phi'(x) = f(x)$
  - (2) Stimmt  $x_0$  mit der unteren Integrationsgrenze überein, so hat  $\Phi$  den Wert null.
- c) Wiederholen Sie Ihre Untersuchung für die gleiche Funktion, nun aber mit der unteren Integrationsgrenze 1.

- d) Wie sieht  $\Phi$  aus, wenn von  $f(x) = \sin(x)$  und der unteren Integrationsgrenze 0 ausgegangen wird?

**6. Halt´ dich senkrecht**

Stellen Sie die Funktion f mit  $y = f(x) = 2x + 1$  im ZoomDez: 4 (mit gleichgeteilten Achsen) dar.

Zeichnen Sie zwei Geraden ein, die senkrecht zum Graphen von f verlaufen.



Wählen Sie andere Geradengleichungen und bestimmen Sie ebenfalls jeweils zwei dazu senkrechte Geraden.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Anstiegen einer Geraden g und der dazu senkrechten Geraden?

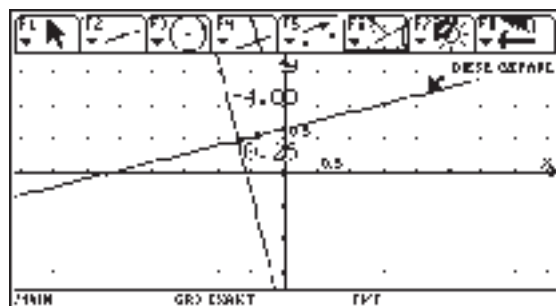
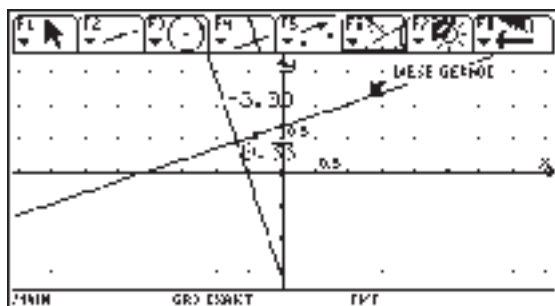
Welcher Nachteil entsteht bei einer Darstellung mit nicht gleichgeteilten Achsen?

Noch eindrucksvoller gelingt die Darstellung mit der Software „Cabri-geometre“

Unter [F8] 9: Format kann man ein Koordinatensystem einblenden.

Mit [F1] 4: lässt sich eine Gerade zeichnen, mit [F4] 1: eine dazu senkrechte Gerade.

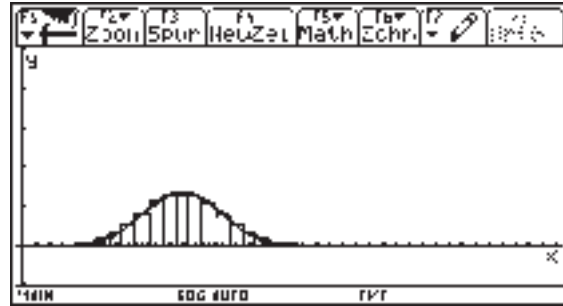
Unter [F6]4: lassen sich die Steigungen der Geraden und der Senkrechten einblenden. Bewegt man mit und die zuerst gezeichnete Gerade, erhält man viele Werte für die jeweils zusammengehörenden Steigungen und kann sie miteinander vergleichen.





### 7. Grenzwertsatz (Stochastik)

Für  $n = 40$  und  $p = 0,3$  sind in ein und demselben Koordinatensystem dargestellt:



- (1) das Histogramm der Binomialverteilung  $B_{n, p, k}$

- (2) die Funktion  $f$  mit  $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  und  $\mu = n \cdot p$  sowie  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Erzeugen Sie diese grafische Darstellung auf Ihrem Taschencomputer.

Welchen Zusammenhang vermuten Sie anhand der graphischen Darstellung zwischen

$$\sum_{k=\text{unten}}^{\text{oben}} \binom{40}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{40-k} \quad \text{und} \quad \int_{\text{unten}}^{\text{oben}} f(x) dx \quad ?$$

Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch Berechnung für sinnvolle Belegungen der unteren Grenze „unten“ und der oberen Grenze „oben“.

Verifizieren Sie Ihre Vermutung für andere Werte von  $n$  und  $p$ .

#### Zusammenfassung:

- **Entdeckendes Lernen wird weitgehend durch den Lernenden selbst gesteuert.**
- **Statt alle relevanten Informationen fertig strukturiert zu präsentieren, muss der Lernende Informationen finden, priorisieren und neu ordnen, bevor er daraus Regeln ableiten und Probleme lösen kann.**
- **Die Exploration wird geleitet von Neugier und Interesse des Lernenden. Er soll Lösungen für interessante Fragen entwickeln, statt Fakten auswendig zu lernen.**
- **Besonders wichtig ist dabei, wie bei jeder Form des selbstgesteuerten Lernens, ein hoher Grad an intrinsischer Motivation.**

**Ziel des Lernens ist die Ausbildung der Problemlösungsfähigkeit.**

Hans-Joachim Brenner

## 2 TANGENTEN AN PARABELN 3.ORDNUNG

*Zusammenfassung:* Es werden Möglichkeiten zur Entwicklung von Problemlösefähigkeiten anhand eines Problems aus der Analysis „Polynome dritten Grades und Eigenschaften ihrer Graphen“ vorgestellt. Dabei soll zum einen deutlich gemacht werden, dass komplexe Übungen Höhepunkte des Lernens sind und daher auch sehr langfristig vorbereitet werden müssen und zum anderen, dass der Einsatz von CAS auf der einen Seite gute neue Lernmöglichkeiten eröffnet und auf der anderen Seite mit Bedacht eingesetzt werden sollte, wenn man gute alte Lernmöglichkeiten nicht wegrationalisieren möchte. Insbesondere werden Beispiele aufgezeigt, anhand derer der Schüler das Stellen von Fragen, das Aufstellen von Vermutungen sowie das Herleiten, Begründen und Beweisen lernen kann.

### 1 Einführung

Im Artikel „Strukturiertes Üben mit dem Computer“ in der Zeitschrift „Mathematik lehren – Heft 115“ vom Dezember 2002 machte Hans-Wolfgang Henn<sup>10</sup> auf das folgende Problem aufmerksam.

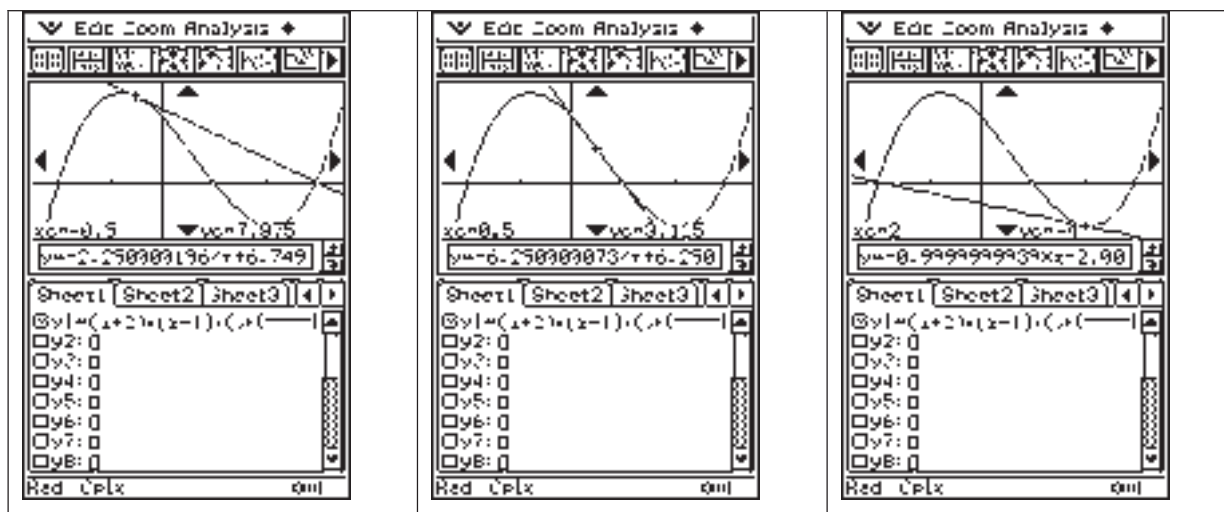
*Gegeben ist ein Polynom  $p$  dritten Grades mit den reellen Nullstellen  $x_1, x_2, x_3$ . Untersuchen*

*Sie die Eigenschaften der Tangente an das Bild von  $p$  an der Stelle  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ .*

Hans-Wolfgang Henn beschreibt in dem Artikel, wie anhand dieses Problems eine produktive Lernumgebung geschaffen werden kann. Der Computer trägt dazu bei, dass die Schüler die Möglichkeit zum experimentellen Arbeiten erhalten und dadurch in die Lage versetzt werden, heuristische Fähigkeiten zu erlangen; dass Schüler zunehmend an eigenen Ideen arbeiten und lernen eigene Lösungswege anzustreben. Henn hebt hervor, dass die Schüler Muße – eine Kultur der Langsamkeit – benötigen, um zielstrebig Suchen und Experimentieren zu können.

---

<sup>10</sup> Im Unterschied zu H.-W. Henn legt der Autor im Artikel größeres Gewicht auf das Beweisen der vom Schüler gefundenen Eigenschaften auf unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen und auf der Darstellung von Unterrichtseinheiten, die eine erfolgreiche Bearbeitung des Problems vorbereiten helfen.



Im obigen Beispiel wurden Tangenten an das Bild der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x) = (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$  an den Stellen der arithmetischen Mittel der Nullstellen gelegt.

## 2 Konstruktion einer produktiven Lernumgebung

Der Lehrer hat nun die Aufgabe anhand dieses Problems eine produktive Lernumgebung zu erschaffen, die dem Lernstand seiner Klasse entspricht. (Erfahrungen zeigen zur Genüge, dass ansonsten wirklich gute Entwürfe, die zum Beispiel in Fachzeitschriften vorgestellt werden, gar nicht den erwarteten Erfolg mit sich bringen.) Bevor man im Unterricht das genannte Problem aufwirft, muss der Schüler mathematische und auch Werkzeugkompetenzen im Umgang mit folgenden Inhalten erworben haben: arithmetisches Mittel; Nullstellen von Polynomen und der Zusammenhang zur Darstellung des Polynoms mithilfe des Produktes von Linearfaktoren; mehrfache Nullstellen; Gleichung der Tangente an das Bild an einer bestimmten Stelle – „Tangentenfunktion“.

*Beispiel:* Der Schüler ist ohne Hilfsmittel in der Lage, den Funktionsterm von  $y = f(x) = x^3 - 8 \cdot x^2 + 15 \cdot x$  zu faktorisieren, die Gleichung der Tangente in  $x_0 = 1,5$  zu bestimmen und mithilfe des Taschencomputers (TC) zu bestätigen.

Wenn der Lernstand der Klasse diesen Anforderungen entspricht, dann ist folgende Aufgabenstellung für eine Unterrichtsstunde denkbar. Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgt in Partner- oder in Gruppenarbeit, um die Kommunikation über das mathematische Problem beim Bearbeiten zu ermöglichen. Im zweiten Teil der Stunde werden die gefundenen Ergebnisse vorgestellt und diskutiert.

Gegeben ist ein Polynom  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$ .

- a) Untersuchen Sie die Eigenschaften der Tangenten an das Bild von  $f$  an den Stellen der arithmetischen Mittel von je zwei der drei Nullstellen.
- b) Konstruieren Sie einen Funktionsterm für ein Polynom 3. Grades, so dass es drei verschiedene reelle Nullstellen besitzt. Untersuchen Sie erneut die Eigenschaften der Tangenten an das Bild an den Stellen der arithmetischen Mittel von je zwei der Nullstellen.
- c) Verallgemeinern Sie Ihre Aussagen!
- d) Welche weiteren Fragen stellen sich in diesem Zusammenhang?

Als Hausaufgabe bietet es sich an, die Schüler auf das Problem der mehrfachen Nullstellen hinzuweisen, wenn sie es denn noch nicht im Unterricht erkannt haben sollten.

Gegeben ist ein Polynom  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x) = x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12$ .

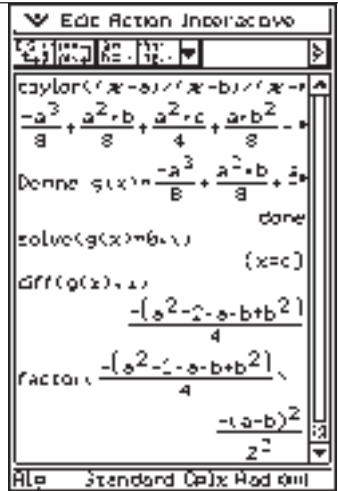
- a) Untersuchen Sie die Eigenschaften der Tangenten an das Bild von  $f$  an der Stelle des arithmetischen Mittels der Nullstellen.
- b) Konstruieren Sie einen Funktionsterm für ein Polynom 3. Grades, so dass es zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt (eine davon ist daher doppelte Nullstelle) und untersuchen Sie erneut die Eigenschaften der Tangenten an das Bild an der Stelle des arithmetischen Mittels der Nullstellen.

### 3 Das Beweisen der Verallgemeinerung

Für beliebige Polynome mit drei reellen Nullstellen lassen sich aufgrund der betrachteten Beispiele die folgenden Eigenschaften vermuten.

- Ist der Koeffizient von  $x^3$  positiv, dann haben alle Tangenten an den festgelegten Stellen negative Anstiege.
- Die Nullstelle der Tangentenfunktion an der Stelle des arithmetischen Mittels zweier Nullstellen ist gleich der dritten noch nicht berücksichtigten Nullstelle des untersuchten Polynoms.

Bleibt die Frage nach einem Beweis der gefundenen Aussagen. Leistungsstarke Schüler sind in der Lage die allgemeinen Nachweise mithilfe des CAS oder auch ohne dessen Hilfe zu führen. Mit den dem Autor bekannten CAS-Rechnern geht es am einfachsten, wenn den Schülern zu einem vorherigen Zeitpunkt mitgeteilt wurde, dass man mit dem Taylorpolynom ersten Grades die Tangentenfunktion erhält<sup>11</sup>.

 <p>The screenshot shows the following steps in a CAS environment:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Command: <code>taylor((x-a)/(x-b)/(x-c), x, 1)</code></li> <li>Result: <math>\frac{-a^3}{8} + \frac{a^2+b}{8} + \frac{a^2+c}{4} + \frac{a+b^2}{8} + \dots</math></li> <li>Command: <code>Define g(x) := -a^3/8 + (a^2+b)/8 + a^2/4 + (a+b^2)/8</code></li> <li>Command: <code>solve(g(x)=0, x)</code></li> <li>Result: <math>\{x=c\}</math></li> <li>Command: <code>dff(g(x), x)</code></li> <li>Result: <math>-\frac{(a^2 - a - b + b^2)}{4}</math></li> <li>Command: <code>factor(-a^2 - a - b + b^2)</code></li> <li>Result: <math>-(a-b)^2</math></li> </ul>	<p>Die Tangentenfunktion von <math>y = (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)</math> an der Stelle <math>\frac{a+b}{2}</math> wurde mit <math>g</math> bezeichnet.</p> <p>Es folgt die Bestimmung der Nullstelle von <math>g</math> und die Berechnung des Anstiegs der Tangente. Der gefundene Term wurde faktorisiert dargestellt, um die Frage des Vorzeichens leicht klären zu können.</p> <p>Natürlich sind andere Darstellungen des Lösungsweges ohne Nutzung des Taylorkommandos des Rechners möglich, die auch von leistungsstarken Schülern gefunden und erfolgreich bewältigt werden.</p>
--	--

Führt man Beweise mithilfe des CAS, dann stellt sich die Frage, wie sinnvoll ein solches Vorgehen ist. Die Erfahrungen des Autors besagen, dass so geführte Beweise in der Regel nicht im Vorherein angestrebt werden sollten<sup>12</sup>. Ein CAS sollte in erster Linie zum Entdecken, zum Untersuchen und zum Darstellen von Problemen sowie zur Überprüfung der Ergebnisse dienen. Ein verstärktes Nutzen von CAS zum Beweisen führt zur Trivialisierung

<sup>11</sup> Einer Behandlung des Taylorpolynoms wird wegen der bloßen Mitteilung eines Faktes nicht vorgegriffen.

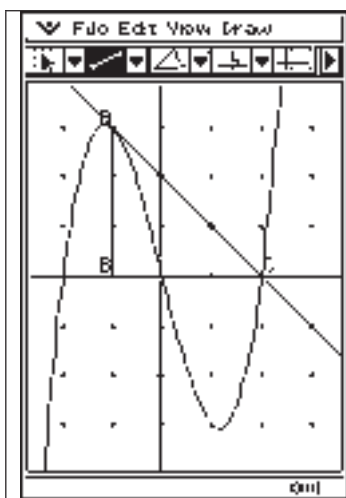
<sup>12</sup> Findet ein Schüler einen Beweis mithilfe des CAS, dann ist das in der Regel (sehr) positiv zu bewerten.

vieler Lerninhalte. Aus mathematischer Sicht ist das sehr zu begrüßen, denn an geeigneten neuen Problemfeldern für das Lernen mangelt es ja nicht. Die schulpolitische Sicht ist aber eine andere. Neue gehaltvolle Lehrplaninhalte/Probleme, die die alten ersetzen, müssen in der Gesellschaft erst Akzeptanz finden! Wesentliche Veränderungen im Lehrplan setzen lange und ausgiebige Diskussionen voraus.

Der Autor schlägt in Ergänzung eines computerunterstützten Beweises vor, die dem Problem innewohnenden Potenzen zur Entwicklung von Problemlösefähigkeiten zu nutzen. Der vorgeschlagene Weg ermöglicht anstelle des Alles oder Nichts beim allgemeinen Herangehen, dass der Schüler sich den Beweis auf unterschiedlichen Niveaustufen erschließen kann - er erhält auf diesem Weg vielfältige und gehaltvolle Lernmöglichkeiten.

Da das Polynom drei reelle Nullstellen haben sollte, ist es zum Einstieg empfehlenswert den Nachweis an einem möglichst einfachen Beispiel zu führen.

*Untersuchung der Tangente an das Bild von  $y = f(x) = x^3 - 4 \cdot x$  an der Stelle -1.*



Die Zahl -1 ist das arithmetische Mittel der Nullstellen 0 und -2 und die Funktion hat an dieser Stelle -1 die Ableitung -1.

Eine Tafelskizze mit dem Graphen, dem Punkt A(-1; 3) und der Tangente mit dem Anstieg -1 in diesem Punkt erhellt den Sachverhalt vollständig.

Frage an die Schüler: Was lässt sich über das Dreieck aussagen, wenn der Anstieg -1 ist?

Das Dreieck ABC, wobei B der Lotfußpunkt von A auf die x-Achse und C der Schnittpunkt der Tangente mit dieser Achse sein soll, ist gleichschenkelig-rechtwinklig.

Die Länge von BC ist daher 3 und die x-Koordinate von C demzufolge 2.

*Untersuche ein ähnliches Beispiel (Konstruiere es selbst!) oder den allgemeinen Fall<sup>13</sup> einer ungeraden Funktion dritten Grades mit drei reellen Nullstellen.*

Der allgemeine Fall einer ungeraden Funktion mit  $y = f(x) = x^3 - d^2 \cdot x = (x - d) \cdot (x + d) \cdot x$ , wobei d positiv und reell sein soll, wird im Folgenden vorgestellt.

<sup>13</sup> Auf den Einfluss des Koeffizienten beim kubischen Glied wird nicht eingegangen.

Das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen  $d$  und  $-d$  ist null; man erhält bezüglich des Ausgangsproblems den trivialen Fall. Wegen der Symmetrie des Bildes zum Ursprung braucht man nur noch die Tangente an der Stelle  $-\frac{d}{2}$  zu untersuchen.

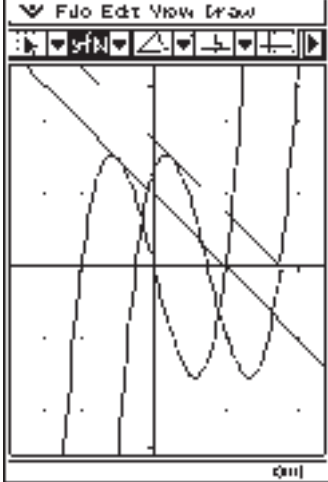
Die Berechnungen sind leicht per Hand durchführbar, eine Zeichnung an der Tafel, die auch ein geeignetes Anstiegsdreieck der Tangente umfasst, erleichtert das Verständnis für die Berechnungen.

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - d^2 \quad \text{und} \quad f'\left(-\frac{d}{2}\right) = -\frac{d^2}{4} \quad \text{sowie} \quad f\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{3 \cdot d^3}{8} .$$

Für die Tangentenfunktion gilt demnach  $t(x) = -\frac{d^2}{4} \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) + \frac{3 \cdot d^3}{8} .$

Und auch von dieser Funktion sollte der Schüler die Nullstelle ohne Hilfsmittel ermitteln können bzw.  $d$  als Nullstelle bestätigen.

Mit den obigen Betrachtungen ist ein erster Schritt in Richtung eines vollständigen Nachweises erfolgt. Der zweite Schritt beinhaltet die Untersuchung der Eigenschaft beim Verschieben des Graphen in  $x$ -Richtung. Einer einfachen Zeichnung kann man die Zusammenhänge umfassend entnehmen.

	<p>Im Bild sind die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen</p> $y = f(x) = x^3 - 4 \cdot x \quad \text{und}$ $y = g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{dargestellt.}$ <p>Das Verschieben des Graphen von <math>f</math> um 1,5 in <math>x</math>-Richtung verändert (natürlich) nicht die geometrischen Eigenschaften des Graphen.</p> <p>Abschließend kann man die Schüler auffordern eine Funktion zu bestimmen, deren Graph ein nach links verschobenes Bild des Graphen von <math>f</math> ist.</p>
---	---

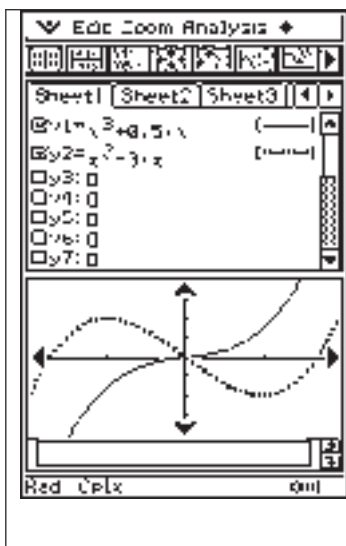
Der dritte Schritt – was passiert bei einer Verschiebung des Graphen in  $y$ -Richtung – sollte den Spezialisten in einer Hausaufgabe (oder dem Lehrvortrag?) vorbehalten bleiben<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Eine Möglichkeit für den Beweis ist am Ende des Artikels kurz dargestellt.

Damit die Schüler solche Problemlösestrategien entwickeln und erfolgreich anwenden können, sie in der Lage sind, Erkenntnisse selbstständig oder mit geringer Unterstützung zu gewinnen, ist vor allem eine klare und langfristige Schwerpunktsetzung sowie viel Übung<sup>15</sup> notwendig. Im Unterricht können solche Fähigkeiten vom Schüler erworben werden, wenn man insbesondere stets hohe Anschaulichkeit anstrebt. Der Autor hofft, dass genau das in den obigen Überlegungen und Vorschlägen deutlich wurde.

#### 4 Beispiele aus vorangegangenen Unterrichtseinheiten

*Kurvenformen von Polynomen 3. Grades* (der Koeffizient von  $x^3$  sei positiv)



Man kann die Graphen auf zwei Typen zurückführen.

Im Anfangsunterricht der Analysis sollten die Bilder von  $y = x^3 + x$  und  $y = x^3 - x$  durch geometrische Addition bzw. Subtraktion konstruiert werden.

Der Nachweis, dass man alle Bilder auf die Typen  $y = x^3 \pm k \cdot x$  mit positivem  $k$  zurückführen kann, wird anhand einfacher Beispiele ( $y = x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 3$ ,  $y = x^3 + 6 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 13$ ) und in leistungsstarken Klassen auch allgemein geführt.

Allgemeiner Nachweis der Punktsymmetrie: Für die Funktion  $f$  mit  $y = f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$  lässt sich mittels CAS leicht zeigen, dass gilt:

$$y - f\left(-\frac{b}{3 \cdot a}\right) = a \cdot \left(x + \frac{b}{3 \cdot a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3 \cdot a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{3 \cdot a}\right).$$

Legt man ein neues Koordinatensystem in den (Wende-) Punkt  $W\left(-\frac{b}{3 \cdot a}, f\left(-\frac{b}{3 \cdot a}\right)\right)$ , dann gilt im neuen Koordinatensystem

mit den Variablen  $\bar{x} = x + \frac{b}{3 \cdot a}$  und  $\bar{y} = y - f\left(-\frac{b}{3 \cdot a}\right)$  für den gegebenen Graphen

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x}^3 + \left(c - \frac{b^2}{3 \cdot a}\right) \cdot \bar{x} = a \cdot \bar{x}^3 + k \cdot \bar{x}. \quad \text{Der Graph ist das Bild einer ungeraden Funktion.}$$

<sup>15</sup> Beispiele im folgenden Abschnitt

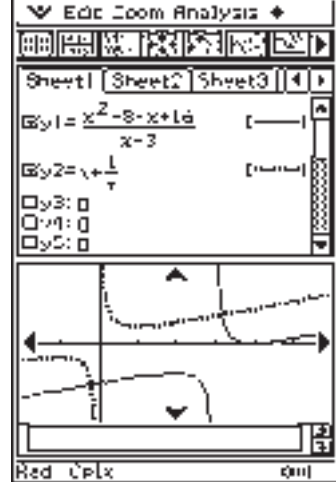


### Lineare und quadratische Funktionen

Die für Polynome dritten Grades angestellten Überlegungen erschließen sich dem Schüler, wenn bei der Behandlung der linearen, der quadratischen und der trigonometrischen Funktionen solche Vorgehensweisen Unterrichtsgegenstand waren.

Der Schüler kennt die Zusammenhänge zwischen den Bildern von Funktionen mit den Gleichungen  $y = f(x)$  und  $y = a \cdot f(x+b) + c$  und kann sie begründen. Er ist weiterhin in der Lage nachzuweisen, dass die Bilder von quadratischen Funktionen (zum Beispiel mit den Gleichungen  $y = x^2 - 4 \cdot x + 5$  und  $y = -x^2 - 6 \cdot x$ ) eine Symmetrieachse haben.

### Gebrochenrationale Funktionen

	<p>Im Bild wird ein Beispiel der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen den Graphen von gebrochenrationalen Funktionen vorgestellt.</p> <p>Das Bild der Funktion <math>y_1</math> kann man aus dem Bild von <math>y_2</math> erhalten, indem man es um 3 Einheiten in <math>x</math>-Richtung und um -2 in <math>y</math>-Richtung verschiebt, was leicht der Abbildung zu entnehmen ist.</p> <p>Der Zusammenhang ist natürlich auch zu beweisen. Dies wird im Unterricht geübt und in Leistungskontrollen abverlangt.</p>
--	--

Zur Illustration ein Beispiel aus einer Kursarbeit eines Leistungskurses in der Klasse 11.

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x-2} \quad \text{und} \quad y = g(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x-2} \quad \text{und} \quad y = h(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3}$$

- a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten, ihren Schnittpunkt und weisen Sie nach, dass die Bilder punktsymmetrisch sind!
- b) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen den Bildern dieser Funktionen und denen von  $y = \frac{1}{x}$  bzw.  $y = x + \frac{1}{x}$  bzw.  $y = x - \frac{1}{x}$ .

