

TI-NACHRICHTEN

Ausgabe 2/15

INHALT

**T. Kellner, Dr. H. Langlotz,
Dr. W. Zappe**

„Kleine Fische, große Fische“
oder „Selektion simulieren“

1

H.-J. Elschenbroich

Die Funktionenlupe mit TI-Nspire™

6

G. Dreeßen-Meyer

Drehstreckung mit TI-Nspire™ CX CAS

9

H. K. Strick

Die sum-Funktion – ein starkes
Werkzeug des TI-30X Plus Multiview™

10

A. Küddelsmann, E. Götze

Lerntypengerechte Zugänge zu
einer Extremwertaufgabe mit dem
TI-Nspire™ CX CAS

14

Dr. F. Schlöglhofer

Berechnung von Entfernungen
auf der Erdoberfläche

20

Dirk Ritschel

TI-Technologie in Abschlussprüfung

24

Weitere Unterrichtsmaterialien:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T³
finden Sie unter:

www.t3deutschland.de

www.t3oesterreich.at

www.t3schweiz.ch



„Kleine Fische, große Fische“ oder „Selektion simulieren“



Tobias Kellner, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Wilfried Zappe⁽¹⁾

Lebewesen, die länger leben, können sich häufiger fortpflanzen und somit ihre Gene öfter weitervererben. Eine längere Lebensdauer hängt aber meistens davon ab, wie gut die Lebewesen an ihre Umwelt angepasst sind. Natürlich pflanzen sich auch weniger gut angepasste Lebewesen fort, aber eben nicht so häufig wie die besser akklimatisierten. Es kommt im Laufe der Zeit dadurch statistisch gesehen zu einem Übergewicht der besser angepassten Individuen. Man nennt diesen Vorgang „natürliche Selektion“. Auf diese Weise kommen günstige Allele im Genpool häufiger vor, nachteilige Allele dagegen seltener⁽²⁾.

Ein gut verständliches Beispiel ist die Entwicklung der Körpergröße von Kabeljau im Nordost-Atlantik. Durch die Überfischung entstand ein großer Selektionsdruck. Kleinere Fische hatten bessere Chancen, durch die engmaschigen Netze zu entkommen als große Fische. So waren Kabeljaue aus dem Nordost-Atlantik vor 60 Jahren, als die Jagd auf sie begann, im Schnitt noch 95 cm groß, heute erreichen sie nur noch eine Körpergröße von 65 cm⁽³⁾.

Ein einfaches mathematisches Modell

Eine Fischart sei durch A-Kugeln, die andere Art durch B-Kugeln repräsentiert, die äußerlich völlig gleich aussehen und sich gleich anfühlen, aber sich z.B. durch einen Aufdruck „A“ bzw. „B“ oder in ihrer Farbe unterscheiden. Aus einer großen Anzahl von A-Kugeln und B-Kugeln denken wir uns zehn A- und zehn B-Kugeln ausgewählt und in eine Urne gelegt. Aus dieser Urne werden „auf gut Glück“ mit einem Griff zehn Kugeln entnommen und beiseite gelegt. Sie stehen für gestorbene Fische. Nun sind noch zehn Kugeln in der Urne. Zu jeder in der Urne verbliebenen A-Kugel wird eine weitere A-Kugel und zu jeder verbliebenen B-Kugel eine weitere B-Kugel hinzugefügt, sodass sich wieder 20 Kugeln insgesamt in der Urne befinden. Dieser Vorgang kann als Simulation der Fortpflanzung der Fische aufgefasst werden. Nun werden wieder zufällig zehn Kugeln entnommen und es wird wieder so verfahren, wie oben beschrieben.



ZEICHENERKLÄRUNG



Computeralgebrasystem

TI-89 Titanium, Voyage™ 200



Graphische Taschenrechner

TI-82 STATS, TI-83 Plus, TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-84 Plus C Silver Edition, TI-84 Plus CE-T, TI-SmartView™ Emulator Software



Wissenschaftliche Taschenrechner

TI-30X Plus MultiView™



Messwerterfassungssystem

CBL 2™, CBR 2™, TI-Nspire™ Lab Cradle



TI-Nspire™ Technologie

(GTR, CAS, Software für Schüler, Lehrer-Software, Apps für iPad®, umfangreiches Zubehör)

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

gleich zu Anfang ein großes Dankeschön allen, die sich an der Umfrage in der ersten Ausgabe der TI-Nachrichten 2015 beteiligt haben. Ein wenig nervös waren wir im Redaktionsteam schon, bis die ersten Meinungen von Ihnen eintrafen, aber jetzt wissen wir: Die Mühe hat sich gelohnt. Mit der Neugestaltung des Heftes wurde schon vieles richtig gemacht. Jedenfalls gab es bezogen auf die Gestaltung nur positive Rückmeldungen. Allerdings finden 15 Prozent der Teilnehmer die Schriftgröße verbesserungswürdig (weshalb wir die heutige Ausgabe bereits angepasst haben). Zugegeben, das Kriterium der Repräsentativität der Umfrageergebnisse werden wir im mathematischen Sinne nur eingeschränkt erfüllen können – aber die Qualität der Antworten überzeugt in jedem Falle.

Nachfolgend einige Ergebnisse zusammengefasst: Die Länge der Artikel wird abgesehen von wenigen Stimmen als insgesamt passend empfunden. Hinsichtlich der Themenauswahl konzentriert sich das Interesse auf den Einsatz von Computeralgebra, vorzugsweise auf Handhelds. Gleichwohl möchte mehr als die Hälfte der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zukünftig mehr zum Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) auf Tablets in den TI-Nachrichten lesen. Noch vor die Beiträge zum Einsatz von Grafikrechnern schiebt sich der Bereich Messwerterfassung auf Rang 3 der interessierenden Themen. Ein Viertel der Rückmeldungen wünscht zukünftig auch Beiträge zum Einsatz von wissenschaftlichen Taschenrechnern.

Diesen Punkt haben wir im Redaktionsteam ausführlich diskutiert, wurden doch bisher ausschließlich Themen rund um Grafikrechner und CAS behandelt. Mit Blick auf die Beispielaufgaben, die das IQB für das länderübergreifende Abitur ab 2017 entwickelt, sind wir jedoch zu dem Schluss gekommen, diese Anregung aufzugreifen und sofort umzusetzen. Das IQB entwickelt Aufgaben für zwei Werkzeuggruppen: zum einen für Computeralgebrasysteme, zum anderen für einfache wissenschaftliche Taschenrechner. Was unter einem solchen Rechner zu verstehen ist? Er muss die Anforderungen erfüllen, wie sie aktuell in Baden-Württemberg und Bayern gelten. So, wie der TI-30X Plus Multiview™. Um unsere langjährigen Leserinnen und Leser an dieser Stelle nicht zu irritieren: Keine Bange, CAS wird auch in Zukunft den Schwerpunkt des Heftes bilden, denn nach Thüringen gehen zwei weitere Bundesländer diesen Schritt: In Niedersachsen sieht das seit 1. August 2015 geltende neue Kerncurriculum für das Gymnasium den Einsatz von CAS im Unterricht an mehreren Stellen ausdrücklich vor. Auch Mecklenburg-Vorpommern hat diesen Sommer seinen neuen Rahmenlehrplan für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe veröffentlicht. Zum Einsatz von digitalen Werkzeugen steht geschrieben: „Als digitales Mathematikwerkzeug wird ein Computeralgebrasystem (CAS) verwendet. Diese Regelung ist ab dem Schuljahr 2018/2019 ab der Klassenstufe 10 verbindlich.“

Ein Ergebnis der Umfrage macht uns besonders stolz: 90 Prozent der Teilnehmerinnen und Teilnehmer gaben an, mindestens einen Artikel aus Heft 1/2015 aktiv für den Unterricht verwenden zu wollen. Das ist es, was wir erreichen wollen und was auch in Zukunft unser Maßstab für Qualität sein wird!

Ihr TI-Team

„Halbschriftliche“ Simulationen mit dem TI-Nspire™ CX CAS

Auf einer Notes-Seite wird die folgende Ausgangssituation geschaffen:

```

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte
alist:=seq(a,k,1,10) → {a,a,a,a,a,a,a,a,a,a}
blist:=seq(b,k,1,10) → {b,b,b,b,b,b,b,b,b,b}
list1:=augment(alist,blist)
→ {a,a,a,a,a,a,a,a,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b}
list2:=randSamp(list1,10) → {b,a,a,a,b,b,a,b,a,a}
anz_a:=countf(list2,a) → 6
anz_b:=10-anz_a → 4
    
```

Abb. 1

- (1) Es wurden also im ersten Durchgang sechs A-Kugeln gezogen, es verbleiben noch vier in der Urne.
- (2) Diese verdoppelt ergeben acht A-Kugeln (anz_a) und analog zwölf B-Kugeln (anz_b) als neue Urnenfüllung.
- (3) Diese Zahlen sind in der ersten und zweiten Zeile als neue Endzahlen der seq-Befehle einzutragen und durch ENTER zu bestätigen.
- (4) Liste list2 wird durch Anklicken neu aktiviert:

```

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte
alist:=seq(a,k,1,8) → {a,a,a,a,a,a,a,a}
blist:=seq(b,k,1,12) → {b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b}
list1:=augment(alist,blist)
→ {a,a,a,a,a,a,a,a,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b}
list2:=randSamp(list1,10) → {b,b,b,b,a,b,b,b,b,a}
anz_a:=countf(list2,a) → 2
anz_b:=10-anz_a → 8
    
```

Abb. 2

Die Schritte (1) bis (4) werden nun mit den neuen Werten der Variablen *anz_a* und *anz_b* wiederholt usw., bis eine dieser Variablen den Wert 0 hat.

Die Ergebnisse werden handschriftlich in einer Tabelle notiert. Das Zufallsexperiment wird nach der im Abschnitt „mathematisches Modell“ beschriebenen Methode so lange wiederholt, bis nur noch Kugeln einer Sorte in der Urne sind. Die Tabelle zeigt ein mögliches Ergebnis:

Runde	In der Urne sind		Gezogen wurden		Nach dem Ziehen bleiben	
	A-Kugeln	B-Kugeln	A-Kugeln	B-Kugeln	A-Kugeln	B-Kugeln
0	10	10	6	4	4	6
1	8	12	2	8	6	4
2	12	8	10	0	2	8
3	4	16	3	7	1	9
4	2	18	1	9	1	9
5	2	18	1	9	1	9
6	2	18	2	8	0	10

Es ist auch bei häufiger Wiederholung dieser Versuchsreihe gut zu sehen, dass stets genau eine Sorte von Kugeln übrig bleibt. Wenn eine Sorte Kugeln das „Übergewicht“ erhält, wird die Wahrscheinlichkeit größer, beim nächsten Ziehen auch mehr Kugeln aus dieser Sorte zu erhalten. Das ist aber keinesfalls sicher, sodass im Laufe des Prozesses auch das Übergewicht zur anderen Sorte wechseln kann. Dieses Modell einer Selektion lässt sich am besten in Gruppenarbeit realisieren.

Das Zufallsexperiment lässt sich auch mit anderen Startzahlen durchführen, z.B. mit fünf A- und fünf B-Kugeln zu Beginn und dem Ziehen von jeweils sechs Kugeln mit einem Griff. Hier wird man i.A. weniger Ziehungen brauchen, um eine vollständige Selektion einer Kugelsorte zu erreichen.

Simulation mithilfe eines Ein-Zeilen-Programms

Wir starten mit der Festlegung der Liste *x* in der Form

```
x:={a,a,a,a,a,a,a,a,b,b,b,b,b,b,b,b}
```

- (1) Durch zufälliges Umsortieren mit *randsamp(x, 20, 1)* der Liste *x* entsteht eine Liste *y*.
- (2) Aus der Liste *y* werden mit *seq(y[k], k, 1, 10)* die ersten zehn Elemente ausgewählt. Die verbleibenden zehn Kugeln können als die ausgesonderten betrachtet werden, die zehn ausgewählten Kugeln gelten dann als die in der Urne verbliebenen Kugeln. Aus dieser neuen Liste und ihrer Verdopplung mit *augment(seq(y[k], k, 1, 10), seq(y[k], k, 1, 10))* entsteht eine neue Liste *x*. (Das entspricht der neuen Urnenfüllung mit der verdoppelten Anzahl der Restkugeln.)
- (3) Beide Anweisungen werden in ein und derselben Zeile durch einen Doppelpunkt getrennt. Fertig ist das Ein-Zeilen-Programm!
- (4) Jetzt kann es wieder mit Schritt (1) losgehen.

```
y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(y[k],k,1,10),seq(y[k],k,1,10))
```

```
{b,a,b,b,a,b,a,b,b,a,b,a,b,a,b,a,b,a,b,b,a}
```

Abb. 3a (oben): Eingabezeile, Abb. 3b (unten): Ausgabezeile

Nun muss man nur noch wiederholt ENTER drücken, um jedes Mal eine neue Realisierung des Ein-Zeilen-Programms zu erreichen. Dies macht man so lange, bis nur noch eine Sorte der Buchstaben *a* bzw. *b* übrig bleibt.

<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{b,b,b,b,b,b,b,b,a,b,b,b,b,b,b,b,b,b}
<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{b,b,a,b,b,b,b,b,b,b,b,b,a,b,b,b,b,b,b}
<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{b,b,b,b,a,b,b,b,a,b,b,b,b,b,a,b,b,b,a}
<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{b,b,b,b,a,b,b,b,a,b,b,b,b,b,a,b,b,b,a}
<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{a,b,b,b,b,b,b,b,b,b,a,b,b,b,b,b,b,b}
<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{a,b,b,b,b,b,b,b,b,b,a,b,b,b,b,b,b,b}
<code>y:=randSamp(x,20,1):x:=augment(seq(v[k],k,1,10),seq(v[k],k,1,10))</code>	{b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b}

Abb. 4

Simulation mithilfe einer Funktion

Für diesen Ansatz wird eine Funktion wie folgt definiert:

$$f: R^3 \rightarrow R^2, f(w, s, i) = 2 \begin{bmatrix} w-1 \\ s-10+i \end{bmatrix}$$

Dabei beschreibt w die Anzahl der A-Kugeln, s die Anzahl der B-Kugeln und i die Anzahl der gezogenen A-Kugeln. Die Funktion zieht nun die gezogenen Kugeln (i A-Kugeln und 10-i B-Kugeln) von der jeweiligen vorherigen Anzahl w bzw. s ab, verdoppelt die Ergebnisse und speichert sie in einen Vektor.

Um daraus wiederum ein Ein-Zeilen-Programm zu erstellen, erstellen wir zunächst einen Startvektor v, der den ersten Zug simuliert. Dazu wird v mit f(10,10,randInt(0,10)) initialisiert, also zehn A-Kugeln, zehn B-Kugeln und einer zufälligen Anzahl an gezogenen A-Kugeln zwischen 0 und 10.

Nun wird jeder neue Schritt dadurch simuliert, dass f erneut mit den Werten von v und einer neuen zufällig gezogenen Anzahl an A-Kugeln aufgerufen und das Ergebnis wieder in v gespeichert wird.

Dabei gilt für die einzelnen Definitionswerte:

- w muss die letzte Anzahl der A-Kugeln sein, also der erste Eintrag in v, hier: norm(v[1])
- s muss die letzte Anzahl der B-Kugeln sein, also der erste Eintrag in v, hier: norm(v[2])
- für i, die neue Anzahl an gezogenen A-Kugeln, müssen die oberen und unteren Grenzen angepasst werden:
Es können nie mehr A-Kugeln als vorhanden gezogen werden und auch nie mehr als zehn, also ist die obere Grenze min({10,norm(v[1])}).
Es können nie weniger als null A-Kugeln gezogen werden, aber wenn weniger als 10 B-Kugeln vorhanden sind, muss der Rest der gezogenen Kugeln als A-Kugeln gezogen werden. Das sind also zehn weniger der Anzahl der B-Kugeln. Damit ist die untere Grenze 10-min({10,norm(v[2])}).

Somit ergibt sich als neues Ein-Zeilen-Programm (siehe Abb. 5)

$$v := f(\text{norm}(v[1]), \text{norm}(v[2]), \text{randInt}(10-\min(\{10,\text{norm}(v[2])\}), \min(\{10,\text{norm}(v[1])\})))$$

und wie im oben beschriebenen Programm lässt sich die Simulation durch wiederholtes Drücken der ENTER-Taste durchführen.