Wichtig ist dem Autor bei diesen und ähnlichen Beispielen, dass den Schülern bewusst wird, dass die behandelten Funktionen einer oder mehreren Klassen zugeordnet werden können. Auch der Nachweis der Punktsymmetrie, wenn es sie denn gibt, sollte in der Regel erfolgen. Wichtig für das Mathematiklernen an dieser Stelle ist, dass der Schüler erlernt, den erkannten geometrischen Zusammenhang algebraisch auszudrücken.

Zur Herleitung einer Gleichung zum Nachweis der Punktsymmetrie eines Graphen wird folgendes Bild an die Tafel gezeichnet.

P und P' liegen auf dem Graphen von f symmetrisch zu dem nachzuweisenden Drehzentrum M, wobei der Punkt P auf dem Graphen frei gewählt wurde.

Bezeichnungen: P(x; f(x)); M(a; b); P'(x'; f(x'))

Damit M der Mittelpunkt der Strecke PP' ist, muss a das arithmetische Mittel von x und x'

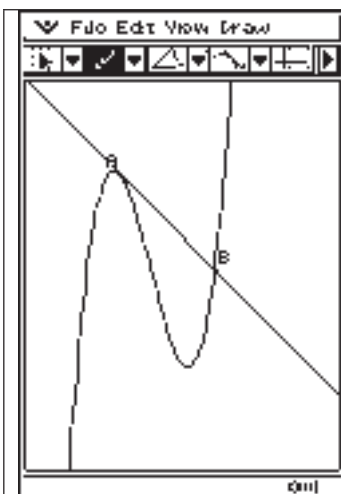
$$\text{sein: } \frac{x+x'}{2} = a \Leftrightarrow x' = 2a - x \Leftrightarrow x' = x + 2 \cdot (a - x).$$

Und b muss das arithmetische Mittel von f(x) und f(x') sein.

$$\text{Kurz: } \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(x + 2 \cdot (a - x))) = b \text{ muss für alle } x \text{ des Definitionsbereichs wahr sein.}$$

## 5 Lösungsvariante dritter Schritt – Verschiebung in y-Richtung<sup>16</sup>

Der Unterschied zu einer Lösung mithilfe des allgemeineren Ansatzes  $y = f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$  ist, dass man alle Umformungsschritte per Hand ohne größere Schwierigkeiten (in aller Ruhe!) durchführen kann, die Anzahl der Parameter von drei auf zwei verringert wird (was allerdings nicht zu bedeutsamen Vereinfachungen führt) und dass vor allem vielfältige Bezüge zu vormals Erlerntem (und Wiederholtem!) hergestellt werden.



Zwischen dem lokalen Hoch- und dem lokalen Tiefpunkt wählt man einen Punkt A und betrachtet die Tangente an die Kurve in A, die diese in dem weiteren Punkt B schneidet – siehe Bild links. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem wird so gewählt, dass die y-Achse durch den Wendepunkt = Punkt der Zentralsymmetrie vertikal und die x-Achse durch B verläuft. Wenn man  $y = f(x) = x^3 - d^2 \cdot x + h$  annimmt, dann lautet die Gleichung der Tangente in  $A(x_0; y_0)$   $y = (3 \cdot x_0^2 - d^2) \cdot x - 2 \cdot x_0^3 + h$  und für den Schnittpunkt B erhält man die Gleichung (eine Lösung ist  $x_0$ )  $3 \cdot x_0^2 \cdot x - 2 \cdot x_0^3 = x^3 \Leftrightarrow 0 = (x - x_0)^2 \cdot (x + 2 \cdot x_0)$ . B hat also die x-Koordinate  $-2 \cdot x_0$  und sie ist somit eine Nullstelle von f.  $\Rightarrow f(-2 \cdot x_0) = 0 = -8 \cdot x_0^3 + d^2 \cdot 2 \cdot x_0 + h \Rightarrow h = -2d^2 x_0 + 8x_0^3$

Einsetzen liefert  $\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) = x^3 - x \cdot d^2 + 8x_0^3 - 2x_0 \cdot d^2 \\ y = (x + 2x_0) \cdot (x^2 - 2x_0 x + 4x_0^2 - d^2) \end{array} \right\}$ . Die

Summe der beiden anderen Nullstellen von f ist nach dem Wurzelsatz von Vieta  $2 \cdot x_0$ .

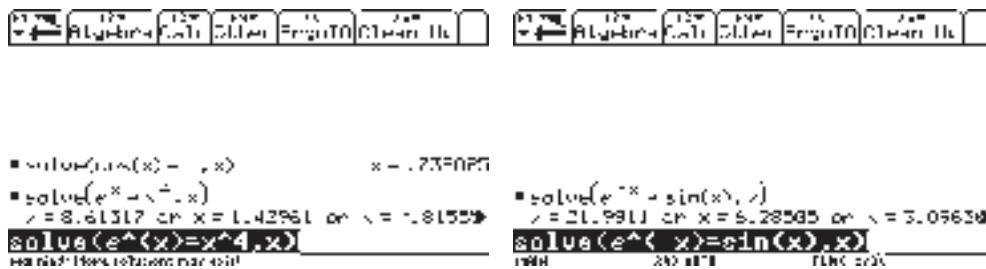
<sup>16</sup> Die Begründung dafür, dass das Aufgeführte tatsächlich das Gewünschte beweist, ist dem Leser überlassen.

Hubert Langlotz

### 3 HINWEISE ZUM LÖSEN VON GLEICHUNGEN

Das Lösen von Gleichungen bzw. die analoge Fragestellung der Bestimmung der Nullstellen einer Funktion gelingt nur in einfachen Fällen exakt durch sogenannte Äquivalenzumformungen. So konnte im 19. Jahrhundert bewiesen werden, dass i. a. nur algebraische Gleichungen bis zum Grad 4 exakt lösbar sind. Erst recht existieren für viele andere Gleichungen wie z. B.  $\cos(x) = x$  oder  $e^x = x^4$  keine exakten Verfahren. In diesen Situationen ist man an einer Näherungslösung, einer möglichst genauen Approximation der Lösung, interessiert.

Auch der TC liefert in solchen Fällen nicht immer alle Lösungen (oft wird „**warning: more solutions may exist**“ angegeben).



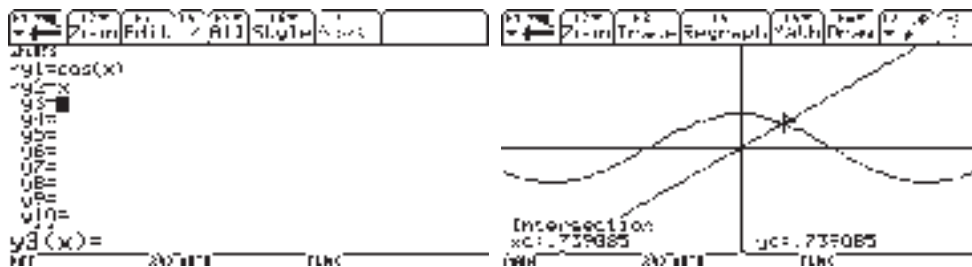
Wir wollen hier Verfahren kennen lernen, die es ermöglichen, solche Probleme mit möglichst sinnvoller Genauigkeit zu bearbeiten.

**Hinweis 1:** Oft reichen grafische Veranschaulichungen aus, um die Lösungssuche zu vereinfachen.

Beispiel  $\cos(x) = x$

Wir betrachten die linke Seite und die rechte Seite als unabhängige Funktionen und suchen nach Schnittpunkten der Funktionsgraphen (**Schnittpunktmethode**).

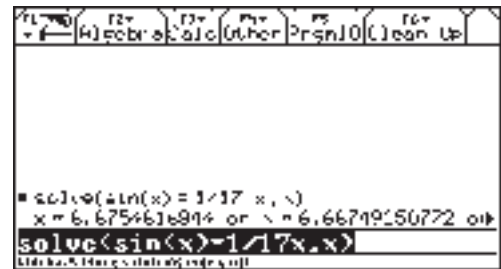
Begründen Sie, dass es neben der gefunden Lösung der Gleichung  $\cos(x) = x$  mit  $x = 0,739$  keine weitere geben kann!



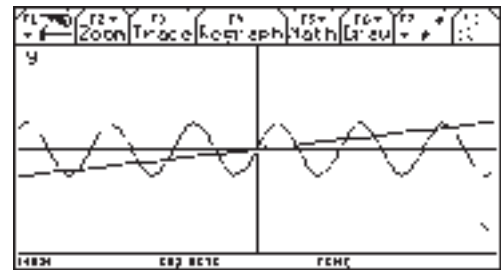
Hier noch ein Beispiel aus dem Abitur von 2004

Es sei  $f(x) = \sin(x)$  und  $g(x) = \frac{1}{17}x$ .

Geben Sie die Anzahl aller gemeinsamen Punkte der Graphen dieser Funktionen an und beschreiben Sie Ihr Vorgehen!



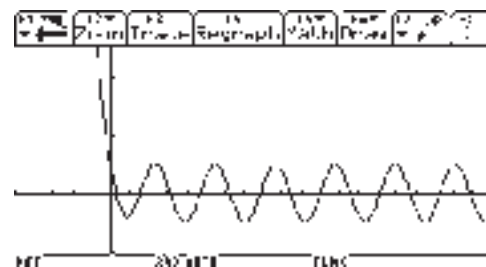
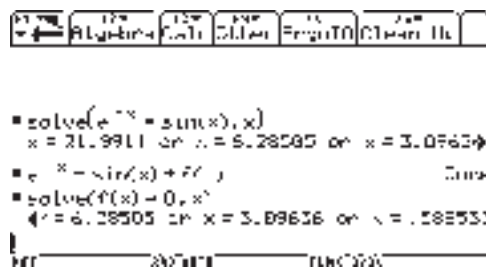
Der CAS-Rechner warnt, dass mehr Lösungen existieren können! Er zeigt insgesamt nur sieben Lösungen an. Durch Abzählen aus der graphischen Darstellung und durch inhaltliche Überlegungen (welche?) ist zu erkennen, dass genau 11 gemeinsame Punkte existieren.



**Hinweis 2:** In vielen Fällen ist es sinnvoller, aus der Gleichung  $g(x) = h(x)$  eine Funktion  $f(x) = g(x) - h(x)$  zu bilden und diese auf Nullstellen zu untersuchen (Nullstellenmethode).

Beispiel 2: Aus der Gleichung  $e^{-x} = \sin(x)$  wird die Funktion  $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$ .

Selbstverständlich findet der TC auch jetzt nur 4 Nullstellen, aber wenn man sich die Grafik ansieht, fällt auf, dass es (wahrscheinlich) unendlich viele gibt.



Begründen Sie, dass es unendlich viele Lösungen gibt!

## 2 Verfahren zum näherungsweise Lösen von Gleichungen (Näherungsmethoden.)

Bereits bekannt ist das sogenannte **Bisektionsverfahren** (fortlaufende Halbierung des Lösungsintervalls). Eine i. a. schnellere Variante ist das sogenannte **Newtonsche Näherungsverfahren**.

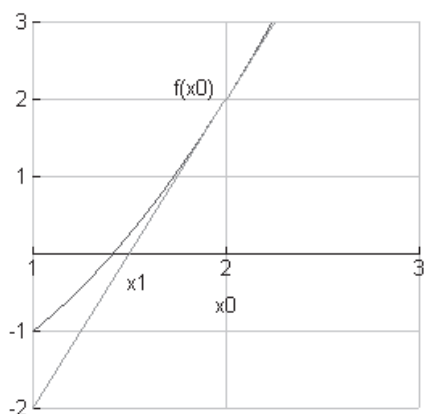
**Newton'sches Näherungsverfahren**

Ausgehend von einem geeigneten Startwert  $x_0$  können Näherungswerte für eine **einfache** Nullstelle der Funktion  $f$  durch folgende Iterationsvorschrift bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Zeigen Sie, dass sich diese Beziehung aus der allgemeinen Tangentengleichung  $t(x)$  durch Nullsetzen von  $t(x)$  ergibt und erläutern Sie das Prinzip auch anhand der Grafik!

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



```

[Algebra] [Calc] [Edit] [Print] [Clear] [Hk]
▀ x2 - sin(x) + f(x)           Done
▀ \frac{f(x)}{d/dx(f(x))} → newton(x)   Done
▀ newton(1)                      .978528
▀ newton(.478)                    .584117
▀ newton(.5841169874253)         .583525
newton(ans<1>)

```

Speichern Sie sich die Funktion  $newton(x)$  in ihrem TC und vollziehen Sie das angegebene Beispiel nach!

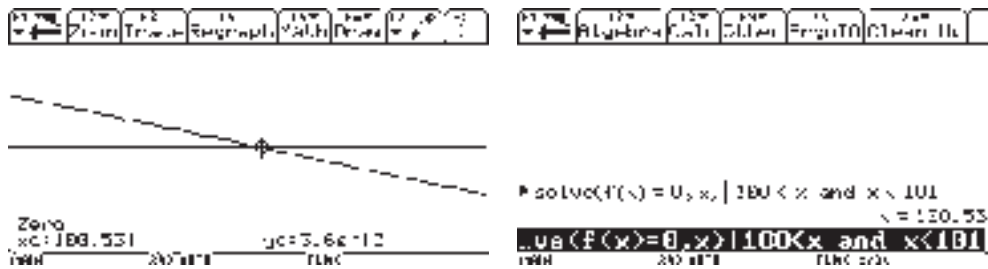
Wie viel Nullstellen existieren im Intervall  $[100, 101]$  ?

```

[Algebra] [Calc] [Edit] [Print] [Clear] [Hk]
▀ newton(100)                      100.567
▀ newton(100.58721391516)         100.531
▀ newton(100.55090551629)         100.531
▀ newton(101)                      100.493
▀ newton(100.49324739978)         100.531
newton(ans<1>)

```

Selbstverständlich könnte man auch hier wieder auf grafische Lösungsmöglichkeiten zurückgreifen oder den Variablengrundbereich einschränken.



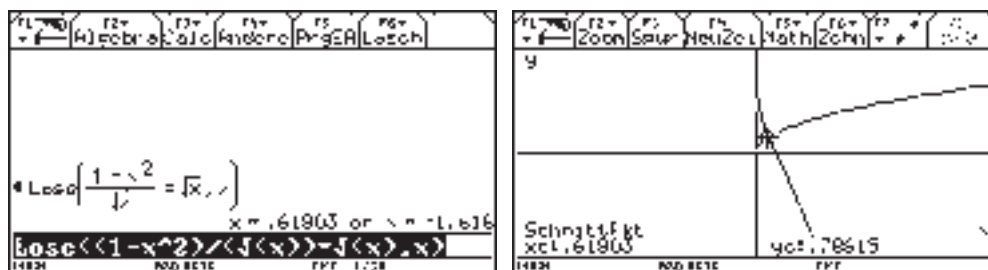
**Hinweis 3: Unter bestimmten Umständen kann es passieren, dass das Newton-Verfahren nicht konvergiert.**

**Aufgabe**

Finden Sie mögliche Sachverhalte, die dazu führen, dass dieses Verfahren versagt und erläutern Sie diese an den Beispielen  $f(x) = x^{(1/3)}$  bzw.  $f(x)=\cos(x)$  mit dem Startwert  $x_0=0$ !

Suchen Sie im Internet nach weiteren Näherungsverfahren und stellen Sie diese vor!

**Ein weiteres Beispiel:**



Es wird auch eine negative Lösung angegeben, obwohl  $\sqrt{x}$  nicht für negative Zahlen definiert ist. Eine graphische Veranschaulichung (Schnittpunktmethode) kann helfen, dieses zu erkennen. (Ursache: Der TI rechnet intern im Bereich der komplexen Zahlen, in dem auch Wurzeln aus negativen Zahlen zugelassen sind.)

Zum Schluss sei hier noch ein Auszug aus den Rahmenrichtlinien für das Gymnasium Schuljahrgänge 7 – 10 Mathematik in Niedersachsen angeführt:

„Die Verfügbarkeit eines Rechners ermöglicht es, universelle, einheitliche Strategien zur numerischen Lösung unterschiedlicher Gleichungstypen zu erarbeiten. Neben das tabellarische und das grafische Lösen treten Iterationsverfahren und in speziellen Fällen symbolische Verfahren. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, aus der Vielfalt der Lösungsverfahren das dem Problem angemessene auszuwählen; dazu müssen sie ein grundlegendes Verständnis für die einzelnen Verfahren erwerben. Die Beschränkung auf symbolische Lösungsverfahren und die damit einher gehende Reduktion auf Gleichungen einfachen Typs ist durch den Einsatz von GTR oder CAS nicht mehr sinnvoll. Beim numerischen Lösen ist also die

Einteilung in unterschiedliche Gleichungstypen nicht notwendig. Durch den Rechnereinsatz eröffnen sich vielfältige Möglichkeiten, interessante Fragestellungen und realitätsnahe Anwendungen im Unterricht mit vertretbarem Zeitaufwand zu behandeln.

Das heuristische Vorgehen „Isolierung der Variablen“ beim symbolischen Lösen behält in Spezialfällen seine Bedeutung; es muss aber nicht mehr so zeitaufwändig eingeübt werden (vgl. Kapitel 2.5). Dadurch gewinnt man Zeit z. B. zum Behandeln komplexerer Aufgaben oder zur Umsetzung von Lösungsalgorithmen in ein Programm, etwa für quadratische Gleichungen.

Bei der Erarbeitung eines iterativen Lösungsverfahrens bieten sich Möglichkeiten, Grenzen des Rechners beispielhaft aufzuzeigen. Dabei kann auch auf Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens eingegangen werden.<sup>17</sup>

---

<sup>17</sup> Rahmenrichtlinien für das Gymnasium Schuljahrgänge 7 – 10 Mathematik in Niedersachsen, Hannover 2003

## 4 STOFFGEBIET „STOCHASTIK II“

### 4.1 WAS SAGT DER LEHRPLAN

„Alternativ zur Vektorrechnung kann aus der Klassenstufe 10 die Stochastik fortgesetzt werden.“

Im **Leistungsfach** wird der Zusammenhang zwischen (diskreter) Binomialverteilung und (stetiger) Normalverteilung untersucht.

In der beurteilenden Statistik wenden die Schüler (des **Leistungs- und des Grundfaches**) stochastische Methoden an, die ihnen helfen bei konkurrierenden Hypothesen Entscheidungen zu finden.“ (Mathematik, Lehrplan für das Gymnasium, Thüringer Kultusministerium, Erfurt 1999, S. 64)

Zeitrichtwerte: Grundfach ca. 40 Stunden, Leistungsfach 60 Stunden

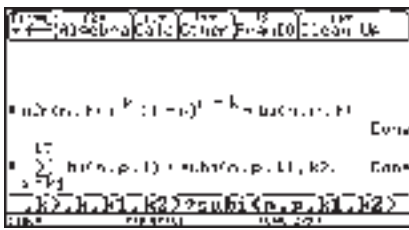
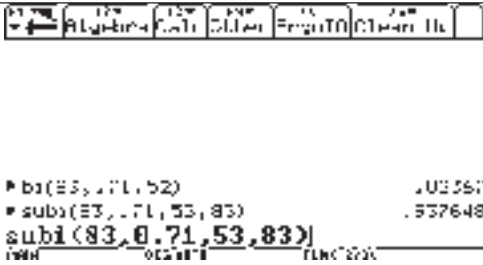
GF	LF		Lernziele und Inhalte	Bemerkungen zum CAS-Einsatz
		S6	<b>Normalverteilung</b>	
	×	S6.1	Bernoulli-Gesetz der großen Zahlen verstehen und interpretieren	mittels Simulation und Variation von $n$ und $p$ experimentieren; selbst definierte bi- und sub-Funktionen bzw. die im TC implementierten Funktionen <code>binompdf</code> und <code>binomcdf</code> nutzen statt Tabellen
	×	S6.2	Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung erkennen	Histogramme erstellen; $N_{\mu,\sigma}$ -Graphen
	×	S6.3	lokale und globale Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE kennen, begründen und anwenden	$B_{n,p}$ -Kontrollrechnungen für näherungsweise $N_{\mu,\sigma}$ -verteilte Zufallsgrößen; selbst definierte

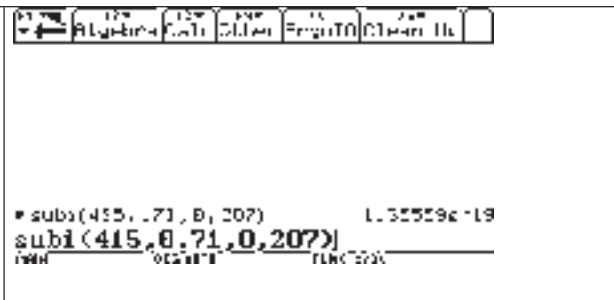



				bzw. TC-implementierte Funktion $\Phi$ und $\Phi_1$ bzw. normcdf und normpdf nutzen statt Tabellen
		S7	<b>Beurteilende Statistik - Testen von Hypothesen</b>	
x	x	S7.1	Alternativtest kennen und anwenden	Gleichungen lösen; systematisches Probieren;  über Variieren von Parametern Tests optimieren
x	x	S7.2	Signifikanztest kennen und anwenden	

#### 4.2 GRUNDLEGENDE BERECHNUNGEN UND VISUALISIERUNGEN MITHILFE DES TASCHEPCOMPUTERS

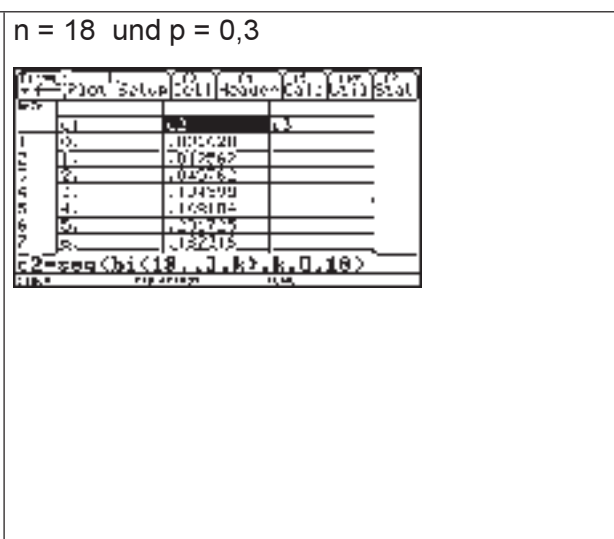
##### 1. Berechnen von Binomialwahrscheinlichkeiten

$X \sim B_{n,p}$ $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	<p>Selbst definierte Funktionen wie bi und subi haben sich als nützliche „Grundbausteine“ zum Berechnen von Binomialwahrscheinlichkeiten erwiesen.</p> 
<p><math>n = 83</math> und <math>p = 0,71</math></p> <p><math>P(X = 52) \approx 0,024</math></p> <p><math>P(X &gt; 52) = P(X \geq 53) \approx 0,94</math></p> <p>Der bei der Nutzung eines Tafelwerkes ansonsten typische Lösungsweg</p> <p><math>P(X &gt; 52) = 1 - P(X \leq 52) \approx 0,94</math></p> <p>wäre hier zeitaufwändiger.</p>	

<p><math>n = 415</math> und <math>p = 0,71</math></p> <p><math>P(X \leq 207) \approx 1,4 \cdot 10^{-19}</math></p>	
<p><math>n = 1420</math> und <math>p = 0,71</math></p> <p><math>P(X &gt; 1000) \approx 0,67</math></p> <p>Falls im TC die Flashapplikation Statistik-List-Editor implementiert ist, ermöglichen die Funktionen binomPdf und binomCdf auch die Berechnung von Binomialwahrscheinlichkeiten mit großen Werten für <math>n</math> und <math>k</math> bzw. über wesentlich größere Bereiche. (Aber auch hier sind Grenzen gesetzt.) Beide Funktionen erfordern dieselben Parameterfolgen (<math>n, p, k</math>) bzw. (<math>n, p, k_1, k_2</math>) wie <math>bi</math> bzw. <math>subi</math>, was man der Statuszeile vor dem Betätigen der ENTER-Taste entnehmen kann.</p>	

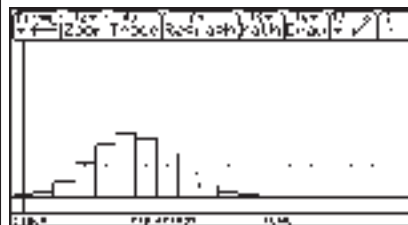
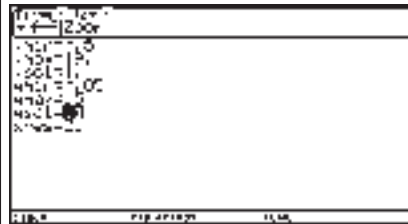
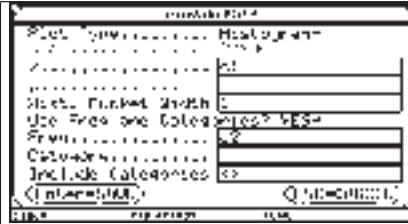
Falls binomPdf und binomCdf im CATALOG nicht enthalten sind, können diese im TI-Webshop ([education.ti.com/shop](http://education.ti.com/shop)) erworben und auf dem TC installiert werden.

## 2. Zeichnen von Histogrammen

<p>Ein Histogramm für <math>B_{n,p}</math> erstellen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>im Datenmatrixeditor (unter F1 Format muss Auto-calculate „ON“ eingestellt sein)             <ul style="list-style-type: none"> <li>in c1 seq(<math>k, k, 0, n</math>)</li> <li>in c2 seq(<math>bi(n, p, k), k, 0, n</math>)</li> </ul> </li> </ul> <p>F2 Plot Setup</p> <p>(Insbesondere bei großen <math>n</math>-Werten sollte man nach dem Eintragen in die Tabelle Auto-</p>	<p><math>n = 18</math> und <math>p = 0,3</math></p> 
---	--

calculate auf „OFF“ stellen.)  
 geeignete Plot mit der Pfeiltaste auswählen  
 geeignete Fenstereinstellung wählen

**ACHTUNG** bei der Fenstereinstellung: xmin ist als linker Rand des ersten zu zeichnenden Rechtecks zu definieren, d.h. als kleinster Wert der Zufallsgröße minus der Hälfte des Wertes von Hist.Bucket Width (eventuell jeweils plus ein ganzzahliges Vielfaches der Rechteckbreite).

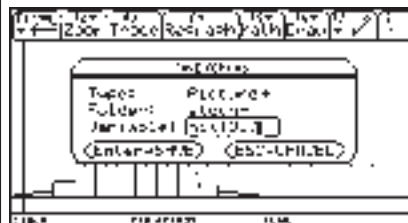


Zwei Histogramme  $B_{n; p}$  und  $B_{m; q}$  in ein und demselben Koordinatensystem veranschaulichen

$n = 18$  und  $p = 0,3$   
 $n = 18$  und  $p = 0,9$

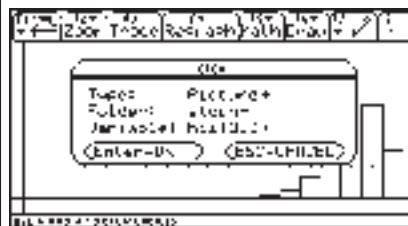
Lösungsweg 1

Das erstellte Histogramm von  $B_{n; p}$  als Bild speichern über F1 2: Save Copy As



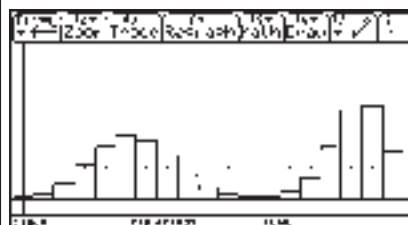
(gegebenenfalls ohne Gitterpunkte und ohne Achsen)

- Das Histogramm von  $B_{m; q}$  (mit derselben Fenstereinstellung wie bei  $B_{n; p}$ ) erstellen.