$f(w,s,i) = 2 \begin{bmatrix} w-1 \\ s-10+i \end{bmatrix}$	Fertig		
<code>v:=f(10,10,randInt(0,10))</code>	<table border="1"><tr><td>4</td></tr><tr><td>16</td></tr></table>	4	16
4			
16			
<code>v:=f(norm(v[1]),norm(v[2]),randInt(10-min({10,norm(v[2])}),min({10,norm(v[1])})))</code>	<table border="1"><tr><td>8</td></tr><tr><td>12</td></tr></table>	8	12
8			
12			
<code>v:=f(norm(v[1]),norm(v[2]),randInt(10-min({10,norm(v[2])}),min({10,norm(v[1])})))</code>	<table border="1"><tr><td>14</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	14	6
14			
6			
<code>v:=f(norm(v[1]),norm(v[2]),randInt(10-min({10,norm(v[2])}),min({10,norm(v[1])})))</code>	<table border="1"><tr><td>20</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	20	0
20			
0			
<code>v:=f(norm(v[1]),norm(v[2]),randInt(10-min({10,norm(v[2])}),min({10,norm(v[1])})))</code>	<table border="1"><tr><td>20</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	20	0
20			
0			
<code>v:=f(norm(v[1]),norm(v[2]),randInt(10-min({10,norm(v[2])}),min({10,norm(v[1])})))</code>	<table border="1"><tr><td>20</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	20	0
20			
0			

Abb. 5

Simulation mithilfe eines Programms und einer Funktion

Dem in Abbildung 6 dargestellten Programm liegen folgende Überlegungen zugrunde: Die Liste li wird zunächst erzeugt durch zwei Listen, die n-mal die Ziffern 0 bzw. 1 beinhalten. Die Liste li3 beinhaltet die gezogenen Elemente. Um die Listen li1 und li2 und damit die Ausgangsliste neu zu belegen, wird noch eine Hilfsliste li4 benötigt. In der Variable „Anzahl“ werden die Durchläufe gespeichert.

Die while-Schleife wird dann durchlaufen, solange die Summe von li größer als 0 und gleichzeitig kleiner als 2n ist.

```

Define ldrehend(n)=
Prgm
Local li1,li2,li3,li,li4,s,gs,anz
li1:=seq(0,k,1,n)
li2:=seq(1,k,1,n)
li:=augment(li1,li2)
gs:=n
anz:=0
While sum(li)>0 and sum(li)<2*n
li3:=randSamp(li,n,1)
s:=sum(li3)
li1:=seq(0,k,1,n-(gs-s))
li2:=seq(1,k,1,gs-s)
li4:=augment(li1,li2)
li:=augment(li4,li4)
gs:=sum(li)
anz:=anz+1
Disp li
EndWhile
Disp anz
EndPrgm
    
```

Abb. 6



Der Name des Programms rührt von dem Umstand her, dass Rudolf Taschner sich in seinem Buch auf linksdrehende Aminosäuren bezieht (vgl. auch Online-Ausgabe dieses Artikels in der TI Materialdatenbank).

Wie in Abbildung 7 zu sehen ist, scheint die Zahl der Durchläufe stark zu schwanken.

ldrehend(10)	<pre>{0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1} {0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1} {0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1} {0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1} {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0} 5 </pre>
	Fertig
ldrehend(10)	<pre>{0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1} {0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1} {0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1} {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1} 9 </pre>
	Fertig

Abb. 7

Um hierfür einen Näherungswert für die mittlere Anzahl der Durchläufe zu bekommen, nutzt man eine Funktion, die den gleichen Aufbau wie das Programm hat, als Ausgabe aber nur die Anzahl der Durchläufe zurückgibt.

$\frac{\sum_{k=0}^{100} (\text{linksdreh}(10))}{100}$	22.85
$\frac{\sum_{k=0}^{100} (\text{linksdreh}(10))}{100}$	24.72
$\frac{\sum_{k=0}^{1000} (\text{linksdreh}(10))}{1000}$	23.974
$\frac{\sum_{k=0}^{1000} (\text{linksdreh}(10))}{1000}$	23.655

Abb. 8

Der Mittelwert scheint sich bei 24 zu stabilisieren. Eine theoretische Berechnung dieser mittleren Wartezeit kann mithilfe einer sogenannten absorbierenden Markov-Kette erfolgen. Mehr dazu findet man z.B. in dem hervorragenden Buch von Arthur Engel.

In seinem iBook „Intuition und Zufall“ beschreibt Benno Grabinger⁽⁵⁾ (S. 71 ff.) ein ähnliches Beispiel zur Selektion, welches vom Nobelpreisträger Manfred Eigen stammt.

Literatur, Quellen:

- (1) Angeregt durch ein Beispiel aus dem Buch von Rudolf Taschner: *Zahl Zeit Zufall. Alles Erfindung?*; Ecowin Verlag, 2007
- (2) Quelle: (Stand vom 07.10.2014) <http://www.biologie-schule.de/evolutionsfaktor-selektion.php>
- (3) Quelle: (Stand vom 07.10.2014) http://de.wikipedia.org/wiki/Selektion_%28Evolution%29
- (4) Arthur Engel: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*; Bd. 2, Klett, 1992
- (5) Benno Grabinger: *Intuition und Zufall*; iBook

» **Autoren**
 Tobias Kellner (D), Dr. Hubert Langlotz (D),
 Dr. Wilfried Zappe (D)

Die aktuelle Ausgabe der TI-Nachrichten jetzt auch als

eMagazin

Mit digitalem Zusatzmaterial wie TI-Nspire™ Dokumenten (tns-Files), weiterführenden Links und vielem mehr!

www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Die ‚Funktionenlupe‘ ist eine Lernumgebung, mit der man anschaulich und kalkülfrei einen Zugang zu Grundvorstellungen der Differenzialrechnung gewinnen kann. Ihre Grundidee ist einfach: Es geht stets um drei Punkte A_l , A , A_r auf dem Graphen einer Funktion f , auf denen alles aufbaut.

Das Funktionenmikroskop war ein Vorschlag von Arnold Kirsch „zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff“, der damals mit OHP-Folien realisiert worden war (Kirsch, 1979). Das war eine Vorwegnahme der Idee des Hineinzoomens. Man vergrößerte so lange, bis das sichtbare Graphenstück gerade aussah. Einige Jahre später ließ sich diese Idee dann auch digital mit Funktionenplottern umsetzen. Damit wurde man bei den Funktionen und bei der zu untersuchenden Stelle flexibler, aber man agierte nach wie vor rein lokal.

Die Funktionenlupe ist ein Vorschlag von Elschenbroich, Seebach und Schmidt (2014) auf den Spuren von A. Kirsch, der jetzt auch für TI-Nspire™ realisiert ist¹. Dabei werden zwei Grafik-Fenster nebeneinander genutzt. Der besseren Handhabung wegen ist sie in vier Teile aufgeteilt. Es werden im Folgenden vier Varianten der Funktionenlupe vorgestellt.

I Lokale Steigung, Schmiegegerade

Die Funktionenlupe I beschäftigt sich lokal mit Steigung und Sekanten. Im linken Fenster ist der Graph einer Funktion f_1 im Standard-Zoom zu sehen. Um einen Punkt A auf dem Graphen ist ein Quadrat hervorgehoben, das sich von A aus um h nach links, rechts, unten und oben erstreckt. Die Größe dieses Quadrats kann über den Schieberegler h verändert werden. Dieses Quadrat wird dann in das zweite Fenster vergrößert kopiert, sodass es dort immer den gleichen Platz ausfüllt. Die Grenzen zwischen den Fenstern sollten so gezogen werden, dass das rechte Lupenfenster auch quadratisches Format hat. Dies ist die Basis-Version der Funktionenlupe. Mit dem Regler ‚steigungen‘ oben rechts kann man die links- und rechtsseitigen Sekanten und auch die zugehörigen Steigungsdreiecke einblenden oder ausblenden. Dabei haben wir links von $A = (x_a | y_a)$ den Punkt A_l auf dem Graphen von f , dessen x -Koordinate $x_a - h$ ist und rechts von A den Punkt A_r auf dem Graphen von f , dessen x -Koordinate $x_a + h$ ist. Die linksseitige Sekante verläuft durch A_l und A , die rechtsseitige Sekante durch A und A_r . Dies ist die typische Situation, die man auch in jedem Schulbuch zur Differenzialrechnung findet, die hier aufgegriffen wird. Natürlich kommt es dabei vor, dass A_l oder A_r außerhalb unseres Quadrats um A liegen, da dessen Ausdehnung in y -Richtung ja nur h nach oben bzw. unten ist.

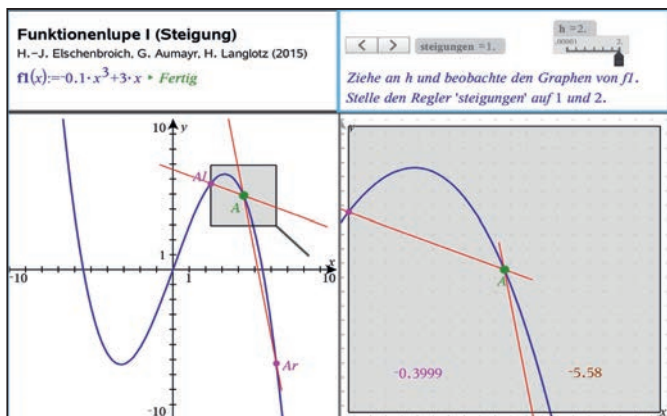


Abb. 1: Die Funktionenlupe $h = 2$

Wird h immer kleiner, bis $h = 0.00001$, so sieht man (Abb. 2), dass der Graph von f_1 dann im rechten Fenster praktisch gerade aussieht und dass die beiden Sekanten anschaulich zusammenfallen und eine Schmiegegerade (= Tangente) bilden. Die Steigungen der Sekanten bzw. die Steigung des Graphen an der Stelle A kann man dann mittels Messung der Steigung der Sekanten einfach ermitteln.

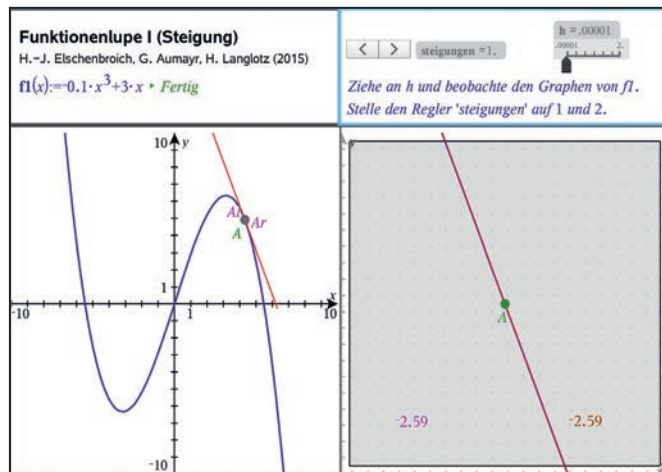


Abb. 2: Die Funktionenlupe I mit $h = 0.00001$

Somit haben wir also zum einen den Effekt des Hineinzoomens und behalten zum anderen den Überblick. Des Weiteren kann man an A ziehen und man kann einen anderen Funktionsterm wählen. Damit erhalten wir mit der Funktionenlupe I einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zur lokalen Steigung.

Natürlich ist der Vorgang des Zoomens bis zur lokalen Glättung nicht bei jeder Funktion erfolgreich, man braucht schon gutartige Funktionen (die dann den Namen ‚differenzierbar‘ bekommen). Ein typisches Beispiel einer problematischen, nicht-gutartigen Funktion ist $f(x) = |x|$ an der Stelle $a = 0$. Wenn man hier h verkleinert, sieht es so aus, als würde sich das Bild im zweiten Fenster (Abb. 3) nicht ändern. Der Graph kann nie lokal gerade aussehen, sondern behält immer eine ‚Knickstelle‘ bei $(0|0)$.

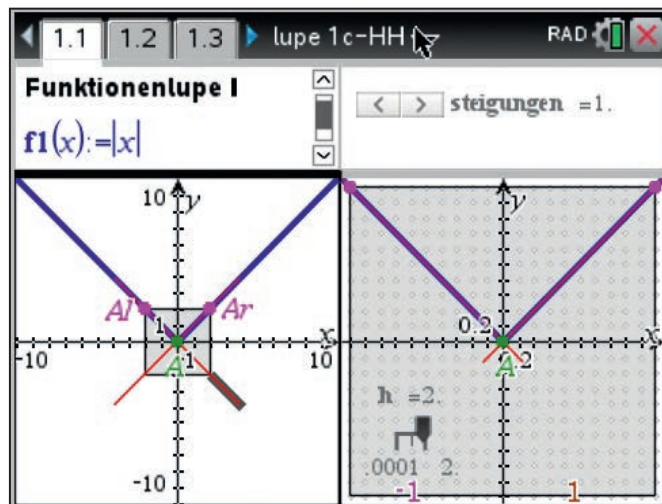


Abb. 3: Die Funktionenlupe I mit $f_1(x) = |x|$, Handheld-Ansicht

¹ zusammen mit Dr. H. Langlotz und G. Aumayr

II Steigungsfunktion

Man kann die gemessenen Sekantensteigungen in Punkte übertragen, die die gleiche x-Koordinate wie A haben. Dies wird hier wieder mit einem anklickbaren Regler 'steig_funktionen' durchgeführt. Damit erhält man einen Punkt S_l mit der linksseitigen Sekantensteigung als y-Koordinate und einen Punkt S_r mit der rechtsseitigen Sekantensteigung als y-Koordinate. Für größeres h sind diese Punkte in der Regel deutlich unterschiedlich, für sehr kleines h fallen sie dann (bei gutartigen Funktionen) anschaulich zusammen (Elschenbroich, 2014).

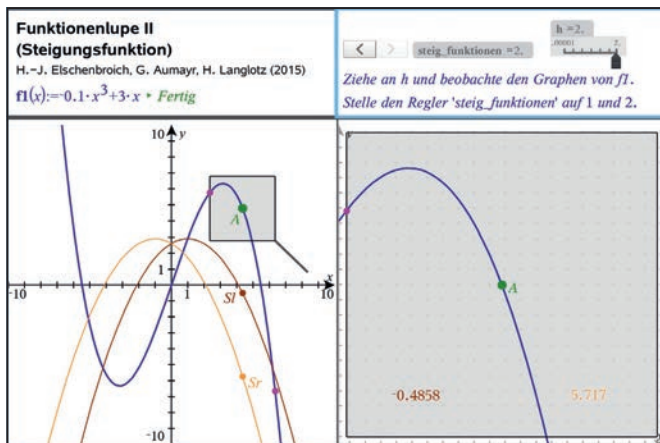


Abb. 4: Die Funktionenupe II mit $h = 2$

Spannend wird es, wenn man diese Punkte nun einen geometrischen Ort² in Abhängigkeit von A zeichnen lässt. Dann erhält man die Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen, die bei differenzierbaren Funktionen für sehr kleines h schließlich anschaulich zum Graphen der Tangentensteigungsfunktion zusammenfallen. So bekommen wir mit der Funktionenupe II – ohne Kenntnis des Funktionsterms von f' – einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zur Ableitungsfunktion.

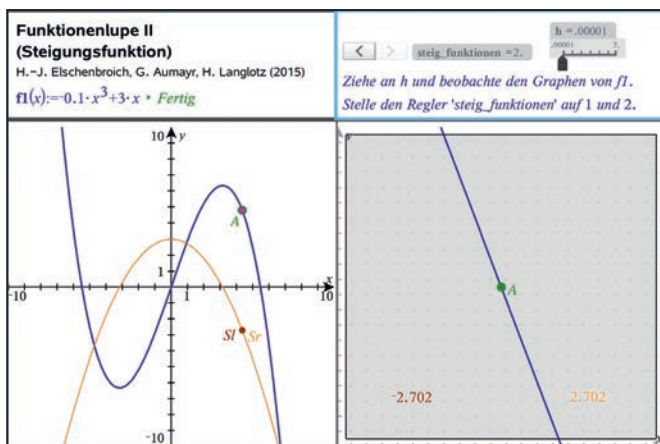


Abb. 5: Die Funktionenupe II mit $h = 0.0001$

Die Steigungswerte werden im rechten Fenster ermittelt (wie bei der Funktionenupe I), das Entscheidende passiert hier aber im linken Fenster. Durch den Zugmodus und Ortslinien werden die Steigungswerte aus ihrer Lokalität herausgeholt und gewissermaßen globalisiert. Dies kann man nur sinnvoll im linken Fenster verfolgen.