Das gespeicherte Bild des Histogramms von  $B_{n; p}$  über F1 1:Open

in dasselbe Koordinatensystem hereinholen.

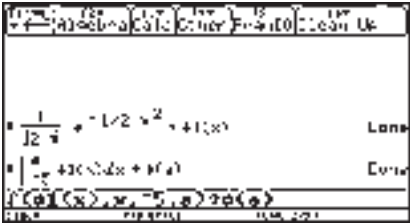
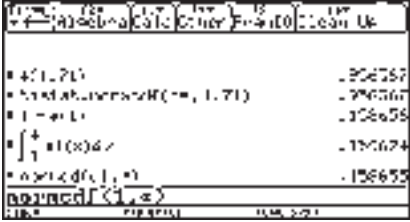
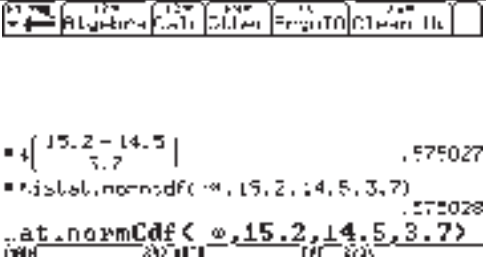


Lösungsweg 2

Beide Histogramme in ein und derselben Da-

<p>ta-Matrix-Tabelle erstellen, wenn dieselbe Rechteckbreite gewählt wird.</p>	
--	--

3. Berechnen von Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung

<p><math>X \sim N_{0,1}</math></p> $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ $= \int_{-\infty}^a \varphi(x) dx$ $= \Phi(a)$ <p>Nach der <math>3\sigma</math>-Regel ist <math>\int_{-5}^a \varphi(x) dx</math> ein sehr guter Näherungswert für <math>\Phi(a)</math>. Gibt man sich mit einer etwas geringeren Genauigkeit zufrieden, so lässt sich die Rechenzeit verkürzen, wenn man die untere Grenze vergrößert.</p>	<p>Selbst definierte Funktionen wie <math>\Phi_1</math> und <math>\Phi</math> haben sich als recht nützliche „Bausteine“ erwiesen.</p>  <p>Analog zur Binomialverteilung sind für die Normalverteilung die Funktionen normpdf und normcdf implementiert.</p> <p>normcdf(untere Grenze, obere Grenze, Erwartungswert <math>\mu</math>, Standardabweichung <math>\sigma</math>) bzw. speziell normcdf(untere Grenze, obere Grenze) für <math>\mu = 0</math> und <math>\sigma = 1</math></p>
<p><math>P(X &lt; 1,71) \approx 0,956</math></p> <p><math>P(X &gt; 1) \approx 0,159</math></p>	
<p><math>Y \sim N_{\mu, \sigma}</math></p> <p><math>\mu = 14,5</math> und <math>\sigma = 3,7</math></p> <p><math>k = 15,2</math></p> <p><math>P(Y &lt; k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \approx 0,575</math></p>	

## 4.3 GRUNDLEGENDE PROBLEME DER STOCHASTIK S7 MIT HILFE DES TC LÖSEN

1. Für das große Schulfest des Ernst-Abbe-Gymnasiums hatten Jonas und Lars zwei Tombolen vorbereitet. Sie legten zu diesem Zweck die 2070 Lose der Tombola 1 mit einem Gewinnanteil von 0,5 sowie die 2070 Lose der Tombola 2, die äußerlich den Losen der Tombola 1 glichen, aber unter denen sich nur 345 Gewinnlose befanden, jeweils in eine Glaswanne aus dem Chemieraum und beschrifteten diese entsprechend der Tombola mit 1 bzw. 2. Versehentlich benutzte Jonas dazu einen wasserlöslichen Folienstift. Für die Verlosung konnten nun aber Jonas und Lars nur 350 Preise organisieren, so dass man sich entschloss, lediglich die Tombola 2 zu nutzen. Am Tag vor dem Fest herrscht große Aufregung, denn die Beschriftungen auf den Glaswannen sind nicht mehr zu entziffern. Welche Lose gehören zu welcher Tombola? Eine Überprüfung aller Lose einer der beiden Tombolen (zumindest von so vielen, bis sich unter ihnen 346 Gewinnlose oder 1036 Nieten befinden) wäre nicht nur sehr zeitaufwändig, sondern würde außerdem alle diese Lose unbrauchbar machen. Ein Ausweg könnte darin bestehen, aus einer der beiden Tombolen eine Zufallsstichprobe zu entnehmen und aus der Anzahl der dabei gezogenen Gewinnlose auf den Anteil der Gewinnlose der gesamten Tombola zu schließen.

Lösung:

Modellannahmen:

- genau fünf Lose entnommen;
- Entnahme „auf gut Glück“ und ohne Zurücklegen;
- kann als Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 5$  und  $p = \frac{1}{6}$  bzw.  $p = \frac{1}{2}$  betrachtet werden, weil 5 vergleichsweise sehr klein ist gegenüber 2070 ( $2070 \gg 5$ );

Testgröße  $X$ : zufällige Anzahl der Gewinnlose in der Stichprobe

$$X \sim B_{5; p}$$

Testtyp: Alternativtest

Nullhypothese  $H_0$ :  $p = \frac{345}{2070} = \frac{1}{6}$       Gegenhypothese  $H_1$ :  $p = \frac{1}{2}$

Ablehnungsbereich:  $\bar{A} = \{k; \dots; 5\}$

Annahmebereich:  $A = \{0; \dots; k - 1\}$

	Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art $P_{\{H_0 \text{ ist wahr}\}}(\bar{A}) = B_{5; \frac{1}{6}}(X \geq k)$	Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art $P_{\{H_0 \text{ ist falsch}\}}(A) = B_{5; \frac{1}{2}}(X \leq k-1)$	Summe der Fehlerwahr.
	$\text{seq}(\text{subi}(5, \frac{1}{6}, k, 5), k, 0,5) =: li1$	$\text{seq}(\text{subi}(5, \frac{1}{2}, 0, k-1), k, 0,5) =: li2$	$li1 + li2$
0	1		1
1	0,5981		0,63
2	0,1962		0,38
3	0,0355		0,54
4	0,0033		0,82
5	0,0001		0,97

$\Rightarrow \bar{A} = \{2; 3; 4; 5\}$  ergibt die kleinste Summe der Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. und 2. Art. Bei allen anderen Ablehnungsbereichen  $\bar{A} = \{k; \dots ; 5\}$  mit  $k \neq 2$  erhält man für diese Fehlerwahrscheinlichkeit einen Wert größer als 0,5, d.h. größer als die Fehlerwahrscheinlichkeit beim Bestimmen des Urneninhalts durch bloßes Raten.

Durch Variieren des Stichprobenumfangs  $n$  kann man dessen Einfluss auf die Fehlerwahrscheinlichkeiten untersuchen, was dann zu koppeln wäre mit der Suche nach dem Testverfahren, das die geringsten Gesamt(!)-Kosten verursacht.

2. Untersuchen Sie, wie der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  zu wählen ist, wenn die Nullhypothese  $H_0$ : „Die Münze genügt der LAPLACE-Eigenschaft“ bei 489 Münzwürfen auf einem Signifikanzniveau von 0,04 zu testen ist.

Lösung:

Testgröße: zufällige Anzahl der geworfenen Zahlen  $X \sim B_{489; p}$

Testtyp: zweiseitiger Signifikanztest

Nullhypothese  $H_0$  :  $p = 0,5$  Gegenhypothese  $H_1$  :  $p \neq 0,5$

Ablehnungsbereich  $\bar{A} = \{0; \dots ; k_1\} \cup \{k_2; \dots ; 489\}$

Annahmebereich  $A = \{k_1+1; \dots ; k_2-1\}$

Irrtumswahrscheinlichkeit:  $P_{H_0}(\bar{A}) = B_{489; 0,5}(X \leq k_1) + B_{489; 0,5}(X \geq k_2) \leq 0,04$

$$B_{489; 0,5}(X \leq k_1) \leq 0,02$$

$$B_{489; 0,5}(X \geq k_2) \leq 0,02$$

Lösungsweg 1:

$$\text{binomcdf}(489, .5, 0, k_1) \leq 0,02 \text{ bzw. } \text{binomcdf}(489, .5, k_2, 489) \leq 0,02$$

⇒ (systematisches Probieren)  $k_1 \leq 221$  und  $k_2 \geq 268$

Lösungsweg 2:

$489 \cdot 0,5 = 122,25 > 9$ $489 \cdot 0,5 = 244,5$ $B_{489; 0,5}(X \leq k_1) \approx \Phi\left(\frac{k_1 + 0,5 - 244,5}{\sqrt{122,25}}\right) \leq 0,02$	
--	--

Lösungsweg 3

⇒  $k_1 \leq 221$

⇒  $k_2 \geq 268$

Im Zusammenhang mit einer Kontrolle des über den Lösungsweg 2 ermittelten Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  durch  $\text{binomcdf}(489, .5, 0, 221) + \text{binomcdf}(489, .5, 268, 489) \leq 0,04$  ist auch einfach zu testen, ob  $\bar{A}$  noch etwas ausgedehnt werden kann.

3. Verschaffen Sie sich einen Einblick in die Güte der Approximation von  $B_{n,p}(X \leq k)$  durch

$$\Phi\left(\frac{k+0,5-EX}{DX}\right)!$$

- Lösung im Data-Matrix-Editor

in c1 seq(k, k, 0, 100)

in c2 seq(binomcdf(100, .35, 0, k), k, 0, 100)

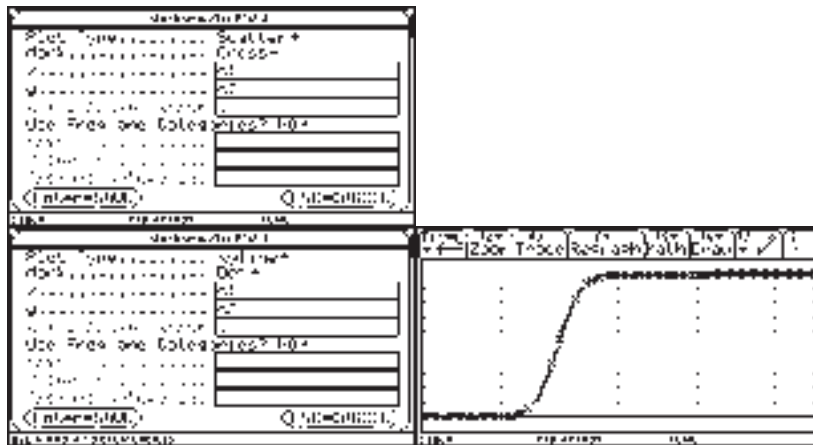
in c3 seq(normcdf(-∞, (k+ .5 - 100 · .35) / √(100 · .35 · .65)), k, 0, 100)

in c4 abs(c2 - c3)

in r1c5 max(c4) ⇒ 0,00418

- Lösung grafisch veranschaulichen:

1	2	3	4	5
53	1	0,0000	0,0000	0,0000
54	2	0,0000	0,0000	0,0000
55	3	0,0000	0,0000	0,0000
56	4	0,0000	0,0000	0,0000
57	5	0,0000	0,0000	0,0000
58	6	0,0000	0,0000	0,0000
59	7	0,0000	0,0000	0,0000
60	8	0,0000	0,0000	0,0000
61	9	0,0000	0,0000	0,0000
62	10	0,0000	0,0000	0,0000
63	11	0,0000	0,0000	0,0000
64	12	0,0000	0,0000	0,0000
65	13	0,0000	0,0000	0,0000
66	14	0,0000	0,0000	0,0000
67	15	0,0000	0,0000	0,0000
68	16	0,0000	0,0000	0,0000
69	17	0,0000	0,0000	0,0000
70	18	0,0000	0,0000	0,0000
71	19	0,0000	0,0000	0,0000
72	20	0,0000	0,0000	0,0000
73	21	0,0000	0,0000	0,0000
74	22	0,0000	0,0000	0,0000
75	23	0,0000	0,0000	0,0000
76	24	0,0000	0,0000	0,0000
77	25	0,0000	0,0000	0,0000
78	26	0,0000	0,0000	0,0000
79	27	0,0000	0,0000	0,0000
80	28	0,0000	0,0000	0,0000
81	29	0,0000	0,0000	0,0000
82	30	0,0000	0,0000	0,0000
83	31	0,0000	0,0000	0,0000
84	32	0,0000	0,0000	0,0000
85	33	0,0000	0,0000	0,0000
86	34	0,0000	0,0000	0,0000
87	35	0,0000	0,0000	0,0000
88	36	0,0000	0,0000	0,0000
89	37	0,0000	0,0000	0,0000
90	38	0,0000	0,0000	0,0000
91	39	0,0000	0,0000	0,0000
92	40	0,0000	0,0000	0,0000
93	41	0,0000	0,0000	0,0000
94	42	0,0000	0,0000	0,0000
95	43	0,0000	0,0000	0,0000
96	44	0,0000	0,0000	0,0000
97	45	0,0000	0,0000	0,0000
98	46	0,0000	0,0000	0,0000
99	47	0,0000	0,0000	0,0000
100	48	0,0000	0,0000	0,0000
101	49	0,0000	0,0000	0,0000
102	50	0,0000	0,0000	0,0000
103	51	0,0000	0,0000	0,0000
104	52	0,0000	0,0000	0,0000
105	53	0,0000	0,0000	0,0000
106	54	0,0000	0,0000	0,0000
107	55	0,0000	0,0000	0,0000
108	56	0,0000	0,0000	0,0000
109	57	0,0000	0,0000	0,0000
110	58	0,0000	0,0000	0,0000
111	59	0,0000	0,0000	0,0000
112	60	0,0000	0,0000	0,0000
113	61	0,0000	0,0000	0,0000
114	62	0,0000	0,0000	0,0000
115	63	0,0000	0,0000	0,0000
116	64	0,0000	0,0000	0,0000
117	65	0,0000	0,0000	0,0000
118	66	0,0000	0,0000	0,0000
119	67	0,0000	0,0000	0,0000
120	68	0,0000	0,0000	0,0000
121	69	0,0000	0,0000	0,0000
122	70	0,0000	0,0000	0,0000
123	71	0,0000	0,0000	0,0000
124	72	0,0000	0,0000	0,0000
125	73	0,0000	0,0000	0,0000
126	74	0,0000	0,0000	0,0000
127	75	0,0000	0,0000	0,0000
128	76	0,0000	0,0000	0,0000
129	77	0,0000	0,0000	0,0000
130	78	0,0000	0,0000	0,0000
131	79	0,0000	0,0000	0,0000
132	80	0,0000	0,0000	0,0000
133	81	0,0000	0,0000	0,0000
134	82	0,0000	0,0000	0,0000
135	83	0,0000	0,0000	0,0000
136	84	0,0000	0,0000	0,0000
137	85	0,0000	0,0000	0,0000
138	86	0,0000	0,0000	0,0000
139	87	0,0000	0,0000	0,0000
140	88	0,0000	0,0000	0,0000
141	89	0,0000	0,0000	0,0000
142	90	0,0000	0,0000	0,0000
143	91	0,0000	0,0000	0,0000
144	92	0,0000	0,0000	0,0000
145	93	0,0000	0,0000	0,0000
146	94	0,0000	0,0000	0,0000
147	95	0,0000	0,0000	0,0000
148	96	0,0000	0,0000	0,0000
149	97	0,0000	0,0000	0,0000
150	98	0,0000	0,0000	0,0000
151	99	0,0000	0,0000	0,0000
152	100	0,0000	0,0000	0,0000



- Lösen im Home-Editor (hier „in einem Zug“)

max(seq(binomcdf(100, .35, 0, k) - normcdf(-∞, (k+ .5 - 100 · .35)/√(100 · .35 · .65)), k, 0, 100))

1	2	3	4	5
1	max(seq(binomcdf(100, .35, 0, k) - normcdf(-∞, (k+ .5 - 100 · .35)/√(100 · .35 · .65)), k, 0, 100))			
2	0,00418			



Hartmut Stein

### 5 KONSTRUKTION DER NÄHERUNGSFORMEL VON DE MOIVRE-LAPLACE

Innerhalb der Wahlbereichs Stochastik II im Leistungskurs Klasse 12 (Alternative II) kann bei der Einführung der Näherungsformel von De Moivre-Laplace die Gauß - Funktion genutzt werden.

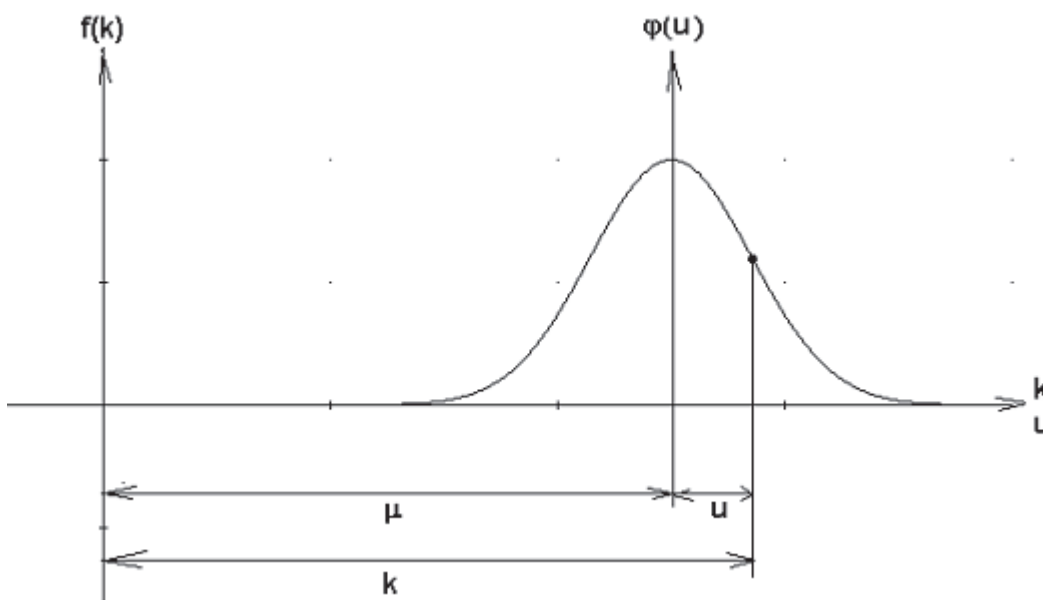
Der Lehrplan fordert die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen diskreter Binomialverteilung und stetiger Normalverteilung.

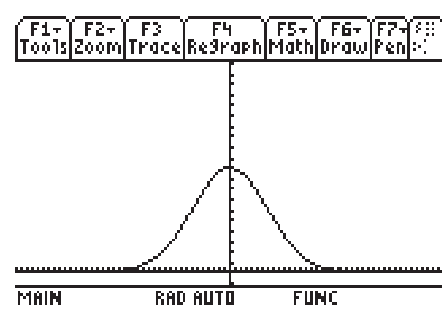
Dabei sollte von den Erkenntnissen von De Moivre und Laplace ausgegangen werden:

Das Histogramm der Binomialverteilung gleicht sich bei wachsendem  $n$  für alle Wahrscheinlichkeiten (WSK)  $p$  mit  $0 \leq p \leq 1$  der verschobenen Gauß-Funktion als Grenzkurve (Laplace 1812)

$$f(k) = a \cdot e^{-b \cdot (k-\mu)^2} \text{ an.}$$

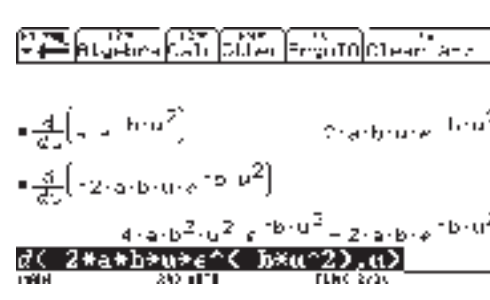
Nach der Transformation vom Koordinatensystem  $k - f(k)$  in das System  $u - \varphi(u)$

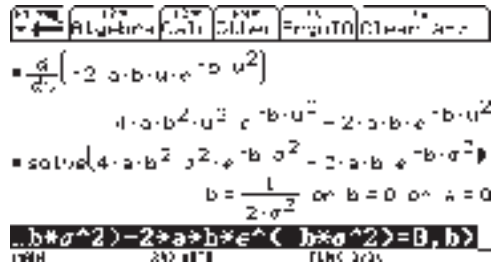
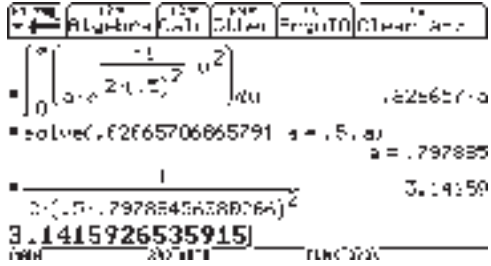


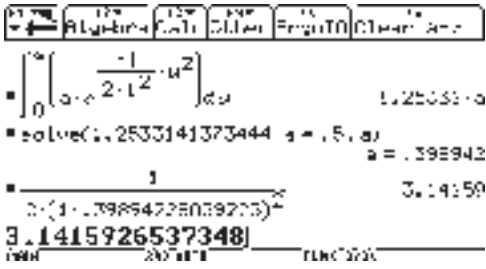
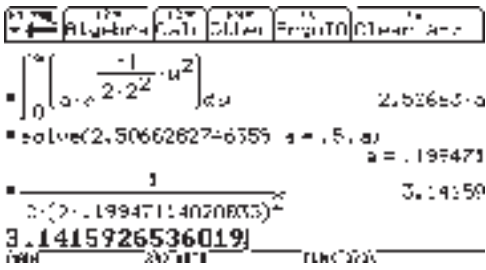
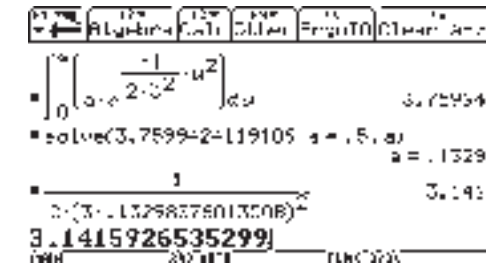
<p>ergibt sich die Gauß-Funktion</p> $\phi(u) := a \cdot e^{-b \cdot u^2}$ <p>mit <math>u = (k - \mu)</math></p>	
--	--

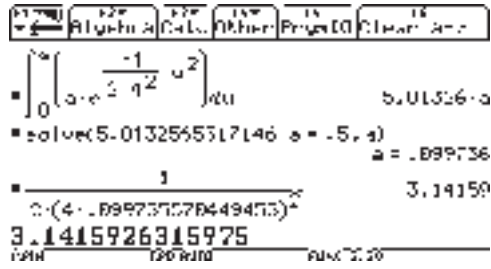
**Empirische Konstruktion der Parameter a und b in der Funktion**

$$\phi := a \cdot e^{-b \cdot u^2}$$

<p>Untersuchung der Funktion</p> $\phi(u) = a \cdot e^{-b \cdot u^2}$ <p>Bestimmung des Parameters b</p> <p>1. und 2. Ableitung</p>	
<p><b>Lösung für b:</b></p> <p><math>u = \pm \sigma</math> Wendestellen</p> <p>2. Ableitung <math>\phi''(u) = 0</math></p>	

<p>Ergebnis:                  Lösungen <math>a=0</math> und <math>b=0</math> scheiden aus</p> <p>Mit</p> $b := \frac{1}{2\sigma^2}$ <p>ergibt sich</p> $\phi(u) := a \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot u^2}$	 <p>TI-84 Plus calculator screen showing the derivation of the normal distribution formula. The screen displays the equation <math>a \cdot b \cdot u \cdot e^{-b \cdot u^2} = 0</math> and the solution <math>b = \frac{1}{2 \cdot \sigma^2}</math> or <math>b = 0</math> or <math>a = 0</math>.</p>
<p>Bestimmung des Parameters a:                  Für die Gesamtfläche unter der Kurve von <math>-\infty &lt; u &lt; +\infty</math> gilt <math>P(S) = 1 = A</math>                  Wir integrieren von 0 bis <math>\infty \Rightarrow A = 0,5</math> für verschiedene <math>\sigma</math>.</p> <p><b>1. Wahl. <math>\sigma = 0,5</math>:</b></p> $3,1415926535915 \approx \pi$ $\pi := \frac{1}{2 \cdot 0,5^2 \cdot a^2}$ <p>Vermutung:</p> $a := \frac{1}{0,5 \cdot \sqrt{2\pi}} \quad a := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ <p><math>a = 0,797885</math></p>	 <p>TI-84 Plus calculator screen showing the integration of the normal distribution curve. The screen displays the integral <math>\int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot u^2}} du</math> and the result <math>a = 0,797885</math>.</p>

<p><b>2. Wahl: <math>\sigma = 1</math>:</b></p> <p><math>3,1415926537348 \approx \pi</math></p> $\pi := \frac{1}{2 \cdot 1^2 \cdot a^2}$ $a := \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \qquad a := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ <p><math>a = 0,398942</math></p>	
<p><b>3. Wahl: <math>\sigma = 2</math>:</b></p> <p><math>\pi = 3,1415926536019</math></p> $\pi := \frac{1}{2 \cdot 2^2 \cdot a^2}$ $a := \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \qquad a := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ <p><math>a = 0,199471</math></p>	
<p><b>4. Wahl: <math>\sigma = 3</math>:</b></p> <p><math>\pi = 3,1415926535299</math></p> $\pi := \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot a^2}$ $a := \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2\pi}} \qquad a := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ <p><math>a = 0,132981</math></p>	

<p><b>5. Wahl <math>\sigma = 4</math>:</b></p> <p><math>\pi = 3,1415926315975</math></p> $\pi := \frac{1}{2 \cdot 4^2 \cdot a^2}$ $a := \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2\pi}} \quad a := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ <p><math>a = 0,099736</math></p>	
<p>Ergebnis: Übereinstimmung in allen 5 Fällen bis in die 6. Kommastelle</p> $a := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$	$\phi(u) := a \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot u^2}$
<p>Mit <math>u := \frac{k - \mu}{\sigma}</math> ergibt sich: <math>P(X=k)=</math></p> $\phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2}$ <p>(Dichtefunktion)</p>	$P(X \leq k) := \int_{-\infty}^k \phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) dk$ <p>bzw.</p> $P(X \leq k) := \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$ <p>(Verteilungsfunktion)</p>
<p>Erwartungswert (binomial):</p> $\mu := n \cdot p$ <p>Standardabweichung (binomial):</p> $\sigma := \sqrt{npq}$	$P(X \leq k) := \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$
<p>Stetige Normalverteilung <math>P(X \leq x) = N(\mu; \sigma)</math> Gaußsche Normalverteilung</p>	$P(X \leq x) := \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$

**Beispielrechnung:**

Angenommen, jeder 10-te Mensch einer Region ist Raucher.