III Krümmung und Schmiegekreis

Analytisch ist die Krümmung eines Graphen ein anspruchsvolles Konzept. Geometrisch ist es ganz elementar: Bei einem Kreis ist die Krümmung = $1/\text{Radius}$.

Wir können jetzt den Graphen lokal auch dadurch approximieren, dass wir (anstelle der beiden Sekanten) durch die drei Punkte A_l , A und A_r einen Kreis konstruieren. Wird h wieder immer kleiner, so stabilisiert sich bei gutartigen Funktionen dieser Kreis und wird anschaulich zum Schmiegekreis (Elschenbroich, 2014). Dies sieht man vor allem im linken Fenster. Der Kehrwert des Kreisradius ist betragsmäßig die Krümmung an dieser Stelle.

Damit erhalten wir mit der Funktionenupe III auch einen anschaulichen und kalkülfreien Zugang zur Krümmung. Will man noch die Art der Krümmung (Links-, Rechts-) ermitteln, sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, da über den Kreisradius natürlich immer nur positive Werte kommen.

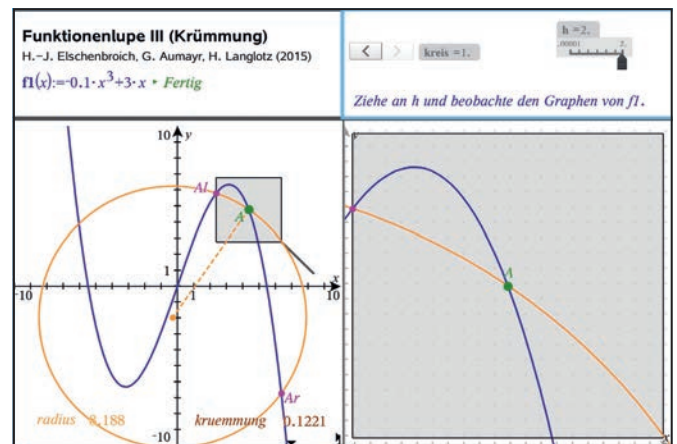


Abb. 6: Die Funktionenupe III mit $h = 2$

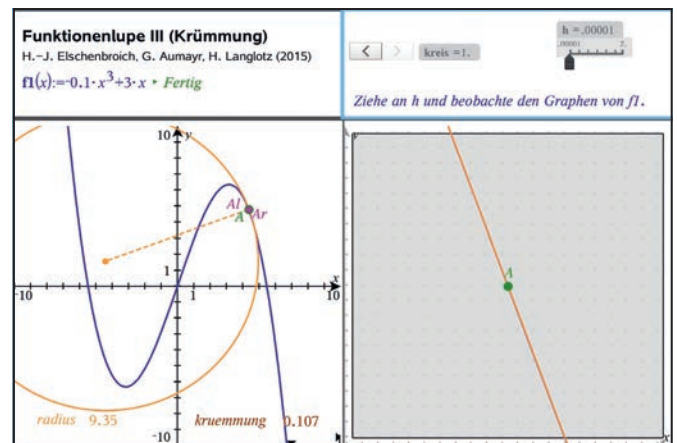


Abb. 7: Die Funktionenupe III mit $h = 0.0001$

Falls die drei Punkte A_l , A , A_r auf einer Geraden liegen sollten, gibt es keinen Kreismittelpunkt im eigentlichen Sinne. Man kann dann eine Gerade als Kreis mit unendlichem Radius und der Krümmung Null verstehen. Dies tritt z.B. bei der Funktion f mit

$$f(x) = -0,1x^3 - 3x \text{ im Wendepunkt } A = (0|0) \text{ auf.}$$

¹⁾ Hier muss der geometrische Ort konstruiert werden. Das Zeichnen der geometrischen Spur ist nicht zielführend, weil sich diese nicht dynamisch verändert, wenn h verkleinert wird!



IV Schmiegeparabel

Statt den Graphen lokal durch einen Kreis zu approximieren, was ein geometrischer Ansatz ist, könnte man ihn auch funktional durch eine quadratische Funktion approximieren. Durch drei Punkte ist immer eine Parabel definiert, diese kann man z.B. mittels quadratischer Regression ermitteln und plotten.

Auch hier stabilisiert sich wieder der Prozess für sehr kleines h und man erhält anschaulich die Schmiegeparabel. Macht man dies an der Stelle $a = 0$, so erhält man z.B. für $f(x) = \exp(x)$ die quadratische Funktion. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. So kommen wir anschaulich zum zweiten Taylorpolynom!

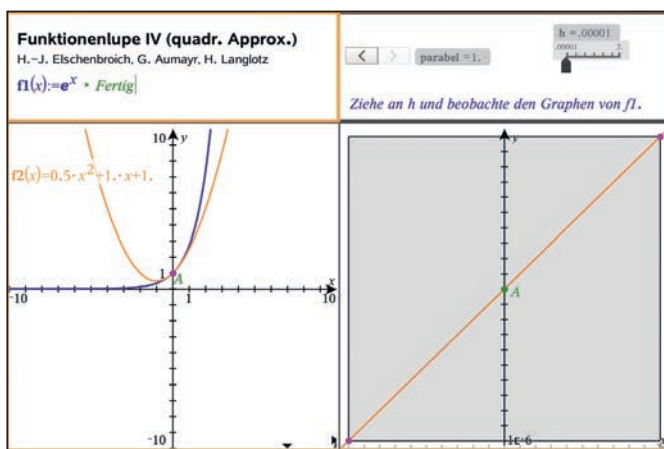


Abb. 8: Die Funktionenlupe IV mit $h = 0.00001$.

Zum Schluss

Die Funktionenlupe ist eine Lernumgebung mit TI-Nspire™. Sie läuft gleichermaßen auf PC, Mac und iPad. Für die Handhelds ist sie geringfügig angepasst worden, um dem kleineren Display Rechnung zu tragen. Alle Versionen für verschiedene Hardware-Plattformen können beliebig parallel im Unterricht genutzt werden.

In der hier vorgestellten Version ist die Funktionenlupe eine ‚Rundum-Sorglos-Lösung‘, die als Bedienkompetenz nur das Ziehen an Schieberegler oder Punkten erfordert und sich ansonsten auf die mathematische Deutung der dynamischen Visualisierung konzentriert. Natürlich kann die Funktionenlupe in jeder Variante auch partiell zurückgebaut werden, damit die Schüler dann selber Geraden, Kreise, Ortslinien und Parabeln konstruieren. Das erfordert dann eine erhöhte Bedienkompetenz und auch einen erhöhten Zeitbedarf. Dies kann z.B. mit der Basisversion der Funktionenlupe geschehen. Wer konsequent mit dem leeren Bildschirm starten will, findet im Kasten auch eine kurze Anleitung zur Erstellung der Basisversion (die etwas Routine im Umgang mit TI-Nspire™ voraussetzt).

Die leichte Bedienbarkeit der Funktionenlupe und der intuitive grafische Zugang zu Grundvorstellungen der Differentialrechnung sollen aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass es mit Steigung, Ableitung und Krümmung um anspruchsvolle Begrifflichkeiten geht, die einer mathematischen Durchdringung und Vertiefung bedürfen!

Autor:
Hans-Jürgen Elschenbroich (D)

Die Funktionenlupe mit TI-Nspire™ – selbst gemacht

- (1) Als Seitenlayout werden vier Fenster angelegt, die unteren sollen quadratisch sein.
- (2) In den beiden unteren Fenstern und in das obere rechte wird die Applikation Graphs eingefügt, oben aber ohne Achsen. In das obere linke Notes.
- (3) Oben links wird der gewünschte Funktionsterm für $f1$ eingegeben und in den beiden unteren Fenstern aktiviert, also geplottet.
- (4) Links wird mit dem Geometry-Tool ein Punkt A auf dem Graphen von $f1$ konstruiert. Die Koordinaten werden als Variable xa und ya gespeichert.
- (5) Rechts wird ebenfalls ein Punkt auf dem Graphen von $f1$ konstruiert. Seine x -Koordinate wird mit der Variablen xa verknüpft. Damit kann in beiden Fenstern der Punkt A auf dem Graphen von $f1$ gezogen werden.
- (6) Im oberen rechten Fenster wird ein Schieberegler h erzeugt, der zwischen 0.00001 und 2 mit der Schrittweite 0.00001 variiert.
- (7) Es werden vier Variable $xlinks:=xa-h$, $xrechts:=xa+h$, $yunten:=ya-h$ und $yoben:=ya+h$ erzeugt. Dann werden vier Punkte konstruiert und so mit den Variablen verknüpft, dass man $Q1=(xlinks,yunten)$, $Q2=(xrechts,yoben)$, $Q3=(xrechts,yoben)$ und $Q4=(xlinks,yoben)$ erhält. Diese werden zu einem Polygon verbunden. Das ist das dynamische Quadrat um A .
- (8) Im rechten Fenster klickt man auf die Achsenendwerte und verknüpft sie mit diesen Variablen. Damit erhält man rechts das vergrößerte Lupenquadrat.
- (9) In beiden Fenstern werden noch je zwei Punkte auf dem Graphen konstruiert und in der x -Koordinate mit $xlinks$ bzw. $xrechts$ verknüpft. Damit erhält man die Punkte A_l und A_r , die man zusammen mit A für die Konstruktion von Sekanten und dem Kreis benötigt.

Kasten 1: ‚Bauanleitung‘ für die Funktionenlupe mit TI-Nspire™

Literatur/Hinweise

Dieser Beitrag ist eine Überarbeitung des Artikels *H.-J. Elschenbroich: Anschauliche Differentialrechnung mit der Funktionenlupe* aus MNU 5/2015. Die Übernahme von Textpassagen ist nicht durch Anführungszeichen kenntlich gemacht. Zusätzliche tns-files zum Download: www.ti-unterrichtsmaterialien.de

Die Funktionenlupe I bis IV gibt es in einer Version für PC/Mac/iPad und in einer Version für Handhelds.

Download: www.funktionenlupe.de

- (1) Elschenbroich, Hans-Jürgen & Seebach, Günter & Schmidt, Reinhard (2014): Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: *mathematik lehren* 187 (S. 34–37).
- (2) Elschenbroich, Hans-Jürgen (2014): Ein kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Analysis. In: Roth & Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 337–340).
- (3) Kirsch, Arnold (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: *Der Mathematikunterricht, Heft 3* (S. 25–41).



Hat man mit dem Programm DERIVE geometrische Abbildungen mit Matrizen im Unterricht behandelt, so verfügt die Lerngruppe am Ende des Kurses immer über eine kleine Galerie mit schönen Bildern, wie das abgebildete eines ist. Mit Derive kann man einen Polygonzug, gesammelt in einer zwei-spaltigen Matrix, bequem grafisch umsetzen und sogar mit einer Matrix zu einem Vektor bearbeiten und mit ihm dann direkt solch eine Grafik erstellen. Mit einem Bildbearbeitungsprogramm füllen die SchülerInnen dann Flächen farbig.

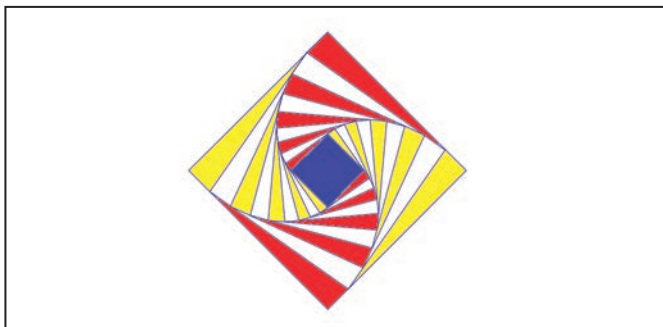


Abb. 1

Diese Möglichkeit gibt es so mit TI-Nspire™ CX CAS nicht so einfach. J. Böhm hat die Idee mit einem LUA-Programm umgesetzt, aber das setzt Kenntnisse der Programmiersprache zur Erstellung des Skripts voraus. Mit geringeren Programmierkenntnissen lässt sich das Problem mit einer Prozedur lösen.

Die Polarkoordinatendarstellung eines Punktes

$P(r \cdot \cos(a) | r \cdot \sin(a))$ bildet die Grundlage. Auf einer Notes-Seite werden die Anzahl n der Punkte eines regelmäßigen Vielecks, ebenso der Radius r sowie der Drehwinkel dw und die Anzahl der Drehungen dz festgelegt (Abb. 2, 3).

Für die Prozedur wird damit dann der Mittelpunktswinkel mw der Figur sowie der Verkleinerungsfaktor f ausgerechnet. Die Herleitung des Faktors f ist eine schöne Anwendung des Sinus-Satzes.

Die Formel für die Winkelsumme im n -Eck ist $ws = \pi \cdot (n - 2)$,

der Winkel α in der Figur ist dann $\alpha = \frac{ws}{2n} = \frac{\pi \cdot (n-2)}{2n}$. Jetzt ergibt der Sinus-Satz für das Dreieck MPP* die folgende Gleichung, die in eine übersichtlichere Kosinus-Form vereinfacht wird.

$$f = \frac{r^*}{r} = \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot (n-2)}{2n}\right)}{\sin\left(\pi - dw - \left(\frac{\pi \cdot (n-2)}{2n}\right)\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} - dw\right)}$$

Diese Formel gilt allgemein für n und dw .

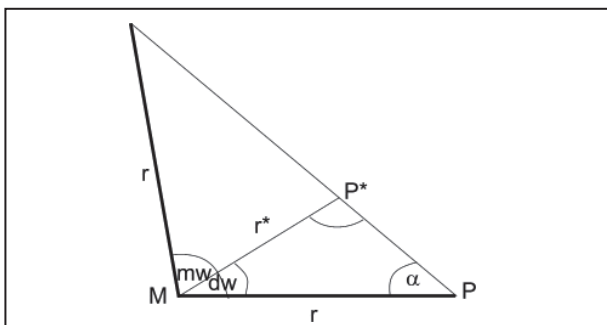


Abb. 2

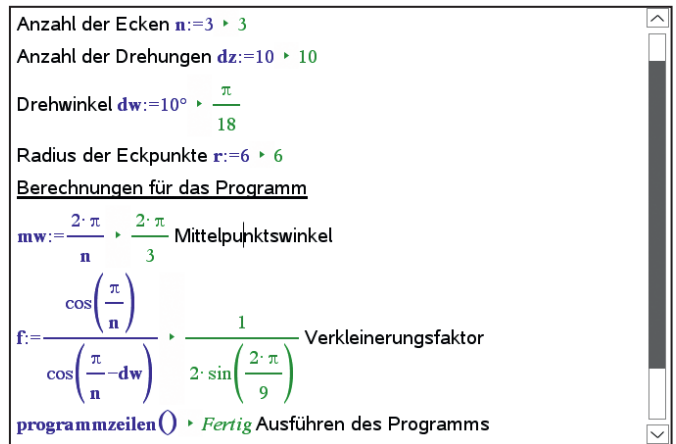


Abb. 3

Das Programm selbst erstellt im ersten Durchlauf der I-Schleife das regelmäßige Vieleck und speichert die Koordinaten der Punkte an den Anfang der xw - und der yw -Liste. Bei jeder Drehung werden die weiteren Koordinaten in die beiden Listen geschrieben (Abb. 4). Umgesetzt werden die Listen dann als Streudiagramm auf einer Grafik-Seite. Die Attribute (Punkte verbinden/Farbe etc.) müssen nur noch eingestellt werden.

Das Bild wird exportiert und mit einem Grafikprogramm „aufgehübscht“.