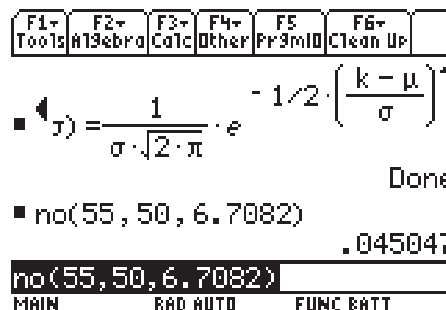
- a) Mit welcher WSK sind unter 500 zufällig ausgewählten Personen genau 55 Raucher?

$$n = 500; k = 55; p = 0,1; q = 0,9$$

$$\mu = 50; \sigma := \sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}$$

$$\sigma = 6,7802$$

$$no(k, \mu, \sigma) = P(X=55) = 0,045047$$



Calculator screen showing the normal distribution probability density function formula and the calculation of  $P(X=55)$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-1/2 \cdot \left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

Done

no(55, 50, 6.7802) = .045047

no(55, 50, 6.7802)

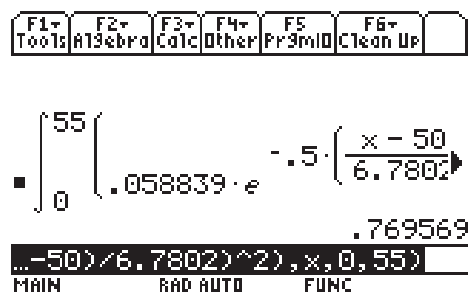
MAIN RAD AUTO FUNC BATT

- b) Mit welcher WSK sind unter 500 zufällig ausgewählten Personen höchstens 55 Raucher?

$$P(X \leq 55) := \Phi\left(\frac{55 - 50}{6,7802}\right)$$

$$= 0,769569$$

(Integration von 0 bis 55 ergibt keine wesentliche Differenz im Ergebnis)



Calculator screen showing the normal distribution cumulative distribution function formula and the calculation of  $P(X \leq 55)$ .

$$\int_0^{55} \left[ .058839 \cdot e^{-.5 \cdot \left(\frac{x - 50}{6.7802}\right)^2} \right]$$

.769569

...-50)/6.7802)^2), x, 0, 55)

MAIN RAD AUTO FUNC

Wilfried Zappe

## 6 NULLSTELLEN GANZRATIONALER FUNKTIONEN

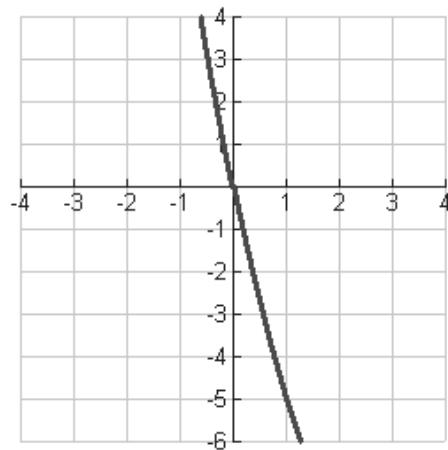
### Einstieg

- „Jens hat 200 Euro auf seinem Sparbuch. Wöchentlich hebt er 10 Euro ab.“  
Geben Sie eine Zuordnungsvorschrift für diesen Sachverhalt an. Welche Bedeutung hat die Nullstelle dieser Funktion in diesem Zusammenhang?

- Schreiben Sie als Term: „Das Produkt aus einer Zahl und der um 2 kleineren Zahl“.  
Für welche Zahlen ist das Produkt null?

Für welche Zahl ist dieses Produkt am kleinsten?

- Im Bild ist ein Stück einer zur Normalparabel kongruenten Parabel zu sehen. Ermitteln Sie alle Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion.



- Begründen Sie: „Funktionen mit der Gleichung  $y = a(x - 2)(x + 3)$  besitzen für jede reellen Zahl  $a$  ( $a \neq 0$ ) genau zwei Nullstellen.“
- Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung einer quadratischen Funktion in der Form  $y = x^2 + px + q$ , die
  - genau zwei Nullstellen,
  - genau eine Nullstelle,
  - keine Nullstellen besitzt.

Lassen Sie Ihren Nachbarn die Nullstellen dieser Funktionen ohne Verwendung von Hilfsmitteln suchen. Ermitteln Sie die Nullstellen der von Ihrem Nachbarn gefundenen Funktionen.

- Warum gibt es keine quadratische Funktion mit drei Nullstellen?

7. Zeichnen Sie mit Ihrem CAS-Rechner die Funktion  $y = (x - 1)(x + b)$  mit  $b = 1$ . Wie verändert sich der Graph der Funktion, wenn  $b$  nacheinander die Werte  $\{0; -0,5; -0,1; -2; -1,5; -1,1; -1,001\}$  annimmt?

Wie sehen Graph und Gleichung für  $b = -1$  aus?

Schreiben Sie einen kleinen mathematischen Text dazu.

8. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob die folgenden Funktionen Nullstellen besitzen.

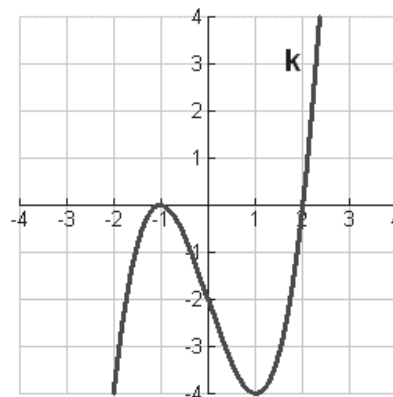
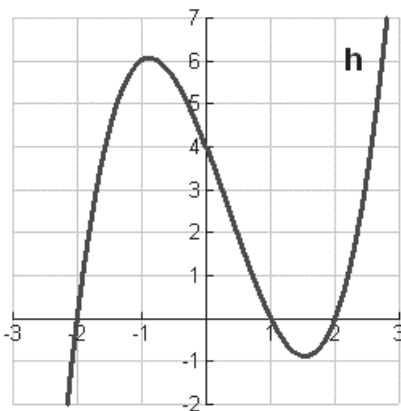
a)  $y = 2x - 3$     b)  $y = x^2 + 4$     c)  $y = x^4 + x^2 + 1$

d)  $y = x^3 + 2x^2$     e)  $y = x^5 + x + 1$     f)  $y = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (2x - \frac{1}{3})$

9. Die Funktionsgleichungen  $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$  und  $y = (x - 1)(x + 2)(x + 1)$  beschreiben die gleiche kubische Funktion<sup>18</sup> f.

Begründen Sie diesen Sachverhalt. Stellen Sie die Funktionen mit Ihrem Rechner graphisch dar und erläutern Sie, welche Eigenschaften des Funktionsgraphen von f sich aus jeder dieser Schreibweisen leicht ablesen lassen.

10. Ermitteln Sie Gleichungen der kubischen Funktionen h und k, deren Graphen hier abgebildet sind. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.



11. Es ist leicht, einen Term, der in faktorisierte Form vorliegt, durch Ausmultiplizieren als Summe zu schreiben, etwa  $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$ .

Wie ist das mit der Umkehrung, also eine Summe wie  $x^2 - 2x - 3$  zu faktorisieren?

Dazu hat Petra folgendes Verfahren vorgeschlagen:

---

<sup>18</sup> Kubische Funktionen sind Funktionen der Form  $y = f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$  mit  $a \neq 0$ .



<p><i>Die Zahl <math>x_1 = -1</math> ist eine Nullstelle der Funktion <math>y = x^2 - 2x - 3</math>, denn <math>(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0</math>.</i></p> <p><i>Um die zweite Nullstelle zu erhalten, dividiere ich den Term <math>(x^2 - 2x - 3)</math> durch den Faktor <math>(x - (-1))</math>, also durch <math>(x + 1)</math>, nach dem bekannten Verfahren der schriftlichen Division von natürlichen Zahlen.</i></p>	
$\begin{array}{r} (x^2 - 2x - 3) : (x + 1) = x - 3 \\ \underline{-(x^2 + x)} \phantom{- 3} \\ -3x - 3 \\ \underline{-(-3x - 3)} \\ 0 \end{array}$	<p><i>Kommentar:</i></p> <p><math>x^2 : x = x</math></p> <p><math>x \cdot (x + 1)</math></p> <p><i>Subtraktion und <math>(-3x) : x = -3</math></i></p> <p><math>(-3) \cdot (x + 1)</math></p> <p><i>Subtraktion mit Rest null</i></p>
<p><i>Demzufolge ist die faktorisierte Form von <math>x^2 - 2x - 3</math> das Produkt</i></p> <p><math>(x + 1)(x - 3)</math></p>	

Erklären Sie dieses Verfahren und faktorisieren Sie auf analogem Wege den Term  $x^3 - 3x^2 - x + 3$ .

12. Auch mit dem CAS-Rechner lassen sich faktorisierbare Terme als Produkt schreiben. Untersuchen Sie in diesem Zusammenhang, welche Anweisungen unter HOME F1 dazu geeignet sind. Ermitteln Sie Beispiele für Terme der Form  $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ , die sich in drei oder zwei Faktoren zerlegen lassen.

### Studententext

Funktionen mit Gleichungen wie  $y = x^3 - 2x + 1$  oder  $y = 2x^5 - 3x^4 + 2,1x^3 - \sqrt{2}x^2 - 5x + \frac{1}{2}$  heißen „ganzrationale Funktionen vom Grade n“. Dabei gibt n die höchste Potenz von x an. Die Koeffizienten von x können beliebige reelle Zahlen (ungleich null) sein.

$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  ist eine allgemeine Darstellung für eine ganzrationale Funktion vom Grade n.

Terme der Form  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  heißen „Polynome n-ten Grades“.

Manche Polynome - aber nicht alle - lassen sich im Bereich der reellen Zahlen als Produkt von Linearfaktoren  $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  schreiben. Dabei können Linearfaktoren auch mehrfach auftreten.

Beispiele:

(1) vollständige Zerlegung in Linearfaktoren

$$2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)(x + 1)$$

(2) vollständige Zerlegung, Linearfaktoren treten mehrfach auf

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)^2$$

(3) keine vollständige Zerlegung in Linearfaktoren

$$2x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + x + 2)$$

Nullstellen einer Funktion  $f$  sind alle die Zahlen  $x$  ihres Definitionsbereiches, für die  $f(x) = 0$  gilt.

Ist eine Zerlegung der Funktionsgleichung in ein Produkt aus Linearfaktoren möglich, so lassen sich Nullstellen leicht erkennen, denn ein Produkt reeller Zahlen ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

Eine ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades besitzt im Bereich der reellen Zahlen höchstens  $n$  Nullstellen.

### Ermittlung von Nullstellen

Manche Nullstellen kann man ohne Rechnerhilfe exakt und rascher als mit dem CAS-Rechner bestimmen, z. B.:

$$2x - 5 = 0 \quad x_0 = 2,5$$

$$2x^2 - 8 = 0 \quad x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -2$$

Wenn eine ganzrationale Funktion in faktorisierte Form gegeben ist, setzt man die einzelnen Faktoren null und berechnet die Nullstellen im Kopf:

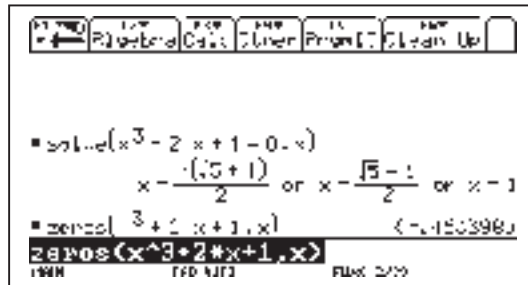
$$x \cdot (x + \sqrt{3}) = 0 \quad x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -\sqrt{3}$$

$$(x - 3)(x + 2)(x - 2,5) = 0 \quad x_1 = 3, x_2 = -2 \text{ und } x_3 = 2,5$$

$$(x^2 - 1)(x + 3) = 0 \quad x_1 = 1, x_2 = -1 \text{ und } x_3 = -3$$

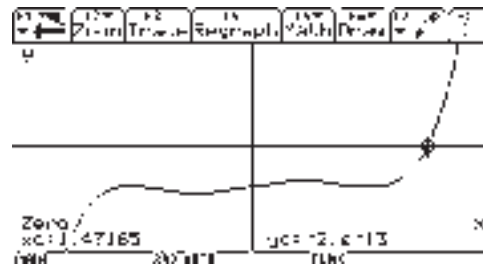
In anderen Fällen lassen sich die Nullstellen ganzrationaler Funktion besser mit den CAS-Rechnern ermitteln (**[F1]1:solve** oder **[F1]4:zeros**).

Manchmal erhält man dabei nur Näherungswerte.



Nullstellen lassen sich auch aus der graphischen Darstellung ermitteln. Nebenstehend ist das am Beispiel von  $y = x^5 - 2x^3 + x - 2$  gezeigt.

**[F4]2:Zero**



**Beispiel für eine schriftliche Polynomdivision:**

Die Gleichung  $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$  ist zu lösen.

Durch sinnvolles Probieren (z. B. Untersuchung der Teiler von 15) findet man:  $x_1 = 1$  ist eine Lösung.

Polynomdivision:  $(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) : (x - 1) = x^2 - 8x + 15$

$$\begin{array}{r}
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -8x^2 + 23x \\
 \underline{-(-8x^2 + 8x)} \\
 15x - 15 \\
 \underline{-(15x - 15)} \\
 0
 \end{array}$$

Faktorzerlegung :  $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x^2 - 8x + 15)(x-1)$

Faktoren null setzen und Lösungsmengen bestimmen:

$$x - 1 = 0 \text{ oder } x^2 - 8x + 15 = 0$$

Die quadratische Gleichung wird mit der „p-q-Formel“ gelöst. Insgesamt ergeben sich so die drei Lösungen  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$  und  $x_3 = 3$ .

Die gegebene Gleichung lässt sich als Produkt folgender Linearfaktoren schreiben:

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1)(x - 5)(x - 3).$$

Das Verfahren der Polynomdivision beruht auf dem schon aus der Grundschule bekanntem Divisionsalgorithmus.

Es macht außerdem deutlich, wie man die Lösung eines neuen Problems (hier: Nullstellenbestimmung einer kubischen Funktion) auf die Lösung bekannter Probleme (Nullstellenbestimmung einer quadratischen Funktion; schriftliche Division) zurückführen kann.

Vor der Einführung von CAS-Rechnern war die Polynomdivision ein wichtiges schriftliches Verfahren. Natürlich hilft uns der CAS-Rechner hier in vielen Fällen, wie weiter oben schon gezeigt wurde und was die folgenden Bildschirmausschnitte ebenfalls belegen:



**Achtung!**

Nicht jedes Polynom lässt sich faktorisieren. Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen gibt es auch bei der Polynomdivision Fälle, in denen ein Rest auftaucht.

Beispiel:  $(x^2 - x + 1) : (x - 1) = x$  Rest 1 =  $x + \frac{1}{x-1}$

$$-(x^2 - x)$$

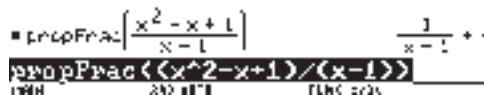
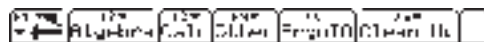
$$0 + 1$$



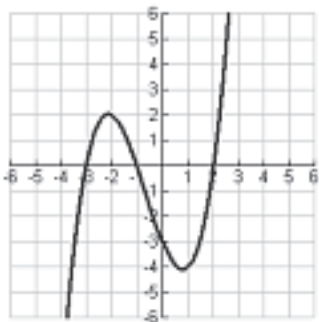
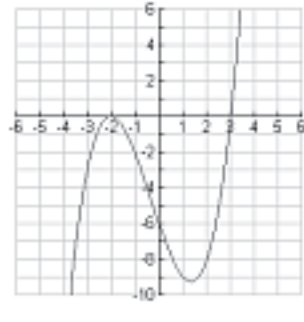
Hier bleibt der Rest 1.

Beim CAS-Rechner liefert der Befehl

**F17:propfrac** eine solche Zerlegung:



**Beispiele für das Bestimmen der Funktionsgleichung aus dem Graphen einer kubischen Funktion**

	
<p>Da die Funktion augenscheinlich die drei Nullstellen <math>x_1 = -3</math>, <math>x_2 = -1</math> und <math>x_3 = 2</math> besitzt, muss sich ihr Funktionsterm als Produkt aus drei Linearfaktoren schreiben lassen, außerdem ist ein Faktor <math>a</math> zu berücksichtigen, der für eine Streckung in <math>y</math>-Richtung verantwortlich ist.</p> <p>(1) <math>y = a(x + 3)(x + 1)(x - 2)</math></p> <p>Für <math>x = 0</math> schneidet der Graph die <math>y</math>-Achse bei <math>y = -3</math>. Diese beiden Zahlen werden in die Gleichung (1) eingesetzt.</p> $-3 = a \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ <p>Die Funktionsgleichung lautet also</p> $y = \frac{1}{2} (x + 3)(x + 1)(x - 2).$	<p>Da eine kubische Funktion vorliegt, deren Graph die <math>x</math>-Achse an der Stelle <math>x_0 = -2</math> berührt und bei <math>x_1 = 3</math> schneidet, ist hier folgender Ansatz hilfreich:</p> $f(x) = a(x + 2)^2(x - 3)$ <p>Die Berührstelle wird als doppelt zählende Nullstelle aufgefasst. Deshalb kommt der zugehörige Linearfaktor quadratisch vor.</p> <p>Den Wert für <math>a</math> erhalten wir durch Einsetzen der Koordinaten eines weiteren Kurvenpunktes, z. B. <math>(0; -6)</math>:</p> $-6 = a \cdot (0 + 2)^2 \cdot (0 - 3) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ <p>Die Funktionsgleichung lautet in diesem Falle</p> $y = \frac{1}{2} (x + 2)^2(x - 3).$
<p>Zur Probe kann man die Funktion mit dem CAS-Rechner graphisch darstellen und mit dem gegebenen Bild vergleichen.</p>	

**Aufgaben**

- Bestimmen Sie ohne Hilfsmittel die Nullstellen der ganzrationalen Funktionen.
  - $y = (x^3 - 8) \cdot (x^2 - 4) \cdot x$
  - $y = -x^4 + 64$
  - $y = x^3 - x^2$
  - $y = 2 \cdot (x - \frac{2}{3})(2x + 4)(x^2 + 1)$
  - $y = x^{100} + x^{50} + 10000$
  - $y = x^2 - 8x + 16$
- Von einer ganzrationalen Funktion sind der Grad  $n$  und die Nullstellen bekannt. Geben Sie eine Gleichung dieser Funktion an.
  - $n = 2$ ;  $x_1 = 5$  und  $x_2 = -1,3$
  - $n = 3$ ; zweifache Nullstelle  $x_1 = -0,5$  und  $x_2 = 0$
  - $n = 5$ ; dreifache Nullstelle  $x_1 = \sqrt{2}$  und zweifache Nullstelle  $x_2 = -\sqrt{2}$

3. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$ . Schreiben Sie  $f(x)$  als Produkt von Linearfaktoren.

a)  $y = x^2 - 6x - 4$       b)  $y = f(x) = 3x^4 - 21x^3 + 39x^2 + 9x - 54$

4. Begründen Sie: Jede Gleichung der Form  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  hat höchstens drei reelle Lösungen. Überlegen Sie, ob eine analoge Aussage auch für Gleichungen höheren Grades gilt.

5. In einer Gleichung der Form  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  seien die Koeffizienten  $a, b, c$  und  $d$  ganze Zahlen.

Begründen Sie: Wenn eine ganze Zahl  $x_1$  Lösung dieser Gleichung ist, dann ist  $x_1$  ein Teiler des Absolutgliedes  $d$ .

6. Lösen Sie die folgenden Aufgaben durch schriftliche Polynomdivision.

a)  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

b)  $2x^3 - 13x^2 + 16x - 5 = 0$

c)  $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$

Überprüfen Sie Ihre Lösungen mit dem Rechner.

7. Geben Sie eine Gleichung 3. Grades an, die

a) drei      b) genau zwei      c) genau eine reelle Lösung besitzt.

8. Warum besitzt jede kubische Funktion mindestens eine Nullstelle?

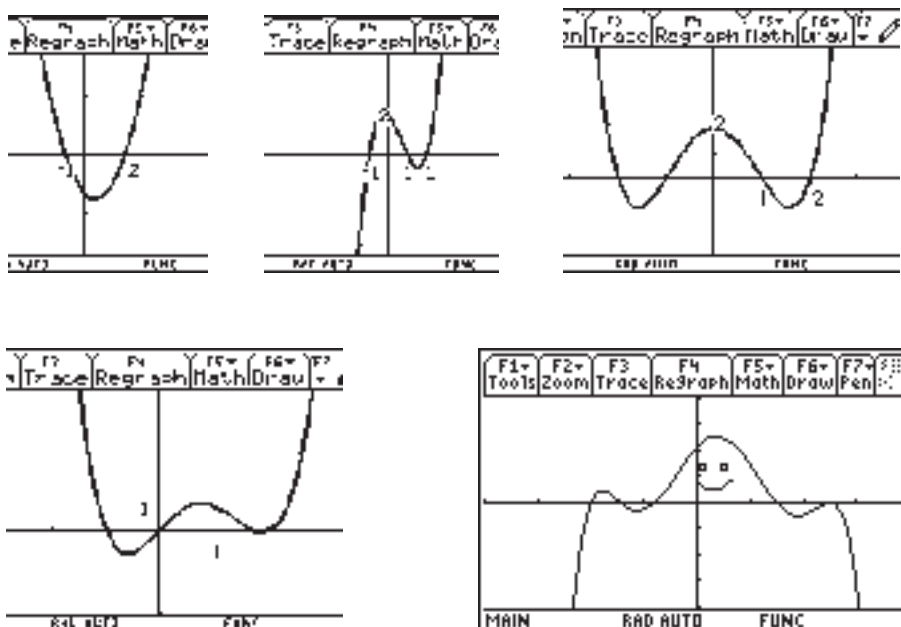
9. Die Funktion  $f$  mit  $y = f(x) = x^3 - 2x + c$  besitzt für  $c = 1$  drei Nullstellen. Für welche Werte von  $c$  hat  $f$  nur noch zwei Nullstellen? Wie lautet dann ihre Schreibweise in faktorisierte Form?

10. Die Abbildungen zeigen Graphen ganzrationaler Funktionen

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ vom Grade } n.$$

Wie groß ist  $n$  jeweils mindestens?

Ermitteln Sie jeweils eine Funktionsgleichung und begründen Sie ihr Vorgehen!



11. Die Firma „Ilmtal“ stellt Toaster her, die zum Stückpreis von 60 Euro an den Großhändler verkauft werden. Die täglichen Kosten für die Herstellung von  $x$  Toastern können ungefähr durch die Kostenfunktion  $K$  beschrieben werden mit  $K(x) = \frac{1}{30}x^3 - 2x^2 + 10x + 1000$ .

- a) Zeichnen Sie den Graphen von  $K$  in einem sinnvollen Intervall und geben Sie den Bereich an, in dem kostengünstig produziert wird. Erläutern Sie Ihre Überlegungen.

Ermitteln Sie, für welche Produktionsmenge die Stückkosten minimal sind.

- b) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der täglich produzierten Stückzahl. In welchem Bereich macht „Ilmtal“ Verlust? Welche Bedeutung haben die Nullstellen in diesem Zusammenhang? Für welche Produktionsmenge erzielt „Ilmtal“ den höchsten Gewinn und wie hoch ist er?

12. Der Zusammenhang zwischen den Gesamtkosten und der Stückzahl  $x$  eines Produkts lässt sich mitunter durch eine kubische Funktion darstellen. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Funktion, wenn man aus der Kostenrechnung folgende Daten kennt:

Stückzahl $x$	0	20	40	60
Gesamtkosten in Euro	500	1480	1740	1760

Führen Sie analoge Untersuchungen wie in Aufgabe 11. durch.

Bernd Geyling

## 7 EINE AUFGABE WIDER DIE ROUTINE

Eine Aufgabe, wie scheinbar viele:

Untersuche die Funktion  $f_k(x) = k \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{k}}$ ;  $k \in \mathbb{R}^+$  auf Extrema, ...!

Für viele Schüler beginnt nun wie gewohnt die Standardlösung: Funktion unter f(x) ablegen, 1. Ableitung unter f1(x), dann 2. Ableitung unter f2(x), erste Ableitung Null setzen...

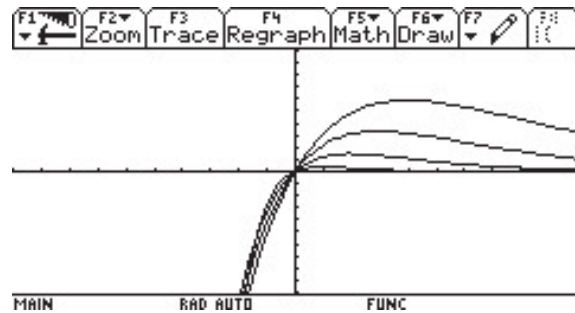
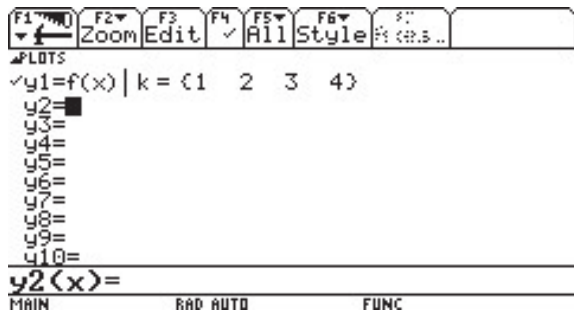
Wirklich Standard? Verwenden Sie doch einmal das nachfolgende Beispiel im Unterricht.

So könnte eine typische Schülerlösung aussehen:

F1	F2	F3	F4	F5	F6		
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		
■ NewProb						Done	
						Vorbereiten des Rechners	
■ $k \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{k}} \rightarrow f(x)$						Done	Funktion definieren
■ $\frac{d^1}{dx^1}(f(x)) \rightarrow f1(x)$						Done	
							Bilden der ersten Ableitung und Kontrolle
■ f1(x)						$(k - x) \cdot e^{-\frac{x}{k}}$	
■ $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \rightarrow f2(x)$						Done	Bereitstellen der zweiten Ableitung und Kontrolle
■ f2(x)						$\frac{(x - 2 \cdot k) \cdot e^{-\frac{x}{k}}}{k}$	
■ f1(xe) = 0						$e^{-\frac{xe}{k}} \cdot (k - xe) = 0$	Notwendige Bedingung liefert eine mögliche Extremstelle für x = k
■ solve( $e^{-\frac{xe}{k}} \cdot (k - xe) = 0, xe$ )						xe = k	
■ f2(k)						$2 \cdot e^{-1}$	Hinreichende Bedingung zeigt ein von k unabhängiges Minimum an.
MAIN	RAD AUTO	FUNC 11/30					



Der Graphikbildschirm gestattet es dem Schüler, seine Ergebnisse schnell zu prüfen.



Die Lösung ist falsch. Nun, im Lösungsweg sind offensichtlich keine Fehler. Ist der Rechner defekt?

Nein.

Unser Rechner hat richtig gearbeitet. Der Fehler lag beim Bediener.

Die 2. Ableitung der Funktion wurde durch den Ausdruck

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \rightarrow f2(x)$$

**dynamisch definiert**, also nicht wie beabsichtigt der Funktionsterm der Ableitung unter f1(x) bzw. f2(x) als Wert abgelegt, sondern die **Methode**, wie die 2. Ableitung zu bestimmen ist. Das CAS ermittelt somit bei jedem Aufruf von  $f2(x)$  die 2. Ableitung neu.

Die nachfolgende Gegenüberstellung macht das Problem deutlich:

Rechnung händisch	Dynamische Definition mit dem CAS
2. Ableitung bestimmen: $f''(x) = \frac{(x-2k)e^{\frac{x}{k}}}{k}$ Bestimmen von $f''(k)$ ; $f''(k) = \frac{(k-2k)e^{\frac{k}{k}}}{k} = -e^{-1}$	2. Ableitung dynamisch definieren: $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \rightarrow f2(x)$ Durch den Aufruf von $f2(k)$ identifiziert das CAS die Variable k mit der Variablen x. Er berechnet also zuerst den Funktionswert $f(k) = k^2 \cdot e^{-1}$ und differenziert anschließend 2 mal nach x, hier in diesem Falle also nach k. $f2(k) = 2 \cdot e^{-1}$

Dieses Problem steht immer, wird die dynamisch definierte 1. oder 2. Ableitung an einer Stelle gebildet, die die Variable k enthält z. B.  $f2(2 \cdot k)$ . Da der Parameter und die Extremstelle die gleiche Bezeichnung haben, wird eine vollständig andere Funktion nach der Variablen k differenziert.

Fazit:

**Keine dynamischen Definitionen!**

Achten Sie bei Ihren Schülern von Anfang an darauf, die Ableitung zu bestimmen und den Term dann erst der Ableitungsfunktion zuzuweisen.

F1  $\frac{d^2}{dx^2}$  F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up  
 ■  $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$   $\frac{(x - 2 \cdot k) \cdot e^{-\frac{x}{k}}}{k}$   
 ■  $\frac{(x - 2 \cdot k) \cdot e^{-\frac{x}{k}}}{k} \rightarrow f2(x)$  Done  
 ■  $f2(k)$   $-e^{-1}$   
 ANALYSIS RAD AUTO FUNC 4/99

Die dynamische Definition ist schnell und bequem, aber äußerst riskant.

Man sollte seinen Schülern bewusst machen: Die Visualisierung, nicht nur althergebracht zur Darstellung der Funktion am Ende der Aufgabe, sondern der jetzt ständig mögliche Wechsel zwischen Home-Bildschirm und Graphikbildschirm, als komplexer Einsatz aller Komponenten des CAS, ist eine völlig neue, wichtige Qualität für den Schüler, seine Ergebnisse zu sichern und zu werten.

Karen Willingshöfer

## 8 WIE VERÄNDERT MAN AUFGABEN, SO DASS SIE „CAS-GERECHT“ WERDEN?

Betrachtungen am Beispiel des Abiturs 2004

Das schriftliche Abitur in Thüringen besteht im Grund- wie auch im Leistungsfach aus drei Aufgabenteilen und drei Stoffgebieten:

Teil A: Analysis (Der Schüler wählt aus den Aufgaben A1 und A2 eine zur Bearbeitung aus.)

Teil B: Der Schüler wählt Aufgabe B1 (Analytische Geometrie) oder Aufgabe B2 (Stochastik)

(Der Schüler löst i.Allg. die Aufgabe aus dem Stoffgebiet, das aus dem Alternativangebot des Lehrplans als Unterrichtsgegenstand in der 12.Klasse tiefgründig behandelt wurde.)

Teil C: Themenübergreifende Aufgabe

(Die Aufgabenteile sind eine Zusammenstellung aus Fragen zum Grundwissen der drei Stoffgebiete und von allen Schülern zu bearbeiten.)

Zurzeit haben wir in Thüringen zwei Fallgruppen hinsichtlich zugelassener Hilfsmittel im Mathematikabitur. Ein Teil der Gymnasien verwendet (noch) nichtprogrammierbare und nichtgrafikfähige Taschenrechner, die anderen Gymnasien setzen einen CAS-Taschencomputer ein. In Übereinstimmung mit dem Thüringer Kultusministerium hat sich die Aufgabenkommission das Ziel gesetzt, für beide Fallgruppen gleichwertige Anforderungen im schriftlichen Mathematikabitur zu realisieren.

Für die Übergangszeit des Nebeneinanderbestehens der beiden Fallgruppen wurde entschieden, die Aufgaben im Kern gleichartig zu gestalten.

Dazu werden Aufgabenteile aus den Abituraufgaben ohne CAS im Wesentlichen durch zwei Verfahren modifiziert:

1. Wird durch den CAS-Einsatz Rechenaufwand deutlich reduziert, so werden inhaltlich passende Aufgabenteile hinzugefügt. Häufig werden hierbei Aufgaben gewählt, die zum Beschreiben oder Begründen auffordern.
2. Es können Aufgabenteile neu aufgenommen werden, die bislang in Abiturprüfungen nicht realisierbar waren (z. B. transzendente Gleichungen oder Gleichungen höheren Grades, die beim Lösen eines Problems auftreten).

Welche Überlegungen u.a. dabei einfließen, möchte ich an je einer Aufgabe aus dem Teil A des Abiturs 2004 für das Grund- und Leistungsfach darstellen:

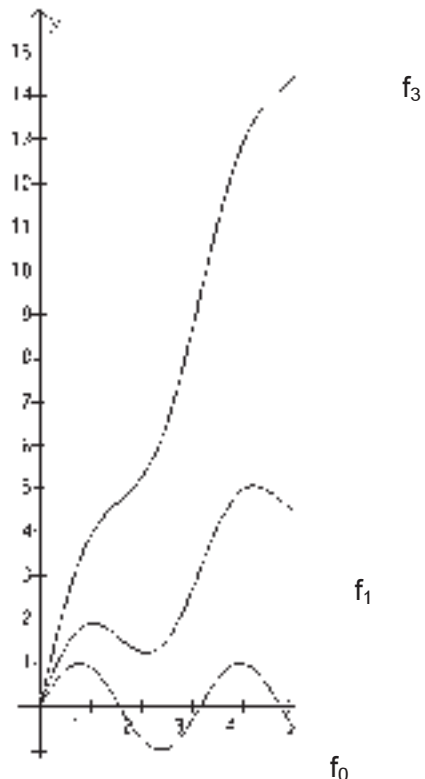
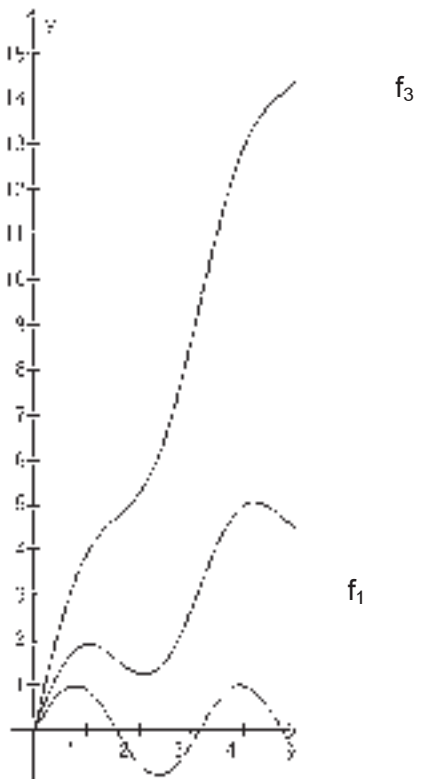
**Grundfach**

<b>ohne CAS</b>	<b>mit CAS</b>
Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3x + 5)(3 - x),$ $x \in \mathbb{R}.$	Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3x + 5)(3 - x),$ $x \in \mathbb{R}.$
<p>a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrem- und Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an! Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall <math>-3 \leq x \leq 4</math>!</p> <p>Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche vom Graphen der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!</p>	<p>a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrem- und Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an!</p> <p><i>Zeichnen Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall! Schlussfolgern Sie aus Ihren bisherigen Ergebnissen auf zwei Eigenschaften, die jede Stammfunktion von f besitzt! Die Funktion g ist gegeben durch die Gleichung <math>y = g(x) = e^x</math>. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den Graphen der Funktionen f und g sowie den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!</i></p>
<b>14BE</b>	<b>14BE</b>
<p>Kommentar:  Der Operator „Skizzieren“ wurde durch „Zeichnen“ ersetzt, da vorher berechnete Punkte für den Verlauf des Graphen prägnant sind im Unterschied zu einer Freihandskizze des prinzipiellen Verlaufes mit Hilfe des Graphik-Modus.  Die Darstellung des Graphen in einem „geeigneten Intervall“ stellt eine <u>höhere Anforderung</u> dar. Sie muss alle seine prägnanten Eigenschaften enthalten und kann z. B. im Graphik-Modus <u>überprüft</u> werden.  Den Rechenaufwand für die Ableitungsfunktionen, das Lösen von Gleichungen und das Berechnen des Flächeninhaltes <u>nimmt das CAS dem Schüler ab</u>, so dass die dafür bisher vorgesehenen Bewertungseinheiten hier auf <u>zusätzliche mathematische Inhalte</u> verteilt werden können.  Für die Fläche wurde die Aufgabe so verändert, dass die Berechnung ohne CAS für den Schüler nicht möglich wäre.</p>	
b) Im Punkt $W(0; f(0))$ wird an den Graphen von f die Tangente gelegt. Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.	b) Im Punkt $W(0; f(0))$ wird an den Graphen von f die Tangente gelegt. Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.

<p>Bei der Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Kegel. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels! Eine Ebene <math>\varepsilon</math> verläuft orthogonal zur x-Achse und schneidet diese bei <math>x = -2,5</math>. Diese Ebene <math>\varepsilon</math> teilt den Kegel in zwei Teilkörper. In welchem Verhältnis stehen deren Volumina?</p>	<p>Bei der Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Kegel. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels! Eine Ebene <math>\varepsilon</math> verläuft orthogonal zur x-Achse und schneidet diese bei <math>x = -2,5</math>. Diese Ebene <math>\varepsilon</math> teilt den Kegel in zwei Teilkörper. In welchem Verhältnis stehen deren Volumina?</p>
8 BE	6 BE
<p>Kommentar: Die zur Berechnung des Volumens notwendige Tangentengleichung kann im Graphik-Modus ausgegeben werden. Berechnungen u. a. des Schnittpunktes werden vom CAS übernommen. Somit ist bei gleichen innermathematischen Problemen eine Reduzierung der Bewertungseinheiten notwendig. Einen sinnvollen Ausgleich dafür kann man natürlich auch in einem der folgenden Aufgabenteile erreichen.</p>	
<p>c) Der Graph einer quadratischen Funktion <math>q(x) = ax^2 + bx + c</math> schneidet den Graphen von <math>f</math> im Punkt <math>N(3; f(3))</math> und berührt ihn im Punkt <math>W(0; f(0))</math>. Geben Sie für <math>q</math> eine Gleichung an!</p>	<p>c) Der Graph einer quadratischen Funktion <math>q(x) = ax^2 + bx + c</math> schneidet den Graphen von <math>f</math> im Punkt <math>N(3; f(3))</math> und berührt ihn im Punkt <math>W(0; f(0))</math>. Geben Sie für <math>q</math> eine Gleichung an! <i>Der Graph der Funktion <math>q</math> ist im Intervall <math>0 \leq x \leq 3</math> eine gute Näherung an den Graphen von <math>f</math>. Für die Abweichung <math>d</math> der Funktionswerte beider Funktionen an der Stelle <math>x</math> gilt <math>d(x) = f(x) - q(x)</math>. Um welchen Wert unterscheiden sich die Funktionswerte höchstens?</i></p>
4 BE	6 BE
<p>Kommentar: Der Schüler löst das Gleichungssystem mit Hilfe des CAS, was wiederum zu einer Reduzierung um eine Bewertungseinheit führt. Diese und auch die in Aufgabenteil b) vorgenommene Verminderung der Bewertungseinheiten wird durch einen zusätzlichen mathematischen Inhalt ausgeglichen.</p>	
<p>d) Für jede reelle Zahl <math>a</math> ist eine Funktion <math>h_a</math> durch <math display="block">h_a(x) = \frac{3}{5}(x + a + \frac{1}{3}x^2)(3 - x),</math><math>x \in \mathbb{R}</math>, gegeben. Untersuchen Sie für jeden der drei folgenden Fälle, ob reelle Zahlen <math>a</math> so existieren, dass die Funktion <math>h_a</math></p> <p>(1) mit der Funktion <math>f</math> identisch ist,</p>	<p>d) Für jede reelle Zahl <math>a</math> ist eine Funktion <math>h_a</math> durch <math display="block">h_a(x) = \frac{3}{5}(x + a + \frac{1}{3}x^2)(3 - x),</math><math>x \in \mathbb{R}</math>, gegeben. Untersuchen Sie für jeden der drei folgenden Fälle, ob reelle Zahlen <math>a</math> so existieren, dass die Funktion <math>h_a</math></p> <p>(1) mit der Funktion <math>f</math> identisch ist,</p>

(2) genau zwei Nullstellen besitzt, (3) genau drei Nullstellen besitzt! <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;">4 BE</div>	(2) genau zwei Nullstellen besitzt, (3) genau drei Nullstellen besitzt! <div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;">4 BE</div>
Kommentar: Beim Finden der Lösungen dieser Aufgabe bringt der CAS-Rechner keinen entscheidenden Vorteil im Sinne der Verminderung von Rechenaufwand. Dieser Aufgabenteil bedarf daher keiner Veränderung.	

**Leistungsfach**

<b>ohne CAS</b>	<b>mit CAS</b>
<p>Für jede reelle Zahl <math>t \geq 0</math> ist eine Funktion <math>f_t</math> durch die Gleichung <math>y = f_t(x) = t \cdot x + \sin(2x)</math> mit <math>x \in \mathbb{R}</math> gegeben.</p> <p>Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen <math>f_0, f_1</math> und <math>f_3</math> im Intervall <math>0 \leq x \leq 5</math>.</p>	<p>Für jede reelle Zahl <math>t \geq 0</math> ist eine Funktion <math>f_t</math> durch die Gleichung <math>y = f_t(x) = t \cdot x + \sin(2x)</math> mit <math>x \in \mathbb{R}</math> gegeben.</p> <p>Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen <math>f_0, f_1</math> und <math>f_3</math> im Intervall <math>0 \leq x \leq 5</math>.</p>
 <p>(Skizze nicht maßstäblich)</p>	 <p>(Skizze nicht maßstäblich)</p>

a) Berechnen Sie - falls sie existieren - die Koordinaten des jeweils ersten lokalen Maximumpunktes im I. Quadranten für die Graphen  $f_0$ ,  $f_1$  und  $f_3$  !

Diskutieren Sie anhand der drei Graphen der Funktionen  $f_0$ ,  $f_1$  und  $f_3$  im vorgegebenen Intervall  $0 \leq x \leq 5$ , wie sich die Anzahl der Nullstellen, lokalen Extrempunkte bzw. der Wendepunkte ändert!

10 BE

a) Berechnen Sie - falls sie existieren - die Koordinaten des jeweils ersten lokalen Maximumpunktes im I. Quadranten für die Graphen  $f_0$ ,  $f_1$  und  $f_3$  !

Diskutieren Sie anhand der drei Graphen der Funktionen  $f_0$ ,  $f_1$  und  $f_3$  im vorgegebenen Intervall  $0 \leq x \leq 5$ , wie sich die Anzahl der Nullstellen, lokalen Extrempunkte bzw. der Wendepunkte ändert!

*Das Flächenstück, das von den Graphen der Funktionen  $f_1$  und  $f_3$  sowie den Geraden  $x = 0$  und  $x = \frac{\pi}{4}$  vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die  $x$ -Achse.*

*Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers!*

10 BE

Kommentar:

Der Rechenaufwand wird durch das CAS deutlich reduziert, so dass die dafür bisher vorgesehenen Bewertungseinheiten hier auf zusätzliche mathematische Inhalte verteilt werden können.

<p>b) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt <math>P(\pi; f_t(\pi))</math> des Graphen von <math>f_t</math> mit</p> <p><math>t &gt; 1</math> schneiden diese in den Punkten Q und S.</p> <p>Für welche Parameterwerte <math>t</math> teilt der Graph von <math>f_t</math> die Fläche des Rechtecks OSPQ im Verhältnis 1:1 ?</p> <p>Hinweise: O bezeichnet den Koordinatenursprung und alle Funktionswerte von <math>f_t</math> im Intervall <math>0 \leq x &lt; \pi</math> sind kleiner als <math>f_t(\pi)</math>.</p> <p style="text-align: right;">6 BE</p>	<p>b) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt <math>P(\pi; f_t(\pi))</math> des Graphen von <math>f_t</math> mit</p> <p><math>t &gt; 1</math> schneiden diese in den Punkten Q und S.</p> <p>Für welche Parameterwerte <math>t</math> teilt der Graph von <math>f_t</math> die Fläche des Rechtecks OSPQ im Verhältnis 1:1 ?</p> <p>Hinweise: O bezeichnet den Koordinatenursprung und alle Funktionswerte von <math>f_t</math> im Intervall <math>0 \leq x &lt; \pi</math> sind kleiner als <math>f_t(\pi)</math>.</p> <p style="text-align: right;">4 BE</p>
<p>Kommentar: Der Rechenaufwand bei der Bestimmung des Flächeninhaltes wird durch das CAS vermindert, was zu einer Reduzierung um zwei Bewertungseinheiten führt. Ein sinnvoller Ausgleich wird dafür in einem der folgenden Aufgabenteile erreicht.</p>	
<p>Gegeben ist jetzt die Funktion <math>f_1</math> mit</p> $f_1(x) = x + \sin(2x)$ <p>mit <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>	<p>Gegeben ist jetzt die Funktion <math>f_1</math> mit</p> $f_1(x) = x + \sin(2x)$ <p>mit <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>
<p>c) Ermitteln Sie alle Punkte V des Graphen der Funktion <math>f_1</math>, die von den beiden Koordinatenachsen gleich weit entfernt sind! Zeigen Sie, dass diese Punkte V Wendepunkte des Graphen von <math>f_1</math> sind!</p> <p style="text-align: right;">5 BE</p>	<p>c) Ermitteln Sie alle Punkte V des Graphen der Funktion <math>f_1</math>, die von den beiden Koordinatenachsen gleich weit entfernt sind! Zeigen Sie, dass diese Punkte V Wendepunkte des Graphen von <math>f_1</math> sind!</p> <p style="text-align: right;">3 BE</p>



<p>d) Die lokalen Maximumpunkte</p> $H_k\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi; \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\right)$ <p>und die lokalen Minimumpunkte</p> $T_k\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi; -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi\right)$ <p>des Graphen der Funktion <math>f_1</math> mit <math>k \in \mathbb{Z}</math> liegen jeweils auf einer Geraden.</p> <p>Bestimmen Sie die Gleichungen dieser beiden Ortskurven sowie deren Abstand <math>d</math>!</p> <p style="text-align: right;">6 BE</p>	<p>d) Die lokalen Maximumpunkte</p> $H_k\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi; \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\right)$ <p>und die lokalen Minimumpunkte</p> $T_k\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi; -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi\right)$ <p>des Graphen der Funktion <math>f_1</math> mit <math>k \in \mathbb{Z}</math> liegen jeweils auf einer Geraden.</p> <p>Bestimmen Sie die Gleichungen dieser beiden Ortskurven sowie deren Abstand <math>d</math>!</p> <p style="text-align: right;">5 BE</p>
<p>Kommentar zu c) und d):</p> <p>Der Rechenaufwand wird durch das CAS vermindert, was zu einer Reduzierung der Bewertungseinheiten führt.</p>	
<p>e) Begründen Sie, dass für die Anstiege <math>m</math> (<math>m \in \mathbb{R}</math>) mit <math>m \geq 3</math> die Gerade <math>y = mx</math> genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen der Funktion <math>f_1</math> hat!</p> <p style="text-align: right;">3 BE</p>	<p>e) <i>Untersuchen Sie, für welche Anstiege <math>m</math> (<math>m \in \mathbb{R}</math>) mit <math>m \geq 1</math> die Gerade <math>y = mx</math> genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen der Funktion <math>f_1</math> hat! Begründen Sie Ihre Antwort!</i></p> <p style="text-align: right;">4 BE</p>

Kommentar:

Durch den Operator „Untersuchen“ wird die Aufgabe geöffnet. Die Begründung des durch Untersuchung erreichten eigenen Ergebnisses stellt an den Schüler höhere Anforderungen als ein vorgegebenes Ergebnis zu begründen. Daher wurde die Anzahl der Bewertungseinheiten um eine erhöht.

*f) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion  $f_t$  mit  $y = f_t(x) = t \cdot x + \sin(2x)$  für  $t \geq 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  auf Symmetrie sowie auf lokale Extrempunkte in Abhängigkeit vom Parameter  $t$ !*

*Auf den Nachweis der lokalen Extrempunkte wird verzichtet.*

*Zeigen Sie, dass der Graph von  $f_2$  keine lokalen Extrempunkte besitzt!*

4 BE

Kommentar:

Insgesamt sind an dieser Stelle noch vier Bewertungseinheiten auszugleichen. Dies geschieht in diesem Fall durch einen zusätzlichen mathematischen Inhalt.

Ergebnis:

Die CAS-Abitur-Aufgabe unterscheidet sich in wesentlichen Anforderungen nicht von der Abitur-Aufgabe ohne CAS.

Es ist möglich, mit CAS die mathematischen Forderungen im Rahmen der Lehrplaninhalte der gymnasialen Oberstufe zu erhöhen sowie Rechenaufwand und damit verbundene Rechenfehler zu reduzieren, d. h. Wissens- und Könnenslücken auch aus früheren Schuljahren zu kompensieren. Der Schüler kann durch den Einsatz eines CAS die Lösung einer Aufgabe oft auf verschiedenen Wegen kontrollieren. Durch diese Methodenvielfalt wird ein Beitrag zur Entwicklung der Sach- und Selbstkompetenz geleistet.

↓

**CAS – Chance zum Fördern und Fordern – und das nicht erst im Abitur!**

## 9 AUFGABEN LÖSEN OHNE JEDLICHE HILFSMITTEL

Seit Beginn der Arbeit mit einem CAS an den Thüringer Gymnasien wird insbesondere auch Wert darauf gelegt, dass die Schüler grundlegende Sachverhalte ohne jegliche Hilfsmittel lösen können. Eine Überprüfung dieser „händischen“ Kompetenzen erfolgt jährlich im sogenannten Test Klasse 11.

In einem Arbeitskreis sind dazu die folgenden Aussagen zusammengefasst worden, die auch berücksichtigen, dass eventuell in den kommenden Jahren ein rechnerloser Teil – ähnlich wie in Baden Württemberg – Bestandteil des schriftlichen Abiturs werden könnte.

### Vorbemerkungen

*Vom Prüfungsteilnehmer wird eine nachvollziehbare Lösung erwartet, die sich durch geeignete graphische Darstellungen, korrekte logische Schlüsse, eine Lösungsstrategie und sicheres Behandeln von Fallunterscheidungen auszeichnet. Es sind einfache Sachverhalte mathematisch zu modellieren. Ein Tafelwerk ist als Hilfsmittel nicht zugelassen.*

*(Mit \* sind Teile gekennzeichnet, die nur das **Leistungsfach** betreffen)*

### Inhalte

#### 1. ANALYSIS

- Prototypen folgender Funktionen und deren Translationen parallel zu den Koordinatenachsen kennen und skizzieren können :  $f(x) = x^2$ ,  $x^3$ ,  $^* \sqrt{x}$ ,  $\sin(x)$ ,  $^* \cos(x)$ ,  $1/x$ ,  $^* e^x$  und  $^* \ln(x)$
- Geraden parallel / nicht parallel zu den Koordinatenachsen
- Symmetrien zur y-Achse und zum Koordinatenursprung
- Nullstellen von Funktionen (lineare, quadratische, höhere Grade nur in Sonderfällen)
- Umgang mit / Verständnis für Differenzen - und Differenzialquotienten, Anstieg,  $^* \text{Differenzierbarkeit}$
- Zusammenhang zwischen Monotonie, Extrempunkten und der 1. Ableitung einer Funktion
- Integral (Flächeninhaltsinterpretation)

#### 2. ANALYTISCHE GEOMETRIE / LINEARE ALGEBRA

- Beschreibung von geometrischen Objekten (Punkt, Gerade, Ebene)
- Beschreibung geometrischer Eigenschaften und Beziehungen (Parallelität, Orthogonalität, Schnitt)

- Elementargeometrie (Satz des Pythagoras, Eigenschaften von und Berechnungen an ebenen Figuren und einfachen Körpern)

### 3. STOCHASTIK

- Abzählen, Baumdiagramme für mehrstufige abhängige und unabhängige Zufallsexperimente
- Laplace-Wahrscheinlichkeit
- Erwartungswert
- Einfache Mengenverknüpfungen mit  $\cup$ ,  $\cap$  und  $\bar{A}$
- \*Logische Operatoren „und“, „oder“ und „nicht“

### B) Kompetenzen („Handwerk“)

- Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen, Umgang mit Beträgen
- rationelles Lösen quadratischer Gleichungen
- Rechengesetze (Potenzen, Logarithmen, Wurzeln)
- Umgang mit expliziten und rekursiven Bildungsvorschriften bei Zahlenfolgen auf Grundlagen beschränken
- Berechnen von Ableitungen ( $a = \text{const}$ ,  $x^n$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\ln(x)$ , Faktor-, Summen-, \*Produktregel, Kettenregel nur für einfach verschachtelte Funktionen)
- Rechnen mit bestimmten und unbestimmten Integralen für die eben beschriebenen Funktionen (außer  $\ln(x)$ )
  
- Rechnen mit Vektoren (Addition, Betrag, Vervielfachung, Skalarprodukt, Orthogonalität, Parallelität)
- lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten (unterschiedliche Mächtigkeit der Lösungsmenge erkennen und graphische Interpretation)
- Geradengleichungen, Ebenengleichungen (\*unterschiedliche Darstellungen, einfache Koeffizienten, auch: Sonderfälle)
  
- Baumdiagramme und Pfadregeln
- einfache Fakultäten berechnen

Im Folgenden sind einige Beispiele und Überlegungen zum Üben solcher Sachverhalte und der Test Klasse 11 aus dem Jahr 2004 angegeben.

Eva-Maria Volknant

**Multiple-Choice-Test, ohne CAS, ohne Hilfsmittel.**

Bei den folgenden Aufgaben ist die richtige Lösung (sind die richtigen Lösungen) anzukreuzen. Die Wahl muss begründet sein.

1. Welche Funktionen sind Exponentialfunktionen ?

- a)  $f(x) = 3x^5$       b)  $f(x) = (-2) \cdot 1,4^x$       c)  $N(t) = 0,5^t$       d)  $g(t) = 0,1 \cdot (-2)^t$

e)

Zeit t	1	2	3	4	5
Anzahl N	4	6	9	12	15

2. Ermitteln Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der Geraden mit der Gleichung  $f(x) = 0,5x + 1$  mit  $0 \leq x \leq 4$  um die x-Achse entsteht.

- a)  $V = 17 \pi$       b)  $V = \frac{54}{3} \pi$       c)  $V = \frac{52}{3} \pi$       d)  $V = 17 \frac{1}{3} \pi$

3. Geben Sie die Funktionsgleichungen an, die die Nullstellen  $x_1 = 2$  als Berührungsstelle und  $x_2 = 4$  als Schnittstelle besitzen.

- a)  $f(x) = (x-2)(x-4)$       b)  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$       c)  $f(x) = (x-4)(x-2)^2$   
 d)  $f(x) = (x-2)(x-4)^2$

4. An einer im Koordinatenursprung liegenden Normalparabel liegt eine Tangente mit der Gleichung  $y_t = 3x + n$  an. Welche Koordinaten hat der Berührungspunkt?

- a)  $B(0; -\frac{9}{4})$       b)  $B(1,5; 2,25)$       c)  $B(2; 4)$       d)  $D(n; 4n)$

5. Welche Monotonie weisen Potenzfunktionen der Art  $f(x) = x^{2n+1}$ ,  $n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  für  $x < 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  auf?