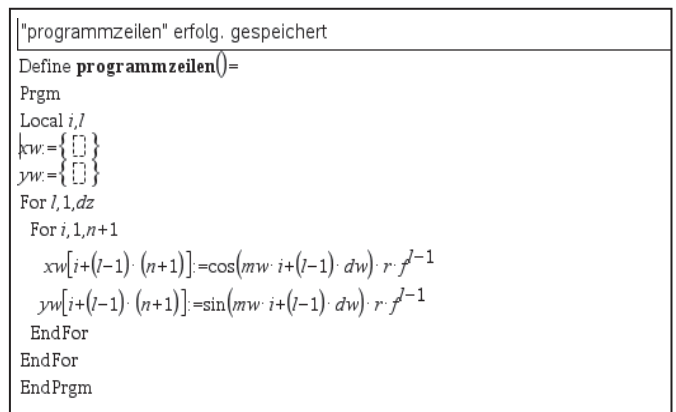


Abb. 4

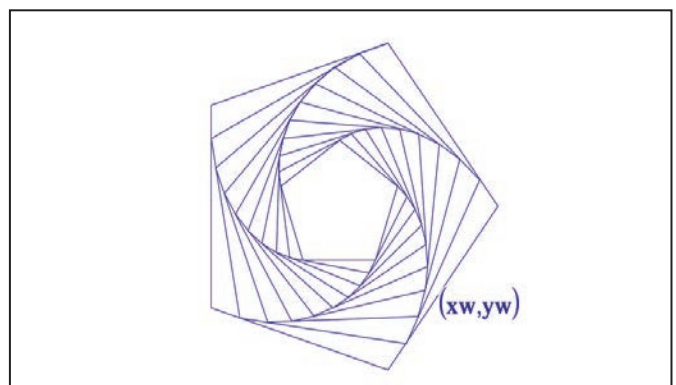


Abb. 5

Die sum-Funktion – ein starkes Werkzeug des TI-30X Plus Multiview™



Heinz Klaus Strick

In den Abiturprüfungen einzelner Bundesländer, wie beispielsweise Bayern und demnächst voraussichtlich auch Baden-Württemberg, sind Taschenrechner nicht zugelassen, die über die Optionen des numerischen Differenzierens bzw. numerischen Integrierens verfügen.

Verwenden der sum-Funktion im Rahmen der Integralrechnung

Auch wenn – vorschriftsgemäß – der neue TI-Schulrechner TI-30X Plus Multiview™ diese (und andere „verbotene“) Optionen nicht enthält, lässt sich das numerische Integrieren dennoch mithilfe der **sum-Funktion** in befriedigender Weise realisieren. Dies ist keine Umgehung der Vorschriften, sondern eine zulässige Rückführung auf die Definition der Integrierbarkeit einer Funktion.

In der Sammlung von Arbeitsblättern für den TI-30X Plus Multiview™ sind verschiedene Beispielaufgaben zur Integralrechnung enthalten. Zur Einführung werden wie üblich **Unter- und Obersummen für die Normalparabel** betrachtet.

Beispiel-Aufgabe zur Einführung der Integralrechnung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Die Maßzahl der Fläche des Flächenstücks zwischen Graph und x -Achse soll für das Intervall $[0; 1]$ bestimmt werden.

Dazu betrachtet man Rechtecke mit der Breite Δx , deren Höhe bestimmt wird durch den Funktionswert von f am rechten Eckpunkt des jeweiligen Teilintervalls, und bestimmt deren Gesamtgröße.

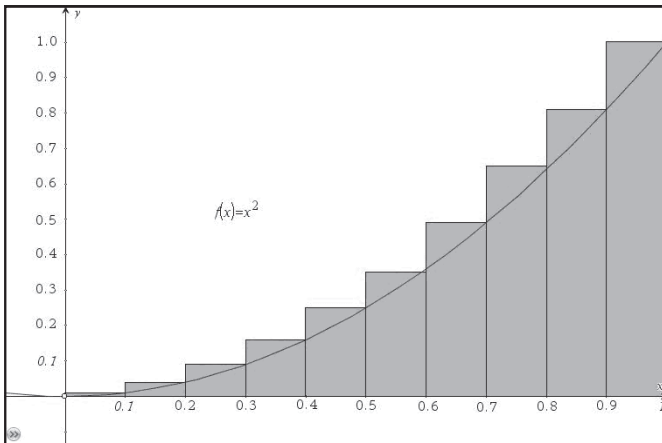


Abb. 1

Erläuterung der Lösung

Die Gesamtfläche der Treppenfigur (Obersumme O_n) ergibt sich wie folgt:

$$O_n = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(x_k) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

wobei die $f(x_k)$ die Funktionswerte am rechten Eckpunkt des Intervalls sind. Im Beispiel (vgl. Abb.) sind dies $0,1^2; 0,2^2; \dots; 1^2$, also $1^2 \cdot 0,1^2; 2^2 \cdot 0,1^2; \dots; 10^2 \cdot 0,1^2$ und $\Delta x = 1/10 = 0,1$. Daher gilt hier:

$$O_{10} = 0,1 \cdot 0,1^2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2 = 0,1^3 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2$$

Die Summe der Quadratzahlen bestimmen wir mithilfe der Summen-Funktion des ∇ -Menüs: Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für k (auf dem Rechner heißen alle Variablen x) am Summenzeichen \sum sowie den Funktionsterm von $f(x)$ (hier: x^2) ein, vgl. 1. und 2. Screenshot. Als Gesamtfläche erhält man hier: $O_{10} = 77/200 = 0,385$

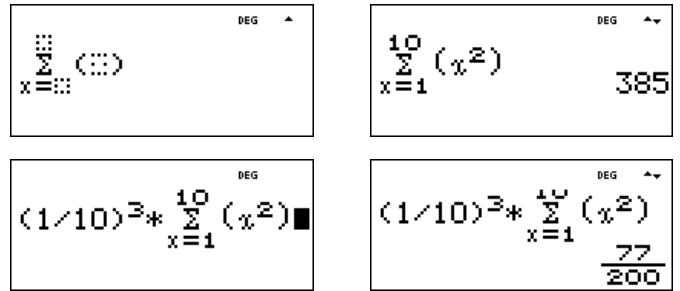


Abb. 2: Screenshots

In den nächsten Schritten des Übungsblatts wird die Ausschöpfung des Flächenstücks durch die Verfeinerung der Unterteilung verbessert.

Andere Arbeitsblätter enthalten die **Untersuchung beliebiger Flächenstücke** zwischen Graph und x -Achse. Hier werden die Flächenstücke mithilfe von Trapezen ausgeschöpft bzw. überdeckt. (Auf Intervallen, auf denen der Graph rechtsgekrümmt ist und oberhalb der x -Achse verläuft, haben die Trapeze einen kleineren Flächeninhalt als das zugehörige Flächenstück unter dem Graphen der betrachteten Funktion; bei linksgekrümmten Graphen sind die Trapeze größer als das zugehörige Flächenstück unter dem Graphen. Für Flächenstücke unterhalb der x -Achse ist dies umgekehrt.)

Beispiel-Aufgabe mit ganzzahligen Nullstellen

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x -Achse eingeschlossen werden, soll näherungsweise bestimmt werden.

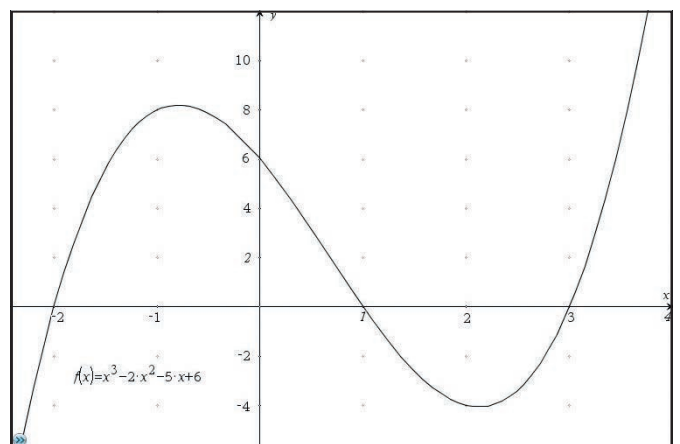


Abb. 3



Erläuterung der Lösung

Mithilfe der Wertetabelle der Funktion (☞) findet man die drei ganzzahligen Nullstellen -2; +1 und +3.

Das erste Flächenstück liegt oberhalb der x-Achse und erstreckt sich über ein Intervall der Breite 3, das zweite liegt unterhalb der x-Achse und erstreckt sich über ein Intervall der Breite 2.

Näherungsweise können die Flächenstücke durch Trapeze ausgeschöpft bzw. überdeckt werden. Wählt man als Breite der Trapeze 0,01, dann werden beim links liegenden Flächenstück 300 Trapeze betrachtet, beim rechts liegenden 200. Die schrägen Seiten der Trapeze bilden einen Streckenzug längs des Graphen.