- a) streng monoton fallend      b) monoton steigend      c) streng monoton steigend

6. Ein kleiner Junge springt fröhlich, relativ gleichmäßig auf einem Trampolin. Der Vater beobachtet ihn, misst und sagt zur Mutter. „Er springt in 60s etwa 30-mal ungefähr 40 cm hoch.“ Welche Gleichungen geben diesen Vorgang näherungsweise wieder?

(y sei die momentane Sprunghöhe in cm und t die vergangene Zeit in s)

a)  $y = 40\cos(\pi t)$     b)  $y = 40\sin(\pi t)$     c)  $y = 0,4\sin(\pi t)$     d)  $y = -40\sin(\pi t)$

7. Gegeben ist die Zahlenfolge  $(a_n)$  durch ihre Bildungsvorschrift

$$a_n = \frac{6n+4}{8n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Welche Eigenschaften treffen auf diese Folge zu?

a) ihr Grenzwert beträgt  $\frac{3}{4}$                       b) sie ist streng monoton steigend

c) 2 ist eine obere Schranke

d) alle Glieder der Folge befinden sich innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Lösung: 1b,c    2c,d    3b,c    4b    5b, c    6b,d    7a,c

Wilfried Zappe

### **Grundwissen sichern!**

Unabhängig von dem im Mathematikunterricht hauptsächlich verwendeten Rechenhilfsmittel kommt der Sicherung von grundlegendem Wissen und Können von jeher besondere Bedeutung zu, denn zum Beispiel ist jegliches Problemlösen nur möglich, wenn der Problemlöser auf einen sofort verfügbaren Vorrat an inhaltlichen Vorstellungen und Kenntnissen sowie auf gewisse Verfahrenstechniken zurückgreifen kann.

Stehen den Schülern im Mathematikunterricht CAS-Rechner zur Verfügung, können sie über sehr effiziente und vielfältige Verfahrenstechniken relativ rasch verfügen. Experimentelles Arbeiten, schnelles und systematisches Probieren, rasches Visualisieren mit dem CAS – Rechner bieten einerseits gute Möglichkeiten für die Sicherung fester inhaltlicher Kenntnisse, andererseits kann durch die schnelle Verfügbarkeit dieser Verfahrenstechniken mehr Unterrichtszeit auf die Sicherung von inhaltlichen Grundvorstellungen mathematischer Begriffe, Sätze und Verfahren verwendet werden.

Vermutlich ist das bessere Abschneiden der „CAS - Kurse“ bei unserem „11-er Test“, der ja bekanntlich ohne jedes Hilfsmittel zu bewältigen war, unter anderem auf diesen Umstand zurück zu führen.



Hier werden Beispiele für „Tägliche Übungen“ vorgestellt.

### **Anregungen für „Tägliche Übungen“**

Zwei bis drei Aufgaben zum Stundenbeginn (ca. 7 Minuten) gewährleisten in der Regel einen guten „Aufwärm- und Einstimmungseffekt“. Grundlegendes wird wachgehalten. Die Aufgaben sollen ohne Hilfsmittel gelöst werden und nicht zu rechenintensiv sein.

Aufgaben	Lösungshinweise
<b>Ableitungen</b>	
2. Ableitung von $y = \frac{x-1}{x+1}$	$y'' = \frac{-4}{(x+1)^3}$
1. Ableitung von $y = \frac{x^2-1}{x+1}$	$y' = 1$
<b>Analytische Geometrie/ Vektorrechnung</b>	
Sind die Geraden g und h windschief zueinander? ( $s, t \in \mathbb{R}$ )  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Nein, sie schneiden einander im Punkt P(1; 1; 0)
<b>Fakultäten, Binomialkoeffizienten</b>	
$\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3}$	16
$\binom{n}{1} : \binom{n}{n-1}$	1
$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)!}$	2n
$\frac{n! + (n+1)!}{n+2}$	n!
<b>Funktionen</b>	
Liegt der Punkt P(3   1) auf, über oder unter der Geraden g mit $y = \frac{3}{2}x - 1$ ?	P unterhalb von g
<b>Elementare Geometrie</b>	
Ordne die Flächeninhaltsformeln bzw. Volumenformeln „passenden“ Flächen bzw. Körpern zu. Skizziere eine solche Fläche bzw. einen solchen Körper und benenne die für die Berechnung notwendigen Stücke:  (1) $V = a \cdot b \cdot c$ (2) $A = \pi \cdot r^2$ (3) $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$	Vorschlag: Wörter umstellen!  (1) Volumen eines Quaders (2) Fläche eines Kreises



<p>(4) <math>V = \frac{2}{3} \cdot A_G \cdot h</math></p> <p>(5) <math>V = A_G \cdot h</math></p> <p>(6) <math>A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h</math></p> <p>(7) <math>A = g \cdot h</math></p>	<p>(3) Pyramiden- oder Kegelvolumen</p> <p>(4) Halbkugelvolumen</p> <p>(5) Prismenvolumen</p> <p>(6) Dreiecksfläche</p> <p>(7) Rechtecksfläche/ Parallelogrammfläche</p>
<p>Gegeben ist ein Kegel, dessen Volumen <math>100 \text{ cm}^3</math> und dessen Grundfläche <math>100 \text{ cm}^2</math> betragen.</p> <p>Wie hoch ist der Kegel?</p>	<p><math>h = 3 \text{ cm}</math></p>
<p><b>Integrale</b></p>	
$\int_{-1}^1 e^{2x} dx$	$\frac{e^2 - e^{-2}}{2} \quad (= \sinh(2))$
$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2x) dx$	<p>- 1</p>
$\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$	<p>4</p>
<p>Die Werte der folgenden Integrale sollen über eine geometrische Deutung gefunden werden (nicht durch Rechnung!):</p> <p><math display="block">\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx</math></p> <p><math display="block">\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx</math></p> <p><math display="block">\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx</math></p>	<div style="text-align: center;">  <p>0</p> <p>existiert nicht</p> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  <p>-2</p> </div>

<b>Logarithmen</b>	
$\log_3 9$	2
$\log_2(x^2) - \log_2(x-1) = 2$	$x = 2$
$\log_4 \sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$
<b>Potenzen/ Potenzfunktionen</b>	
Beschreibe den Graphen von $y = f(x) = -(x - 2000)^{2000} + 2000$	Parabel 2000. Ordnung, nach unten geöffnet, Scheitel bei S(2000; 2000)
<b>Prozentrechnung</b>	
80% von 30	24
110% von 200	220
<b>Stochastik</b>	
Ein Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei ungerade Augenzahlen geworfen werden?	0,25
Aus einer Schachtel mit 15 verschiedenen CD's werden mit einem Griff zwei CD's entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein bestimmtes Paar CD's zu erhalten?	$\frac{1}{\binom{15}{2}} = \frac{1}{105}$
<b>Termumformungen</b>	
Stimmt das? $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a}$ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b+a}$ $\sin(225^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	Ja, aber nur für $a \neq 0, b \neq 0$  Nein, falls $a \neq 0, b \neq 0$ und $a+b \neq 0$ , wäre $\frac{a^2 + b^2}{a \cdot b}$ richtig  Nein, falsches Vorzeichen

Vereinfache!	
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$	$\sqrt{a}$
$y^{\frac{2}{3}} : y^{-\frac{1}{3}}$	y
$7 \cdot 0,654 - 6 \cdot 0,654$	0,654
<b>Trigonometrie</b>	
Von einem Dreieck sind die Seitenlängen $r = 2 \cdot \sqrt{6}$ cm, $s = 2 \cdot \sqrt{2}$ cm und $t = 4 \cdot \sqrt{2}$ cm bekannt. Bestimme die Größe der Innenwinkel.	Es ist $4 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 16 \cdot 2$ . Damit ist das Dreieck rechtwinklig nach dem Satz des Pythagoras. Die beiden anderen Innenwinkel betragen $30^\circ$ bzw. $60^\circ$ . (z. B. $\sin(\alpha) = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2}}$ )

Leistungskontrolle      Klasse 11                      Gruppe A  
 November 2004

Keine Hilfsmittel zugelassen                      Bearbeitungszeit: 40 min

Name, Vorname	Kurs	Punktzahl

1. Berechnen Sie  $x$  bzw. vereinfachen Sie so weit als möglich:

a)  $x = \frac{1}{13} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$

b)  $x = 15 \cdot 14 - 14^2$

c)  $x = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{2^4}$

d)  $x = \frac{\lg 10^{14}}{\lg 100}$

e)  $x :=$  arithmetisches Mittel von 2,3,4,5,6,7,8      f)  $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. a) Es ist  $x \cdot y = 1$  und  $x > 0$ .

Welche der folgenden Aussagen ist für alle  $x$  und  $y$  wahr?

- (1) Wenn  $x > 1$ , dann gilt  $y < 1$ .
- (2) Wenn  $x = 1$ , dann gilt  $y > 1$ .
- (3) Wenn  $x$  zunimmt, so nimmt  $y$  ab.

Ermitteln Sie jeweils die Lösungsmenge ( $x \in \mathbb{R}$ ):

b)  $\sin x - \cos x = 0$  mit  $0 \leq x \leq \pi$

c)  $ax + 10 = 5a + 2x$ ,  $a \in \mathbb{R}$

d)  $|45 - x^2| = 36$

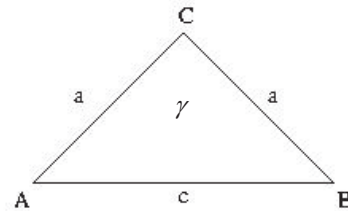
3. a) Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche besitzt bei einem Grundflächeninhalt

$$A = 3 \text{ FE} \quad \text{ein Volumen } V = 1 \text{ VE} .$$

Ermitteln Sie die Höhe dieser Pyramide.

- b) In einem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck ist  $\gamma$  der rechte Winkel.

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $C$  von der Dreiecksseite  $AB$  in Abhängigkeit von  $c$ .



- c) Ein Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius 1.

Welchen Flächeninhalt hat das größte in den Kreis eingeschriebene Quadrat.

- d) Ein Kreis hat den Flächeninhalt  $A$ .

Stellen Sie den Umfang  $u$  dieses Kreises in Abhängigkeit von  $A$  dar.

4. a) Ordnen Sie folgenden Graphen jeweils genau eine der nachfolgend angegebenen Gleichungen zu:

(I)  $y = 2 \cdot \cos x$

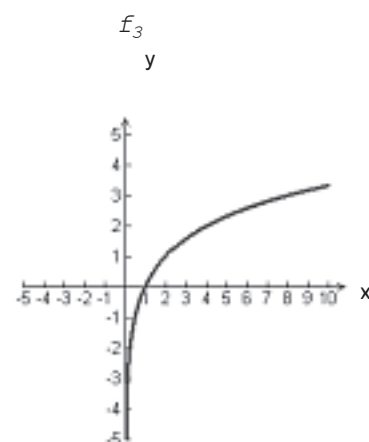
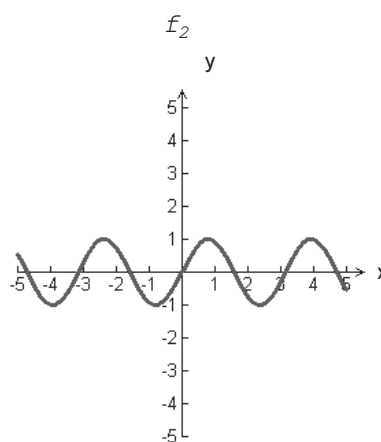
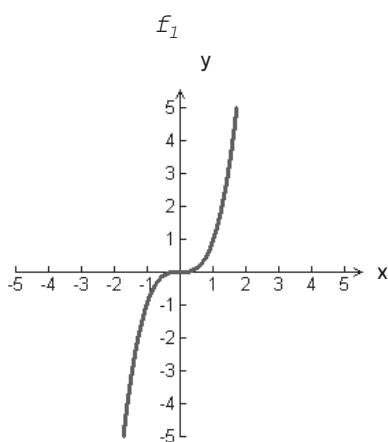
(II)  $y = x^3$

(III)  $y = \log_2 x$

(IV)  $y = \sin(2x)$

(V)  $y = 2 \cdot \sqrt{x}$

(VI)  $y = 2 \cdot \sqrt{x} - 2$



- b) Geben Sie eine Gleichung einer quadratischen Funktion an, die die Nullstellen  $x = 1$  und  $x = -2$  besitzt.

- c) Für welches  $n$  verläuft der Graph der Funktion  $f(x) = x^n$  durch den Punkt  $P\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{125}\right)$ ?
- d) Geben Sie eine Gleichung einer Funktion an, die über ihren Definitionsbereich streng monoton fallend verläuft.
- e) Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der Funktionen  $f(x) = x$  und  $g(x) = 11$ ?

## 5. Wahrscheinlichkeit

In einem Spiel werden zwei Würfel geworfen. Einer der Würfel ist ein normaler Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6. Der andere Würfel besitzt 4 weiße und 2 rote Seitenflächen.

Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das das Spiel beschreibt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine gerade Ziffer und eine rote Seitenfläche zu erhalten, wenn beide Würfel jeweils einmal geworfen werden?

## AUSGEWÄHLTE BEISPIELAUFGABEN

Ralph Huste

### 1 DACHGAUBE

Bei der Projektierung ihres Eigenheimes beabsichtigt Familie Müller im Dachgeschoss den Einbau einer so genannten Fledermausgaube (siehe Bild).



Eine den gekrümmten Teil des Randes der Gaubenfront beschreibende Funktion (kurz Randfunktion genannt)

$f_a$  genügt der Gleichung

$$f_a(x) = \frac{12}{a \cdot x^2 + 4}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

- Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktion  $f_a$  symmetrisch zur  $y$ -Achse verlaufen.
- Untersuchen Sie die Graphen der Funktion  $f_a$  auf die Existenz lokaler Extrempunkte und Wendepunkte. Berechnen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten.
- Zeichnen Sie die Graphen  $f_{0,5}$  und  $f_1$  im Intervall  $-4 \leq x \leq 4$ .

Familie Müller entscheidet sich für die Gaubenform, deren Front durch  $f_1$  im abgeschlossenen Intervall  $-4 \leq x \leq 4$  und durch senkrechte Strecken für  $x = \pm 4$  beschrieben wird.

(  $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ m}$  )

- Die größte Höhe für die Gaubenfront ergibt sich für  $x = 0$ .  
Zeigen Sie: Das größte Dachgefälle hat die Gaubenfront in einer Höhe von 2,25 m.  
Weiterhin soll das Dach der Gaube an beiden Enden ein Gefälle von 20% nicht unterschreiten.  
Ist diese Bedingung für die von Familie Müller gewählte Gaube erfüllt? Begründen Sie.

- e) Der Glaser soll die Gaubenfront in der Mitte über eine Breite von 4 m vollständig verglasen. Um den Inhalt dieser Glasfläche näherungsweise berechnen zu können, ersetzt er dazu die Randfunktion  $f_1$  durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades.

Bestimmen Sie eine mögliche Gleichung dieser Funktion  $p(x)$  und ermitteln Sie ohne Verwendung eines Rechners den Inhalt der zu verglasenden Fläche.

Nun nimmt der Glaser seinen CAS- Rechner zur Hand und bestimmt mittels Regression eine Gleichung 4. Grades für diese Funktion. Dazu verwendet er im Intervall die Schrittweite 0,5. Anschließend ermittelt unter Verwendung dieser Funktion den Flächeninhalt.

Vergleichen Sie beide Flächeninhalte mit dem exakten Wert für den Inhalt  $3\pi$ .

- f) Der nicht zu verglasende Teil der Gaubenfront soll durch senkrecht verlaufende Bretter verkleidet werden.

Die Baufirma kauft dazu 2,00 m lange Bretter der Breite 0,40 m. Wie viele Bretter muss die Firma mindestens erwerben, um diesen Teil der Gaube vollständig verkleiden zu können? Anfallender Verschnitt wird nicht verwendet.

Geben Sie einen möglichen Ansatz für die Bestimmung der Gesamtlänge der Bretter mittels Summenzeichen an.

Der Sohn der Familie Müller überrascht eines Tages seine Eltern mit der Bitte, den Rand der Gaubenfront als Spitzbogen gestalten zu lassen.

Er schlägt vor, zum Beschreiben des Randes Funktionen mit den Gleichungen

$$g_1(x) = 3 \cdot e^{\frac{2}{5} \cdot x} \text{ mit } -4 \leq x \leq 0 \text{ und } g_2(x) = 3 \cdot e^{-\frac{2}{5} \cdot x} \text{ mit } 0 \leq x \leq 4 \text{ zu verwenden.}$$

- g) Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionen  $g_1$  und  $g_2$  zur Beschreibung dieser Gaube geeignet sind..

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $g_1$  und  $g_2$ .

- h) In die so entstandene Gaubenfront möchte er ein rechteckiges Fenster maximalen Inhaltes einbauen lassen.

Ermitteln Sie die Maße für dieses Fenster.

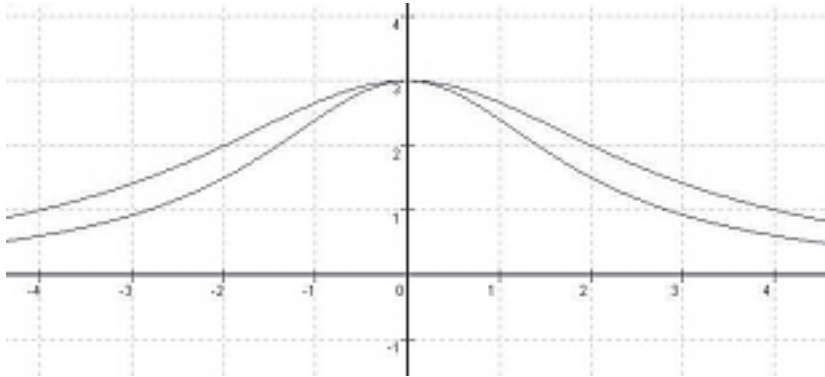
- i) Der Bogen soll im Scheitel einen so genannten Schlussstein erhalten.

Dieser muss vor dem Einsetzen bearbeitet werden.

Wie groß muss der Öffnungswinkel des keilförmigen Einsatzes mindestens sein?



Mögliche Lösungen:

a)	Nachweis der Symmetrie : $f_a(-x) = f_a(x)$
b)	$x_E = 0$ $f''_a(x_E) = -\frac{3}{2} \cdot a < 0, \text{ da } a > 0$ $P_{Max}(0; 3)$ $x_W = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{a}}$ $f'''_a\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{a}}\right) = \frac{81\sqrt{3}}{128} \cdot a\sqrt{a} \neq 0$ $f'''_a\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{a}}\right) = -\frac{81\sqrt{3}}{128} \cdot a\sqrt{a} \neq 0$ $P_W\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{a}}; \frac{9}{4}\right)$
c)	

d) z.B.: Schluss auf zur y- Achse symmetrische Wendepunkte  
 es existieren nur diese beiden Wendepunkte, die nicht  
 Sattelpunkte sind, somit hat in diesen Stellen der Graph  
 seinen vom Betrag her größten Anstieg.

$$|f'(\pm 4)| = \frac{6}{25}, \text{ Gefälle beträgt an den Rändern } 24\%$$

Bedingung wird eingehalten

e) z.B.: Unter Verwendung der Punkte  $w\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{9}{4}\right); P\left(2; \frac{3}{2}\right)$  und

$H(0;3)$  erhält man unter Beachtung der Achsensymmetrie:

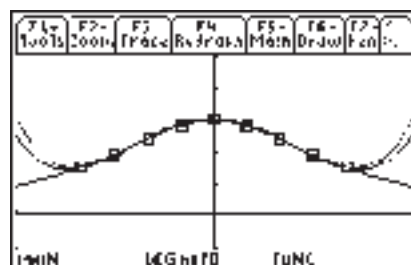
$$p(x) = \frac{9}{128} \cdot x^4 - \frac{21}{32} \cdot x^2 + 3$$

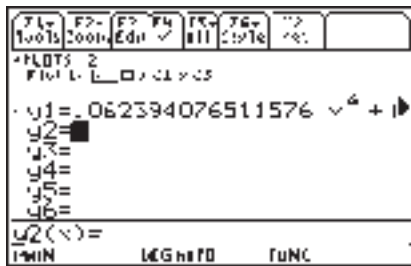
$$A = 2 \cdot \int_0^2 p(x) dx = 9,40m^2$$

F1- Tools	F2- Plot Setup	F3- Cxy	F4- Measure	F5- Calc	F6- Unit	F7- Stat
DATA						
	c1	c2	c3			
4	-1/2	48/17				
5	0	3				
6	1/2	48/17				
7	1	12/5				
F4C2=48/17						
iMIN LEGhtFD FUNC						



F1- Tools	F2- Stat	F3- Vars	F4- Stat	F5- Calc	F6- Unit	F7- Stat
DATA						
var a c1 b c2 c3 d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z						
	a	=	.062391			
	b	=	0			
	c	=	41782			
	d	=	0			
	e	=	2.977046			
	R2	=	.989191			
F4C2						
iMIN LEGhtFD FUNC						





$$p(x) = 0,62394 \cdot x^4 - 0,61782 \cdot x^2 + 2,977046$$

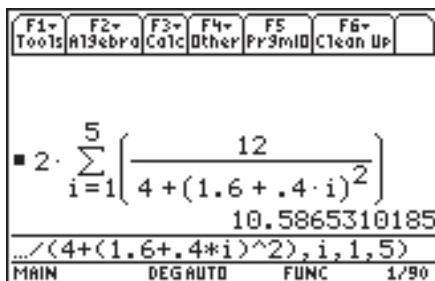
$$A = 2 \cdot \int_0^2 p(x) dx = 9,41 m^2$$

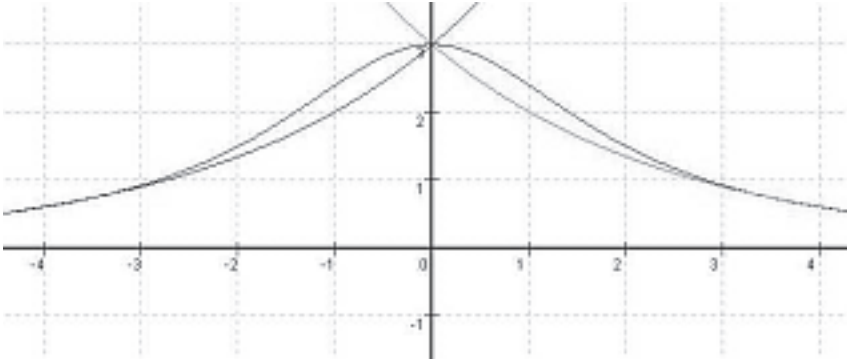
Vergleich: Beide Näherungswerte weichen nur geringfügig vom exakten Wert ab.

f) 
$$l = 2 \cdot ( f(2,00) + f(2,4) + f(2,8) + f(3,2) + f(3,6) ) = 10,6 m$$

Es müssen mindestens 6 Bretter gekauft werden.

z.B.:



g)	<p>Begründung</p> 
h)	<p>Breite <math>b = 5 \text{ m}</math> und Höhe <math>h \approx 1,10 \text{ m}</math></p>
i)	$m_1 = g'_1(0) = \frac{6}{5}, \quad m_2 = -g'_2(0) = -\frac{6}{5}, \quad \varphi = 79,6^\circ$

Bernd-Günther Kurtz

## 2 ANALYSIS - AUFGABE ( LÖSUNG MITHILFE CAS)

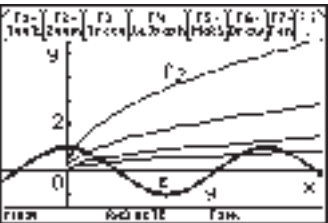
Für jede positive reelle Zahl  $a$  ist eine Funktion  $f_a$  durch die Gleichung

$$y = f_a(x) = a\sqrt{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \text{ gegeben.}$$

Untersuchen Sie, für welche Parameterwerte  $a$  der Graph von  $f_a$  mit dem Graphen der Funktion  $g$  und  $g(x) = \cos x$  genau ein gemeinsames Flächenstück einschließt!

Berechnen Sie den Inhalt eines solchen Flächenstücks!

### Lösungsskizze: (1)

<p>Wir betrachten die Graphen von <math>g</math> und <math>f_a</math> für <math>a \in \{2; 1; 1/2; 0,3\}</math>.</p> <p>Für jedes <math>a \in \mathbb{R}, a &gt; 0</math> existiert (mindestens) ein Schnittpunkt der Graphen von <math>f_a</math> und <math>g</math> im Intervall <math>0 \leq x \leq 2\pi</math>. Ist <math>a &gt; 0</math> hinreichend klein, ist die Anzahl der Schnittpunkte größer gleich 2 und die Graphen von <math>g</math> und <math>f_a</math> umschließen vollständig gemeinsame Flächenstücke.</p>	
---	--

(2) Genau ein Flächenstück wird eingeschlossen, wenn neben dem 1. Schnittpunkt im I. Quadranten der 2. Schnittpunkt (im IV. Quadranten) *Berührungspunkt* ist.

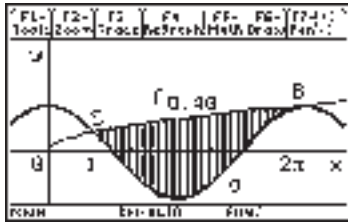
(3) Für Schnittpunkte gilt:  $f_a(x) = g(x)$ , sowie für „Berührung“ zusätzlich  $f_a'(x) = g'(x)$ .

Das nichtlineare Gleichungssystem (\*) wird mit CAS näherungsweise gelöst :

$$(*) \quad \begin{cases} a\sqrt{x} = \cos(x) \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} = -\sin(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_B \approx 6,20275 \quad \text{und} \quad B(x_B; 0,99677)$$

Aus (\*) erhält man mit  $x_B$   $a \approx 0,400222$  .

- (4) Zur Flächenberechnung ist noch die Schnittstelle  $x_s$  beider Graphen zu bestimmen.  
 Mit  $a \approx 0,400222$  erhalten wir mit CAS aus (\*)  $x_s \approx 1,13111$  und  $S(x_s; 0,42565)$



Der gesuchte Flächeninhalt **A** folgt nun aus

$$A = \int_{x_S}^{x_B} (f_{0,40}(x) - g(x)) \cdot dx \approx \underline{\underline{4.7861 \text{ FE}}}$$

Wilfried Zappe

### 3 EINFLUSS VON CAS-RECHNERN AUF ABITURAUFGABEN

Dankenswerter Weise gibt Edgar Kamp in den Trainingsbänden des Stark-Verlages zum Thüringer Mathematikabitur (Leistungsfach) einige Übungsaufgaben an, die veränderte Ansprüche an Abituraufgaben nach dem 1999 neu eingeführtem Lehrplan illustrieren sollen (Stark, LF Mathematik 2005, 10. ergänzte Auflage 2004).

Allerdings geht er noch nicht auf den Einfluss von CAS-Rechnern ein.

Dazu sollen hier im Folgenden anhand dieser Aufgaben einige Vorschläge unterbreitet werden.

#### Übungsaufgabe 1 (STARK, LF Mathematik 05, S. Ü 3) – Einfluss von CAS

„Gegeben ist die Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2} \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

- Diskutieren Sie den Verlauf des Graphen von f und skizzieren Sie ihn im Intervall  $-4 \leq x \leq 4$ .
- Untersuchen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und ihrer schrägen Asymptote für  $x \geq 1$ .

Der gravierendste Unterschied durch die Verfügbarkeit des grafikfähigen CAS-Rechners besteht darin, dass ein Graph sehr schnell zur Verfügung steht, ohne dass man vorher rechnen muss. Allerdings sieht man nur einen Ausschnitt der gesamten Funktion, so dass zur Absicherung eventuell vermuteter Eigenschaften eine rechnerische Untersuchung sinnvoll ist.

Diese wiederum wird aber nun ziemlich kurz ausfallen, weil der CAS-Rechner viel an Rechenarbeit abnimmt. Dabei spielen u. a. folgende Aspekte eine Rolle:

- Lange Rechnungen entfallen und werden durch kurze beschreibende und erläuternde Texte ersetzt. Das sprachliche Ausdrucksvermögen wird geschult.
- Interpretationen gewinnen an Bedeutung.
- Vernetzungen mit anderen mathematischen Stoffgebieten sind möglich, auch wenn sie gelegentlich auf Probleme führen, die ohne CAS gar nicht oder nur schwierig zu lösen wären.
- Solche Vernetzungen können auch zu neuen Aufgabenteilen führen, da die Punktbewertung durch den Einsatz von CAS-Rechnern mitunter geringer ausfällt.
- Selbstkontrollen durch Wechseln der algebraischen und geometrischen Darstellung erhöhen die Selbstkompetenz.

Aus diesen Gründen könnte man die Aufgabenstellung umformulieren:

Gegeben ist die Funktion  $f$  durch  $y = f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2}$  mit  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ .

a) Welche charakteristischen Eigenschaften des Graphen von  $f$  lassen sich aus der graphischen Darstellung von  $f$  bzw. dem Funktionsterm vermuten?  
Führen Sie Nachweise für Ihre Vermutungen.

b) Interpretieren Sie die Berechnung des bestimmten Integrals im Bild 1 geometrisch.

The image shows a CAS calculator screen with the following content:  
 - Top menu: f2=, f3=, f4=, f5=, f6=  
 - Function definition: f(x) = (x^3 + x^2 + 4) / x^2  
 - Integral calculation: x = 1 → g(x)  
 - Integral expression: ∫ (f(x) - g(x)) dx from 1 to 4  
 - Result: 4

c) Berechnen Sie alle Punkte auf dem Graphen von  $f$ , die vom Punkt  $A(0 | 2)$  den Abstand  $d = 2 \cdot \sqrt{2}$  haben.

Bild 1

Lösungsskizze

a) Vermutungen:

Polstelle und senkrechte Asymptote bei  $x = 0$

Nullstelle bei  $x = -2$

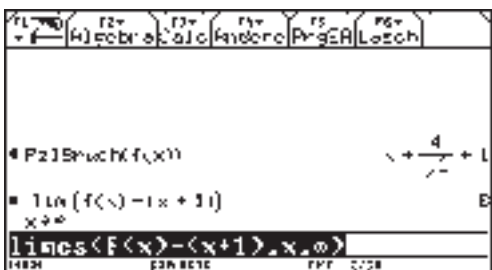
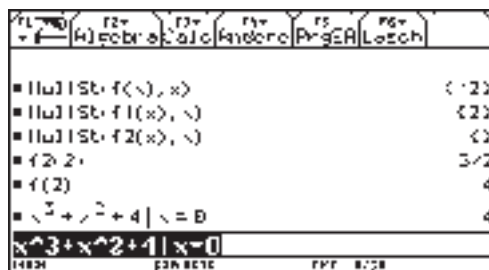
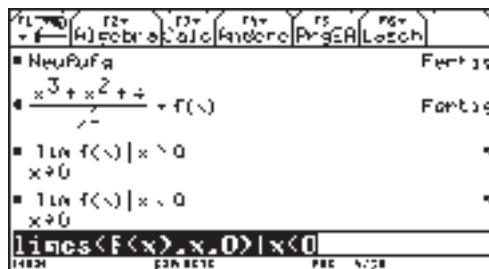
Lokaler Tiefpunkt (2 | 4)

Schräge Asymptote

Die Nachweise sind mit dem CAS-Rechner rasch geführt:

Die Ableitungen werden gebildet und unter f1 bzw. f2 gespeichert.

Alles andere zeigen die folgenden Bildschirmausdrucke.



Die Ergebnisse werden in einem kurzen Text erläutert, der auch deutlich macht, wie beim Nachweis jeweils vorgegangen wurde. (vgl. nächste Zeile)

Die Nullstelle von  $f$  ergibt sich durch das Lösen der Gleichung  $f(x) = 0$  zu  $x_0 = -2$ .

Sofort zu erkennen ist die Polstelle  $x_p = 0$ , weil für diesen Wert die Nennerfunktion von  $f$  null und die Zählerfunktion ungleich null ist. Die Untersuchung des links- bzw. rechtseitigen Grenzwertes von  $f$  an dieser Stelle ergibt jeweils  $\infty$ , so dass bei  $x_p = 0$  eine senkrechte Asymptote vorliegt.

Da für die Ermittlung von lokalen Extrempunkten und Wendepunkten die Ableitungen gebraucht werden, wird die Funktion  $f$  abgeleitet. Es ergeben sich folgende Gleichungen der Ableitungsfunktionen:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}; f''(x) = \frac{24}{x^4} \text{ und } f'''(x) = \frac{-96}{x^5}.$$

Die Nullstelle von  $f'$  ist  $x = 2$ . An dieser Stelle kann also ein lokales Extremum vorliegen. Da  $f''(2) = 1,5 > 0$  ist, wird die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum erfüllt. Es gibt also genau einen Extrempunkt und zwar einen Tiefpunkt  $T(2 | 4)$ . Die zweite Ableitung kann nicht null werden (Zähler ist stets ungleich null), somit ist die notwendige Bedingung für Wendepunkte nicht erfüllt, also gibt es keinen Wendepunkt.



Die Partialbruchzerlegung des Funktionsterms ergibt  $f(x) = \frac{4}{x^2} + x + 1$ . Hieran ist zu erkennen, dass für  $x \rightarrow \pm\infty$  die Gerade  $y = x + 1$  eine schräge Asymptote ist, weil der Summand  $\frac{4}{x^2}$  dann gegen null geht.

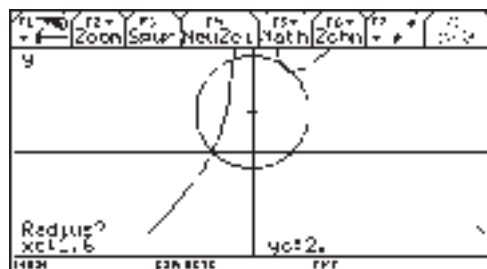
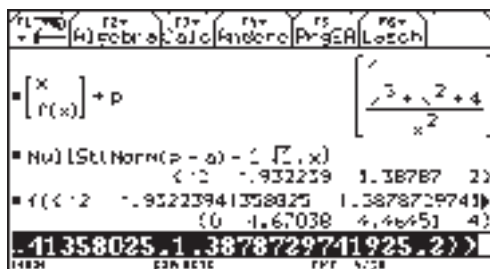
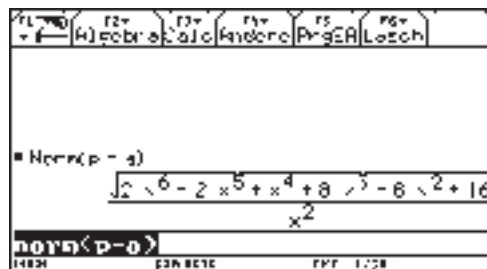
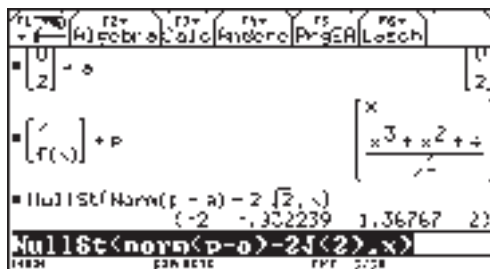
b) Geometrische Interpretation: Das uneigentliche Integral gibt den Inhalt der ins Unendliche reichenden Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und seiner Asymptote für das Intervall  $1 \leq x < \infty$  an.

c) Der Abstand wird als Betrag des Vektors  $\overrightarrow{AP}$  aus  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$  berechnet.

Damit ergeben sich die gesuchten  $x$ -Werte aus den Nullstellen der Funktion  $g(x) = |\overrightarrow{AP}| - 2 \cdot \sqrt{2}$ .

Die Punktkoordinaten sind  $(-2 | 0)$ ,  $(-0,93 | 4,67)$ ,  $(1,39 | 4,46)$ ,  $(2 | 4)$

Eine Selbstkontrolle ist mit den Zeichenwerkzeug F7: Circle des CAS-Rechners möglich. (Diese Aufgabe wäre ohne CAS nur schwierig zu lösen.)



## Übungsaufgabe 2 (Stark, LF Mathematik 2005, S. Ü 8)

„Bei der Untersuchung von Kurvenscharen gelangt man zwangsläufig zu Ableitungen von Funktionen höheren Grades. In diesem Zusammenhang seien die Ableitungsfunktionen  $f_t', f_t''$  und  $f_t'''$  der Funktionenschar  $y = f_t(x) = (1 + t \cdot x) \cdot e^{1-t \cdot x}$ ,  $x \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}, t \geq 0$  zu bilden. Welche Vermutung gilt für die n-te Ableitung  $f_t^{(n)}(x)$  für  $t = \frac{1}{2}$ ?

Überprüfen Sie mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion Ihre Vermutung.“

Diese Aufgabenstellung ist auch beim Einsatz von CAS-Rechnern relevant, denn die gesuchte Ableitung lässt sich nicht „auf Knopfdruck“ erzeugen. Trotzdem hat die Verfügbarkeit des CAS-Rechners Einfluss auf die Lösung und die Formulierung der Aufgabe:

- rasches Bereitstellen von Ableitungsfunktionen zum Erarbeiten der Vermutung
- Selbstkontrolle beim Aufstellen der Vermutung durch Verifizierung
- sinnvolle Aufgabenerweiterung durch Weglassen der Beschränkung auf  $t = \frac{1}{2}$
- inhaltliches Verständnis kann durch die Aufforderung zum Erläutern, Beschreiben usw. besser abgeprüft werden, weil die Ausführung konkreter Rechenschritte an den CAS-Rechner übertragen wird.

Vorschlag für eine CAS - geeignete Aufgabenstellung:


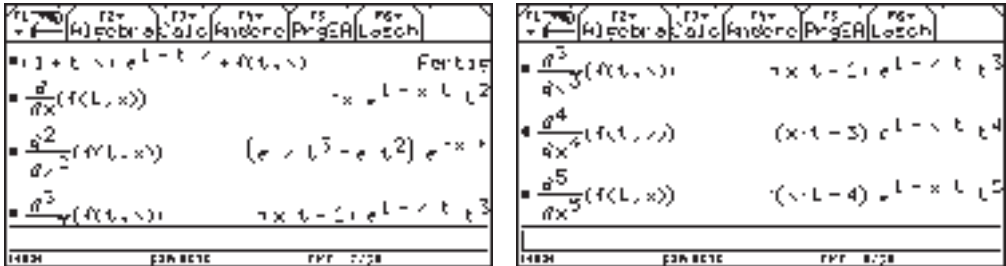
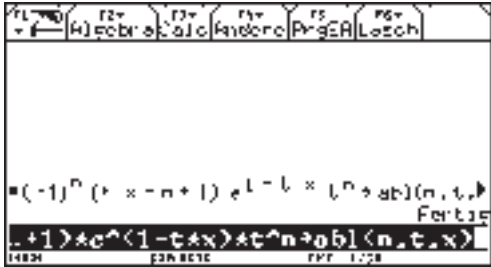
Gegeben ist die Funktionenschar  $y = f_t(x) = (1 + t \cdot x) \cdot e^{1-t \cdot x}$ ,  $x \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}, t \geq 0$

a) Zeigen Sie handschriftlich, also ohne Verwendung des CAS-Rechners, dass für die 1. Ableitung der Funktion  $f_t$  gilt:  $y = f_t'(x) = -t^2 \cdot x \cdot e^{1-t \cdot x}$ .

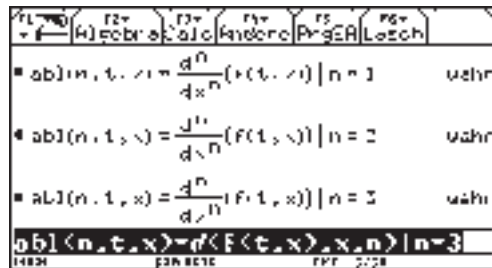
b) Ermitteln Sie einige weitere Ableitungen von  $f_t$  mit dem CAS-Rechner und stellen Sie eine Vermutung für die Gleichung der n-ten Ableitungsfunktion von  $f_t$  auf.

Führen Sie den Nachweis Ihrer Vermutung durch das Beweisverfahren der vollständigen Induktion. Begründen Sie die Notwendigkeit einer solchen Beweisführung.

Lösungsskizze:

<p>a)</p>	$f_t' = t \cdot e^{1-t \cdot x} + (1+t \cdot x) \cdot e^{1-t \cdot x} \cdot (-t)$ $f_t' = (t + (1+t \cdot x)) \cdot (-t) e^{1-t \cdot x}$ $f_t' = (t - t - t^2 \cdot x) \cdot e^{1-t \cdot x}$ $y = f_t'(x) = -t^2 \cdot x \cdot e^{1-t \cdot x}$	<p>Produkt- und Kettenregel</p> <p>Ausklammern</p> <p>Ausmultiplizieren</p> <p>Zusammenfassen</p>
<p>b)</p>	<p>Die n-te Ableitung lässt sich nicht durch „Knopfdruck“ erzeugen:</p>  <p>Erarbeiten einer Vermutung durch Verallgemeinern der ersten fünf Ableitungsfunktionen:</p>  <p>Vermutung:</p> $f_t^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (t \cdot x - n + 1) \cdot t^n \cdot e^{1-t \cdot x}$ <p>Abspeichern dieser Funktion:</p> 	

Verifizieren der Vermutung:

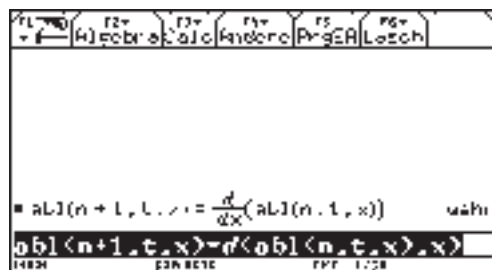


Eine verbale Erläuterung des Verfahrens der vollständigen Induktion kann mit den konkreten Beweisschritten verknüpft werden.

Nachweis der Vermutung durch vollständige Induktion:

Der Induktionsanfang ist mit dem Verifizieren der Vermutung bereits gelungen.

Der Induktionsschritt lässt sich ebenfalls leicht mit dem CAS-Rechner nachweisen.



Begründung für Beweisnotwendigkeit:

Mit dem Rechner lassen sich nur endlich viele Beispiele anhand der Formel überprüfen.

### Übungsaufgabe 3 (Stark, LF Mathematik 2005, S. Ü 10)

„Die Punkte  $A(2 \mid 1 \mid 0)$ ,  $B(7 \mid -4 \mid 5)$  und  $C(4 \mid 0 \mid 2)$  legen mit der Spitze  $D(t + 4 \mid 1 \mid t^2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) im Raum eine dreiseitige Pyramide fest.

Untersuchen Sie das Volumen der Pyramide ABCD in Abhängigkeit vom Wert des Parameters  $t$ .“

## Einfluss von CAS:

- Die Rechnungen lassen sich weitgehend an den CAS-Rechner übertragen. Das spart Zeit und Rechenfehler. Allerdings muss sehr sorgfältig die Eingabe in den Rechner kontrolliert werden, um Eingabefehler zu vermeiden. Auch bei der Auswahl der Variablenbezeichnungen muss man aufpassen, dass keine rechnerinternen Überschneidungen entstehen. Zum Beispiel wäre es bei der folgenden Aufgabe nicht zweckmäßig, die Variable  $t$  gleichzeitig als Parameter für den Ortsvektor vom Punkt  $D(t)$  und außerdem als Bezeichnung eines anderen Objektes zu verwenden.
- Durch die Verfügbarkeit des CAS-Rechners erschließen sich in der Regel auch weitere Lösungswege, die sich gut zur Selbstkontrolle und Visualisierung nutzen lassen.
- Die sich durch den Wegfall von Rechenzeit ergebenden Ressourcen werden u. U. genutzt, um weitere inhaltliche Fragen zu klären, die u. a. der Vernetzung verschiedener Stoffgebiete und der Stärkung der Raumanschauung dienen.

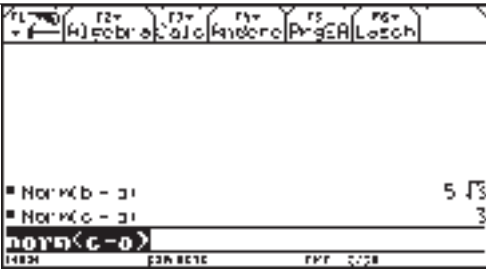
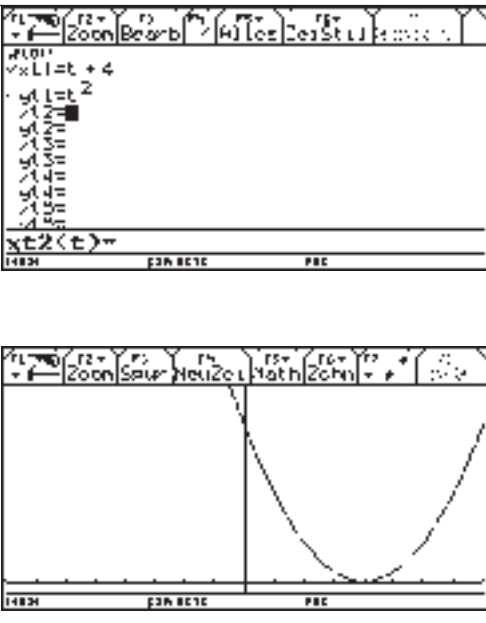
## Ergänzte Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Punkte  $A(2 \mid 1 \mid 0)$ ,  $B(7 \mid -4 \mid 5)$ ,  $C(4 \mid 0 \mid 2)$  und  $D(t + 4 \mid 1 \mid t^2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ )

- Für welche Werte von  $t$  wird durch diese Punkte eine Pyramide  $ABCD$  festgelegt?
- Untersuchen Sie das Volumen der Pyramide  $ABCD$  in Abhängigkeit vom Parameter  $t$ .
- Lässt sich  $t$  so festlegen, dass die Pyramide ein reguläres Tetraeder ist?
- Erklären Sie, warum die Spitze  $D(t)$  der Pyramide auf einer Parabel in der Ebene  $y = 1$  liegt.

Lösungsskizze

<p>a) Speichern der Ortsvektoren der gegebenen Punkte.</p>	
<p>b) Volumen über Spatprodukt berechnen</p> <p>Beachten, dass der Betrag des Spatproduktes für das Volumen gebraucht wird. Abspeichern der Zielfunktion für das Pyramidenvolumen.</p>	
<p>Das Auswerten der Zielfunktion ist auf verschiedenen Wegen möglich:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- graphisch</li> <li>- Anweisung fMax/ fMin</li> <li>- Ableitungskalkül</li> </ul> <p>Mindestens zwei dieser Möglichkeiten sollte man realisieren (Selbstkontrolle!).</p>	
<p>Das Volumen wird null für <math>t = 2</math> oder <math>t = -1</math>. Für diese beiden Werte ist das Volumen minimal, d. h. alle vier Punkte liegen in ein und derselben Ebene. Genau dann existiert keine Pyramide.</p> <p>Für <math>t = \frac{1}{2}</math> nimmt das Volumen ein lokales Maximum an.</p> <p>Aus dem Term und dem Graph von <math>v(t)</math> ist zu erkennen, dass es sich um eine Parabel mit „nach oben geklappter“ Spitze handelt. Deshalb</p>	

	<p>ist offensichtlich:</p> <p>Für <math>-\infty &lt; t &lt; -1</math> nimmt das Volumen streng monoton ab, für <math>t &gt; 2</math> nimmt <math>v(t)</math> streng monoton zu und wächst über alle Grenzen.</p>	
<p>b)</p>	<p>Da die Seitenlängen <math>\overline{AB}</math> und <math>\overline{AC}</math> unabhängig vom Parameter <math>t</math> verschieden groß sind, lässt sich <math>t</math> nicht so wählen, dass ein reguläres Tetraeder entsteht.</p>	
<p>c)</p>	<p>Die Ortskurve liegt auf einer zur <math>x - z</math> - Ebene parallelen Ebene im Abstand 1, weil <math>D(t)</math> stets den <math>y</math>-Wert 1 hat. Aus <math>x = t + 4</math> und <math>z = t^2</math> ergibt sich eine Zusammenhang zwischen <math>z</math>- und <math>x</math>-Werten von <math>z = (x - 4)^2</math>. Dies ist die Gleichung einer in positiver <math>x</math>- Richtung um 4 Einheiten verschobenen Normalparabel.</p> <p>Dies lässt sich auch in einer Parameterdarstellung verifizieren.</p> <p>(Im Mode-Menü muss man dazu Graph auf PARAMETRIC umstellen)</p>	

Bernd-Günther Kurtz

#### 4 ANDERE AKZENTE BEI AUFGABEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE

Die Aufgabe kombiniert unter einem einheitlichen Aspekt (Rechtecke im Raum) traditionelle Fragestellungen in Abituraufgaben mit Begründungen sowie Fallunterscheidungen mit CAS-Unterstützung.

Gegeben sind Quader  $Q$ , deren (rechteckige) Grundflächen jeweils durch die Punkte  $A(2; 12; 14)$ ,  $B(22; 32; 4)$ ,  $C(32; 21; 2)$  und  $D(12; 1; 12)$  bestimmt sind (Koordinateneinheit 1 cm).

- a) Berechnen Sie die Kantenlängen eines Quaders  $Q_1$ , der einen Rauminhalt von 27l besitzt!  
Für welche Kantenlängen eines anderen Quaders  $Q_2$  mit derselben Grundfläche ABCD sind die Maßzahlen von Volumen  $V$  und Oberfläche  $A_o$  gleich groß ?

( Hinweis: Für einen Würfel mit der Kantenlänge  $a = 6$  gilt z. B.  $a^3 = \{V\} = \{A_o\} = 6 \cdot a^2 = 216$  )

**5 BE**

- b) Geben Sie für den Quader  $Q_1$  mögliche Koordinaten der Eckpunkte seiner Deckfläche EFGH an und weisen Sie nach, dass für die drei Neigungswinkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  der Seitenflächen des Quaders bezüglich der x-y-Koordinatenebene gilt:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 \quad !$$

**7 BE**

- c) Gegeben sind eine Gerade  $g$  durch  $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + t\vec{a}$ ;  $t \in \mathbb{R}$  und eine Ebene  $\varepsilon$  mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$ , welche die Punkte A, B und C enthält.

- (1) Interpretieren Sie geometrisch die Lagebeziehung der Geraden  $g$  bezüglich der

Ebene  $\varepsilon$  für den Fall das  $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$  und  $P_0 \notin \varepsilon$  !

- (2) Für jedes  $k \in \mathbb{R}$  existiert genau eine spezielle Gerade  $g$  durch  $P_0(k; 20; 10)$

und  $\vec{a} = (-40; k^2; 0)$ .

Ermitteln Sie alle Parameterwerte  $k$  so, dass andere Lagebeziehungen zwischen der Geraden  $g$  und der Ebene  $\varepsilon$  als in Teilaufgabe (1) vorliegen !

**8 BE**



Lösungsskizze

a) Quader **Q1**:  $a = AB = 30$ ,  $b = AD = 15$  und aus  $V = 27.000$  folgt  $c_1 = AE_1 = 60$

Quader **Q2**: Aus  $a \cdot b \cdot c_2 = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c_2 + b \cdot c_2)$  folgt  $c_2 = 2,5$  und  $\{V\} = \{A_0\} = 1125$

b) Aus  $AB \times AD \parallel \overrightarrow{AE_1}$  und  $AE_1 = 60$  folgt z.B.  $E_1(22; 20; 70)$

sowie weiterhin  $F_1(42; 40; 60)$ ,  $G_1(52; 29; 58)$  und  $H_1(32; 9; 68)$

Ein Normalenvektor der x-y-Koordinatenebene ist z.B.  $\vec{n}_{xy}(0; 0; 1)$  und die jeweiligen Normalenvektoren der Quaderseitenflächen können durch die Kantenvektoren  $\overrightarrow{AE_1}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  und  $\overrightarrow{AB}$  repräsentiert werden. Mithilfe dreier Skalarprodukte von  $\vec{n}_{xy}$  mit  $\overrightarrow{AE_1}$  bzw.  $\overrightarrow{AD}$  und  $\overrightarrow{AB}$  erhalten wir  $\cos \alpha_1 = 14/15$ ,  $\cos \alpha_2 = 2/15$  und  $\cos \alpha_3 = 1/3$  und somit  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

c) (1) Die Gerade **g** verläuft parallel zur Ebene  $\varepsilon$  hat mit ihr jedoch keinen gemeinsamen Punkt:  $\mathbf{g} \cap \varepsilon = \{ \}$

(2)  $\varepsilon := \varepsilon_{ABC} \quad 5x + 2y + 14z = 230$

Die Fälle  $\mathbf{g} \cap \varepsilon \neq \{ \}$  bedeuten, dass es entweder genau eine Lösung oder aber unendlich viele Lösungen geben kann.

Durch Gleichsetzen erhält man  $2 \cdot (k^2 - 100) \cdot t = -5 \cdot (k - 10)$

$|k| \neq 10$ : Eindeutige Lösung mit  $t_S = -5/(2k+20)$

$k = 10$ : Die Gerade **g** ist eine echte Teilmenge der Ebene  $\varepsilon$

[ Anmerkung: Für  $k = -10$  liegt der Fall (1) vor ]

Hubert Langlotz

## 5 TELEFONDAUER

Die Aufgabe entstammt den neuen Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Leistungsfach Mathematik.

Sie bietet eine gute Gelegenheit, Themenbereiche – hier Analysis und Stochastik – sinnvoll miteinander zu verknüpfen.

Die Längen von Telefongesprächen lassen sich als Funktionswerte einer Zufallsvariablen  $X$  auffassen.  $X$  soll so festgelegt sein, dass 5 Minuten als eine Zeiteinheit dient.

Die Dichtefunktion ist durch folgende Funktion approximiert:

$$x \rightarrow d(x) \text{ mit } d(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 4xe^{-2x} & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass den Bedingungen einer Dichtefunktion genügt.

Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion  $x \rightarrow D(x)$

b) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen.

Beschreiben Sie den vorliegenden Sachverhalt anhand der Graphen.

c) Erörtern Sie die Bedeutung des Erwartungswertes  $\mu$ .

Wie viel Prozent aller Gespräche sind länger bzw. kürzer als  $\mu$  Zeiteinheiten ?

Erläutern Sie die unterschiedliche Größe der berechneten Prozentwerte im Zusammenhang mit dem gegebenen Sachverhalt.

Berechnen Sie, wie viel Prozent aller Gespräche in den Intervallen  $[\mu - \sigma ; \mu]$  und

$[\mu ; \mu + \sigma]$  liegen, wobei  $\sigma$  die Standardabweichung ist.

Vergleichen Sie die errechneten Werte.

Veranschaulichen Sie die Ergebnisse an den Zeichnungen aus dem Aufgabenteil b).

d) Berechnen Sie die Stelle  $x_M$ , an der  $d(x)$  ein Maximum besitzt.

Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes für den gegebenen Sachverhalt.

Vergleichen Sie  $x_M$  und  $\mu$  und begründen Sie den Unterschied.

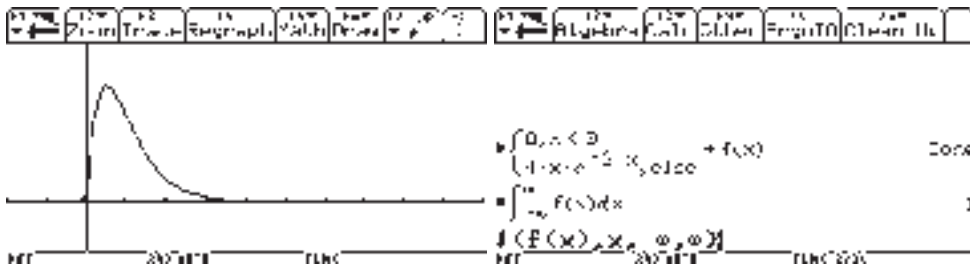
Lösungshinweise

a) Eine Funktion heißt Dichtefunktion, genau dann, wenn gilt:

1.  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

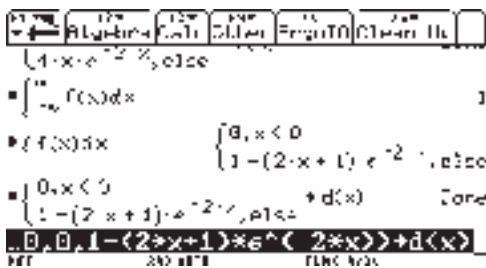
Beide Bedingungen werden erfüllt – vgl. Screenshots



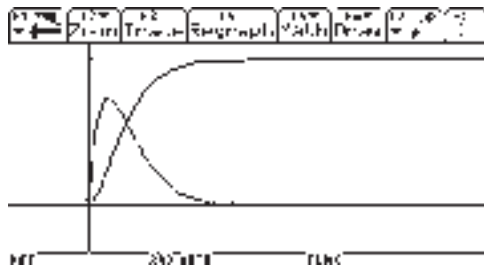
Man erkennt schon hier, dass es sich um eine asymmetrische Verteilung (linksschief) handelt.

Für D erhalten wir

$$x \rightarrow D(x) \text{ mit } D(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - (2x + 1)e^{-2x} & \text{sonst} \end{cases}$$

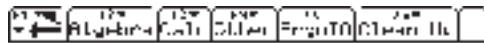


b)



c)

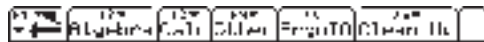
Dem Begriff des Mittelwertes in der Statistik entspricht in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Erwartungswert. Bezogen auf dieses Problem entspricht er hier der mittleren zu erwartenden Telefondauer.



$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Man erhält also für  $\mu=1$  ( dies entspricht 5 Minuten Telefondauer).

Um zu ermitteln, wie viel Prozent der Gespräche unterhalb des Erwartungswertes liegen, berechnet man die Fläche unterhalb von  $d(x)$  bis zum Erwartungswert. Man erhält 59,4%.

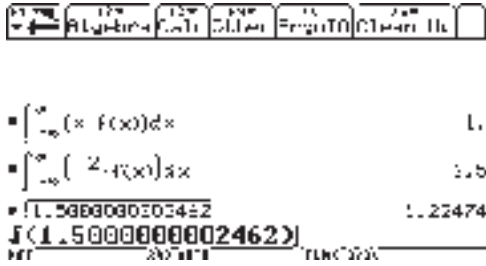


$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 - 3 \cdot e^{-3} = .593984$$

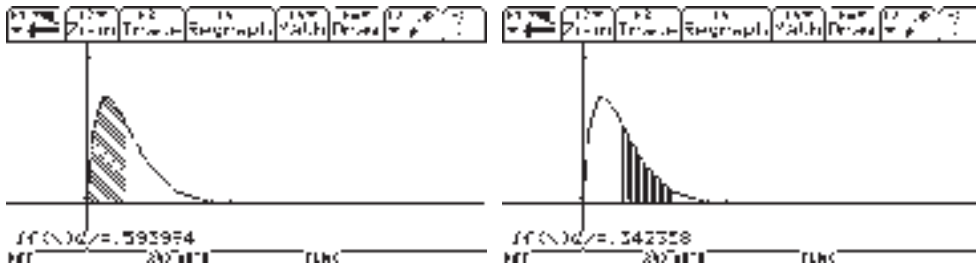
Dies ist ein weiterer Hinweis auf die Asymmetrie der Verteilung.

Nun muss man die Standardabweichung berechnen.

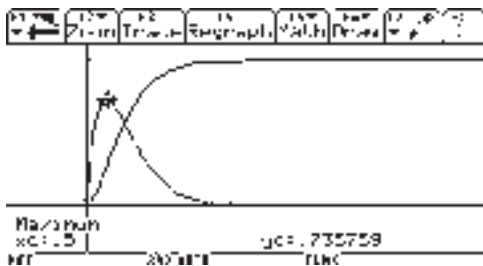


Man erhält für  $\sigma=1,225$ .

Im Intervall  $[\mu - \sigma ; \mu]$  liegen wie oben ermittelt 59,4% und im Intervall  $[\mu ; \mu + \sigma]$  34,2%.  
 Auch diese unterschiedlichen Werte ergeben sich aufgrund der Asymmetrie der Verteilung.



d) Das Maximum der Dichtefunktion ist an der Stelle  $x_m=0,5$  und bestätigt nochmals die Asymmetrie.



Hubert Langlotz

## 6 SIMULATIONEN- WOZU?

Die folgenden beiden Aufgaben sollen den Wert von Simulationen insbesondere im Themenbereich Stochastik verdeutlichen. Gleichzeitig wird gezeigt, dass kleine Programme hier sehr hilfreich sein können und dass diese auch ohne größere Programmierkenntnisse (vgl. dazu auch den Abschnitt 3 in diesem Heft) durchaus in den Mathematikunterricht einfließen können.

### 1. Treffen oder Verpassen

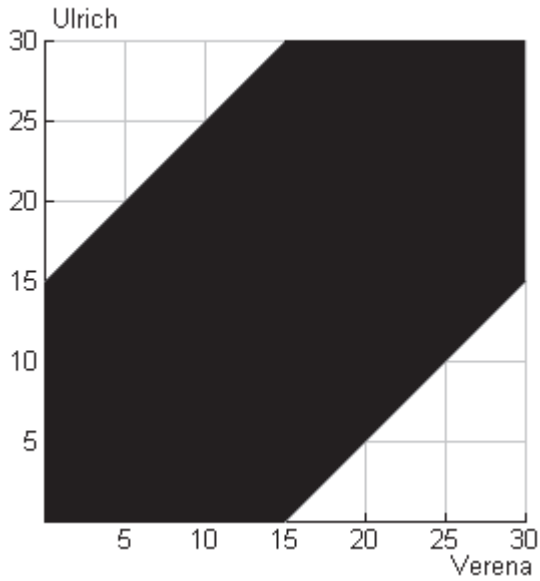
Verena und Ulrich verabreden, sich an einem bestimmten Tag zwischen 19.00 und 19.30 Uhr im Stadtcafe zu treffen, wobei jeder von ihnen höchstens eine Viertelstunde auf den anderen wartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Treffen, wenn für beide jeder mögliche Zeitpunkt zwischen 19.00 und 19.30 Uhr für das Eintreffen gleichwahrscheinlich ist?

(nach A. Müller, Stark Unterrichtsmaterialien 605, 2004)

### Lösung

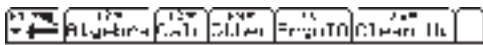
Die Zeitpunkte innerhalb der schraffierten Fläche im 30 Min. – 30 Minuten – Netz führen zu einem Treffen. Die Fläche ist also ein Maß für die gesuchte Wahrscheinlichkeit T.

$$\text{Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist demzufolge } P(T) = \frac{30 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15}{30 \cdot 30} = 0,75$$



Simulation des Problems

1. Weg: Jeder Schüler führt 20 „Simulationen durch. Man zählt die Treffer!



```

:seq((rand(50)-rand(50)),v,1,20)
◀ 1 2 B 11 12 18 11 8 26 5 ▶
:Σ(rand(30)-rand(30)),u,1,20)

```

2. Weg: Simulation mittels eines kleinen Programms



```

:Prgm
:Locd) =:n.1
:ClrTD
:=0+
:=0+
:=0+
:For 1,1,1
:If abs(rand(50)-rand(50))>.5 Then
:++t
:EndIf
:EndFor
:Disp "Wahrscheinlichkeit =",t,20-t
:EndPrm

```

treffer(1000)

```

┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐
│ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │
└──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘
Treffervahrscheinlichkeit =
.767

```

---

```

┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐
│ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │
└──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘

```

2. Ein Stab der Länge Eins werde zufällig in drei Teile zerbrochen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus den drei Teilstücken ein Dreieck gebildet werden

Wird die Frage nur so formuliert, dann ist keine eindeutige Antwort möglich.

Wir nutzen folgende Vorgehensweise:

Wir bezeichnen die beiden Bruchstellen mit  $x$  und  $y$ , und interpretieren den Ausdruck "zufällig" in der Weise, dass die beiden Bruchstellen im Intervall  $[0; 1]$  gleich verteilt sind.



Nun muss man nur noch die Dreiecksungleichungen berücksichtigen  $a + b > c$  und  $a + c > b$  und  $b + c > a$  und kann eine Simulation versuchen.

```

┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐
│ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │
└──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘

```

```

!StartPrgr
!Prgr
!Local = 1:1000:1:1
!ClrIO
!On
!For i 1:n
!Ando i
!Ando i
!Ando i
!If x+c Then
!Wd
!Wd
!Wd
!Wd
!EndFor
!Disp "Wahrscheinlichkeit=" !L!Az/n
!EndPrgr

```

---

```

┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐
│ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │
└──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘

```

```

┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐
│ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │
└──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘

```

```

Wahrscheinlichkeit=
.259

```

---

```

┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐ ┌──┐
│ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │ │ 1/1000 │
└──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘ └──┘

```

Ergebnis für 500 Simulationen.



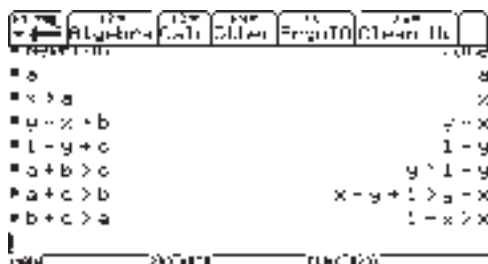
Etwas komplizierter gestaltet sich hier die Berechnung mittels geometrischer Wahrscheinlichkeiten.

Betrachten wir zunächst den Fall  $x < y$ , d.h. der erste Teil – mit  $a$  bezeichnet, hat dann die Länge  $x$ , der zweite mit  $b$  bezeichnet ist dann  $y - x$  lang und der dritte  $c$  hat dann die Länge  $1 - y$ . Setzt man dies nun in die Dreiecksungleichungen ein, so ergeben sich für die Möglichkeit, dass ein Dreieck entsteht 3 Ungleichungen:

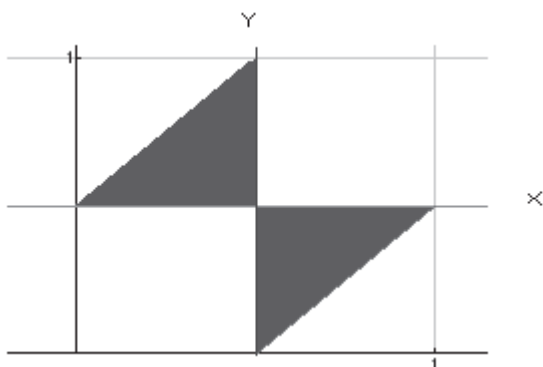
$$y > 1 - y, \text{ also } y > \frac{1}{2}$$

$$x - y + 1 > y - x \text{ also } y < x + \frac{1}{2}$$

$$1 - x > x \text{ also } x < \frac{1}{2}$$



Durch diese 3 Ungleichungen wird das erste schwarz dargestellte Dreieck bestimmt, analog findet man für  $y < x$  das zweite Dreieck. Beide Dreiecke entsprechen  $\frac{1}{4}$  der Gesamtfläche und dies entspricht somit einer Wahrscheinlichkeit von  $P=0,25$  für das entstehen eines Dreiecks.



Thomas Meyer

## PROGRAMMIEREN MIT DEM TC

Der TC lässt sich auch zum Programmieren einsetzen. Der folgende Beitrag soll einen kurzen Einblick in die Möglichkeiten der Programmierung mit dem TC liefern, wohl wissend, dass Programmieren nicht Unterrichtsgegenstand des gegenwärtigen Mathematikunterrichts ist. Kleinere Programme können zu Demonstrations- bzw. Kontrollzwecken gelegentlich sinnvoll sein, wenn die Schüler den inhaltlichen Hintergrund kennen gelernt haben und dadurch zu einem tieferen Verständnis des Sachverhaltes gelangen. In den Heften für Klasse 10 und 11 wurden ebenfalls weitere Beispiele vorgestellt.

1. Programmierung eines eigenen Menüs
2. Programm zur Lageuntersuchung von Geraden im Raum

### 1 PROGRAMMIERUNG EINES EIGENEN MENÜS

#### 1.1 Starten des Programmeditors

1.1.1 Drücken Sie „APPS“ und wählen dann „Program Editor“

1.1.2 Wählen Sie „New“



1.1.3 Machen Sie die erforderlichen Angaben:  
Programmtyp, Ordnerauswahl und Name

Beispiel für ein Menüprogramm

()

Prgm

Custom

Richtet eine Menüleiste ein.

Title "funktionen"

Titel des Menüs F1

Item "norm("

Unterpunkte für F1

Item "unitv("

Item "dotP("

Item "crossP("

Title "Eigene Programme"

Item "gp("

Item "gg("

Item "epe("

Item "gep("

Item "ukopa("

Item "upa\_nf("

Title "Vektoren"

Item "[1;3;7]"

Item "[2;4;6]"

Item "[1;3;7]"

Item "[3;4;6]"

Item "[1;1;1]"

Item "[2;0;0]"

EndCustm

EndPrgm



Nachdem der Name des Programms aufgerufen wurde (**start()**), wird die

neue Menüleiste wird durch Drücken von

**2nd**

und

**HOME**

aktiviert bzw. deaktiviert.

## 2 PROGRAMM ZUR LAGEUNTERSUCHUNG VON GERADEN IM RAUM

### 2.1 Hilfsprogramme

Damit das eigentliche Programm zur Lageuntersuchung nicht zu umfangreich wird, werden zunächst einige kleine Funktionen bereitgestellt.

- Dabei bedeuten im Allgemeinen:
- o- Ortsvektor einer Gerade
- v- Richtungsvektor einer Gerade
- p- Ortsvektor eines Punktes

Abstand eines Punktes von einer Geraden:	<i>apg(p,o,v)</i>
Abstand zweier windschiefer Geraden: Lotfußpunkte bei windschiefen Geraden	<i>awg(o1,v1,o2,v2)</i> <i>fuss((o1,v1,o2,v2))</i>
Lot von einem Punkt auf eine Gerade	<i>lotpg(p,o,v)</i>
Parameterfreie Gleichung einer Ebene durch einen Punkt und zwei Richtungsvektoren	<i>kge(o,v1,v2)</i>
Schnittpunkt zweier Geraden	<i>sgg(o1,v1,o2,v2)</i>
Spiegelgerade zu einer Geraden	<i>spie_gg(o1,v1,o2,v2)</i>
Winkel mit Betrag (größere Winkel) zwischen zwei Vektoren	<i>winkelg(v1,v2)</i>

Abstand Punkt-Gerade <i>apg(p,o,v)</i> Func Local h,ant <i>lotpg(p,o,v)»h</i> <i>norm(h-p)»ant</i> Return ant EndFunc	Schnittpunkt zweier Geraden <i>sgg(o1,v1,o2,v2)</i> Func Local e,p,t1,z <i>o1+t*v1=o2+s*v2»e</i> <i>solve(e[1,1] and e[2,1] and e[3,1],t)»t1</i> <i>o1+t*v1 t1»p</i> Return p EndFunc
Abstand windschiefer Geraden <i>awg(o1,v1,o2,v2)</i>	Parameterfreie Gleichung einer Ebene durch einen Punkt und zwei Richtungsvektoren

<pre> Func Local n,d,ant crossP(v1,v2)»n dotP(n,o1)»d ape(o2,n,d)»ant Return ant EndFunc </pre>	<pre> kge(p,v1,v2) Func Local n,d,ant If crossP(v1,v2)=[[0][0][0]] Then   "Keine Ebene"»ant Else   crossP(v1,v2)»n   dotP(n,p)»d   dotP(n,[[x][y][z]])=d»ant EndIf Return ant EndFunc </pre>
<pre> Lotfußpunkt fuss(o1,v1,o2,v2) Func Local r,s,a,b,c,d,e,hd,sd,rd,ant dotP(o2-o1,v1)»a dotP(v2,v1)»b dotP(v1,v1)»c dotP(o2-o1,v2)»d dotP(v2,v2)»e det([[b,c][e,b]])»hd det([[<sup>a</sup>1*a,c][<sup>a</sup>1*d,b]])»sd det([[b,<sup>a</sup>1*a][e,<sup>a</sup>1*d]])»rd sd/hd»ant rd/hd»r Return ant EndFunc </pre>	<pre> Spiegelgerade zu einer Gerade spie_gg(o1,v1,o2,v2) Func Local p1,ant spie_pg(o1,o2,v2)»p1 gpv(p1,v1)»ant Return ant EndFunc </pre>
<pre> Lot eines Punktes auf eine Gerade lotpg(p,o,v) Func </pre>	<pre> Schnittwinkel zweier Vektoren winkelg(v1,v2) Func </pre>

<pre> Local ant,k solve(dotP([[x][y][z]]- p,v)=0,t)[[x][y][z]]=o+t*v»k o+t*v k»ant Return ant EndFunc         </pre>	<pre> Local ant cos°(abs(dotP(v1,v2))/(norm(v1)*norm(v2)))»ant EndFunc         </pre>
--	---

## 2 Das Programm ggh

ggh(o1,v1,o2,v2)

Prgm

Local f,fp1,fp2

ClrIO

If dotP(v1,v2)/(norm(v1)\*norm(v2))=1 Then

If apg(o1,o2,v2) 0 Then

Disp "Geraden sind parallel"

Disp "Abstand:"

Disp apg(o1,o2,v2)

Pause

Disp "Ebene die beide Geraden enthält"

Disp kge(o1,o1-o2,v1)

Disp "Spiegelgerade von g1 zu g2:"

Disp spie\_gg(o1,v1,o2,v2)

Pause

Disp "Spiegelgerade von g2 zu g1:"

Disp spie\_gg(o2,v2,o1,v1)

Else

Disp "Geraden sind identisch"

EndIf

Else

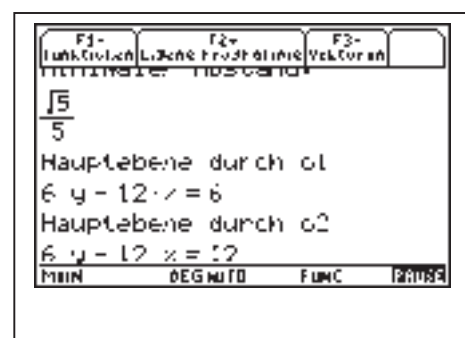
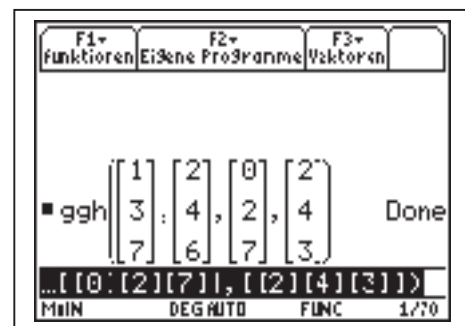
If sgg(o1,v1,o2,v2)=undef Then

Disp "Geraden sind windschief"

Disp "Minimaler Abstand:"

Disp awg(o1,v1,o2,v2)

Pause



Disp "Hauptebene durch o1"

Disp kge(o1,v1,v2)

Disp "Hauptebene durch o2"

Disp kge(o2,v1,v2)

Pause

Disp "Fusspunkt auf g1:"

Disp o1+fuss(o2,v2,o1,v1)\*v1

Pause

Disp "Fusspunkt auf g2:"

Disp o2+fuss(o1,v1,o2,v2)\*v2

Pause

ClrIO

Disp "gemeinsame Lotgerade"

o2+fuss(o1,v1,o2,v2)\*v2»fp1

o1+fuss(o2,v2,o1,v1)\*v1»fp2

Output 25,1,fp1

Output 40,35,"+t"

Output 25,60,fp1-fp2

Else

sgg(o1,v1,o2,v2)»f

Disp "Geraden schneiden sich"

Disp "Schnittpunkt:"

Disp f

Pause

Disp "Schnittwinkel:"

Disp winkelg(v1,v2)

Pause

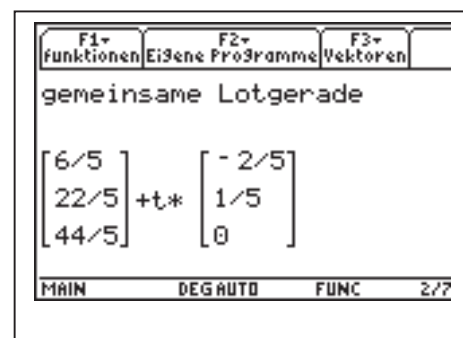
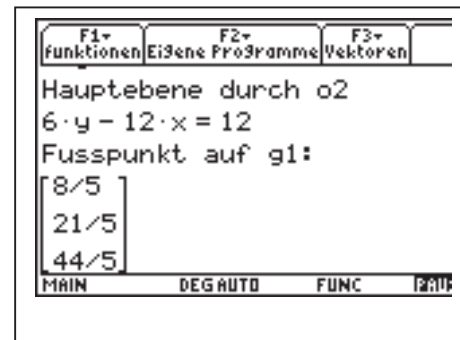
Disp "Bilden eine Ebene:"

Disp kge(f,v1,v2)

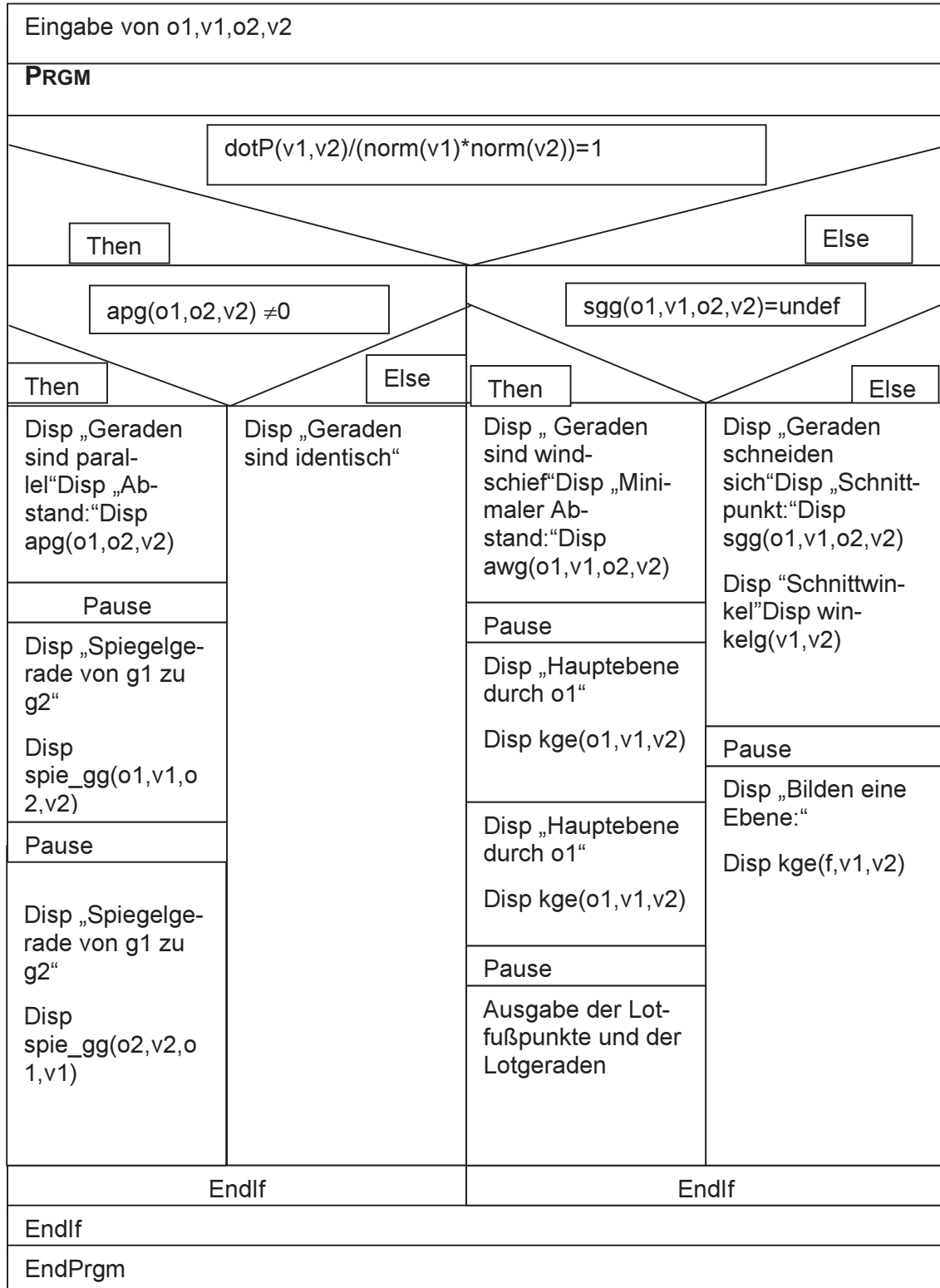
Endlf

Endlf

EndPrgm



Zum besseren Überblick für das Programm „ggh“ –Lageuntersuchung von Geraden im Raum- hier das zugehörige Struktogramm. Gerade-Gerade







## **Mathematikunterricht mit Taschencomputern in der Jahrgangstufe 12 an Thüringer Gymnasien**

Im Arbeitskreis „Computeralgebrasysteme“ am ThILLM arbeiten mit:

Martin Bellstedt, Hans-Joachim Brenner, Harald Böckel, Wolfgang Cott, Petra Daubner, Mario Dietzel, Barbara Dürer, Udo Eckert, Gabriele Felsmann, Dr. Annett Fiedler, Prof. Dr. Michael Fothe, Helga Fritsche, Dr. Torsten Fritzlar, Heidrum Gasch, Bernd Geyling, Jürgen Haaß, Gerald Hägebarth, Elke Hellmich, Ralph Huste, Dr. Hubert Kaller, Irmhild Kantel, Thomas Kniese, Angelika Krauß, Andreas Kretzschmar, Dr. Bernd-Günther Kurtz, Dr. Hubert Langlotz, Barbara Mehnert, Birgit Merten, Thomas Meyer, Dr. Wolfgang Moldenhauer, Grit Moschkau, Marita Most, Mike Müller, Frank-Ronald Otto, Hartmut Stein, Gabriele Steiner, Eva-Maria Volknant, Karen Willingshöfer, Dr. Wilfried Zappe

© 2005 Texas Instruments

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von Texas Instruments hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von Texas Instruments nicht zulässig.

Layout: Texas Instruments

Druck: Pinsker Druck und Medien