Der Flächeninhalt eines Trapezes mit linker Ecke a:

$$\frac{1}{2} \cdot [f(a) + f(a + 0,01)] \cdot 0,01 = (\text{Mittelwert der Funktionswerte}$$

an der Stelle a und an der Stelle a+0,01) \cdot \text{Breite}

Für $x = -2$ ergibt sich für die Summe der Flächeninhalte der 300 Trapeze \approx Flächeninhalt des Flächenstücks links:

$$\sum_{k=0}^{299} 0,005 \cdot (f(-2 + 0,01k) + f(-2 + 0,01k + 0,01)) \approx 15,75FE$$

Für $x = +1$ ergibt sich für die Summe der Flächeninhalte der 200 Trapeze \approx Flächeninhalt des Flächenstücks rechts:

$$(-1) \cdot \sum_{k=0}^{199} 0,005 \cdot (f(1 + 0,01k) + f(1 + 0,01k + 0,01)) \approx 5,33FE$$

Da der Graph im Intervall rechts unterhalb der x-Achse verläuft, muss der Term mit (-1) multipliziert werden.

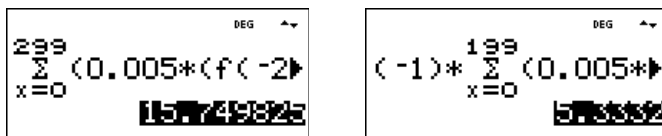


Abb. 4

Dass die Anzahl der Summanden halbiert werden kann, indem man überlegt, dass in aufeinanderfolgenden Intervallen gleiche Summanden auftreten, sollte anschließend im Unterricht thematisiert werden, um die Rechenzeit – die schon einige Minuten beträgt – zu verkürzen.

Interessant ist auch die Untersuchung von Flächenstücken, die „ins Unendliche“ reichen:

Beispiel-Aufgabe eines uneigentlichen Integrals

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}$$

Untersuchen Sie das Flächenstück, das rechts von der Nullstelle bei $x = 4$ von Graph und x-Achse eingeschlossen wird.

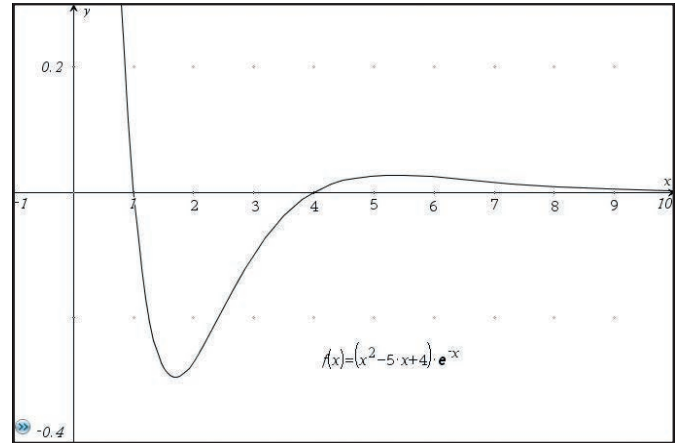


Abb. 5

Erläuterung der Lösung

Für das rechts liegende Flächenstück, das bis ins Unendliche reicht, werden zunächst 1000 Trapeze der Breite 0,01 für das Intervall [4; 14] betrachtet:

$$\sum_{k=0}^{999} 0,005 \cdot (f(4 + 0,01k) + f(4 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,09145$$

dann jeweils 1000 Trapeze für das Intervall [14 ; 24] bzw. [24 ; 34]:

$$\sum_{k=0}^{999} 0,005 \cdot (f(14 + 0,01k) + f(14 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,00013$$

$$\sum_{k=0}^{999} 0,005 \cdot (f(24 + 0,01k) + f(24 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,0000019$$

Da der letzte Zuwachs minimal ist, kann man abschätzen, dass der Graph so dicht an der x-Achse liegt, dass das Flächenstück für den Gesamt-Flächeninhalt keine Rolle spielt, d.h., das Flächenstück mit unendlich großem Umfang hat einen endlich großen Flächeninhalt von ca. 0,0916 FE.

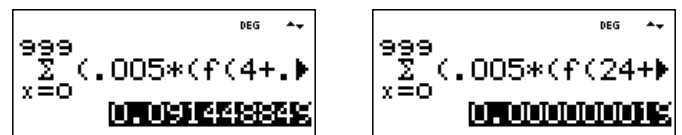


Abb. 6

Verwenden der sum-Funktion im Rahmen der Stochastik

Eine andere wichtige Anwendung der sum-Funktion findet man im Zusammenhang mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten. Vorteil dieser Art der Berechnung ist, dass man eine typische Fehlerquelle bei Intervall-Wahrscheinlichkeiten umgeht:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$$

und auch auf die Anwendung der Komplementärregel verzichten kann: $P(X > c) = 1 - P(X \leq c)$.

Beispiel-Aufgabe zu kumulierten Wahrscheinlichkeiten

Ein Würfel wird 300-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Sechsen

- (1) größer als 50
- (2) mindestens gleich 45
- (3) mindestens gleich 50, höchstens gleich 60
- (4) größer als 47, aber kleiner als 53
- (5) höchstens gleich 48
- (6) kleiner als 55?

Erläuterung der Lösung

Da der größte auftretende Binomialkoeffizient der Wahrscheinlichkeitsverteilung für $n = 300$ gleich

$$\binom{300}{150} \approx 9,4 \cdot 10^{88} \text{ ist, also noch auf dem Rechner darstellbar,}$$

kann man – wenn auch mit größerem Zeitaufwand – die Intervall-Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Summenfunktion gemäß Bernoulli-Formel berechnen:

$$P(X = k) = \binom{300}{k} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}^{300-k}$$

- (1) $P(X > 50) = P(51 \leq X \leq 300) \approx 0,462$
- (2) $P(X \geq 45) = P(45 \leq X \leq 300) \approx 0,802$
- (3) $P(50 \leq X \leq 60) \approx 0,469$
- (4) $P(47 < X < 53) = P(48 \leq X \leq 52) \approx 0,301$
- (5) $P(X \leq 48) = P(0 \leq X \leq 48) \approx 0,415$
- (6) $P(X < 55) = P(0 \leq X \leq 54) \approx 0,760$

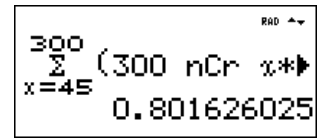
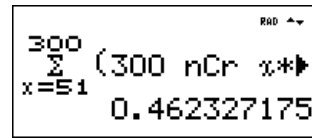


Abb. 7: Beispielrechnungen

Ein weiteres Anwendungsfeld ergibt sich im Zusammenhang mit dem Nachweis der Formeln für den Erwartungswert und die Standardabweichung von binomialverteilten Zufallsgrößen. Hier müssen gemäß Definition Summen über alle Werte gebildet werden, die eine Zufallsgröße annehmen können:

Beispielaufgabe zur Bestimmung von Erwartungswert und Varianz

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilungen mit $n = 100$ und $p = 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; \dots ; 0,9$ gemäß Definition.

Erläuterung der Lösung

Gemäß Definition des Erwartungswerts $\mu = E(X)$ bzw. der Varianz $V(X) = \sigma^2$ gilt:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k)$$

$$V(X) = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$$

wobei $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Die Summenfunktion des TI-30X Plus MultiView™ bietet die Möglichkeit, auch Summen mit vielen Summanden zu berechnen. Wählt man Option 5 im ▼-Menü, dann erscheint das Summensymbol \sum ; im Zusammenhang mit den Listenformeln (die in eine Zeile passen müssen) muss eine bestimmte Reihenfolge der Eingabe (Komma als Trennzeichen) beachtet werden:

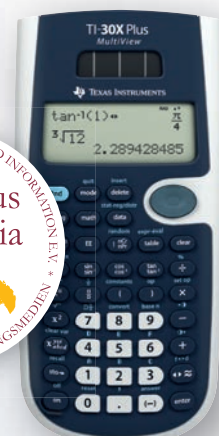
Sum(Term mit der Variablen x, Variablenname x, kleinster Wert für x, größter Wert für x)

TI-30X Plus MultiView™

Alles auf einen Blick!

- » Ausgezeichneter Schulrechner für Sek I/II.
- » Einfache Bedienung, volle Funktionalität.
- » Emulator Software. Kostenlose Test-Version!
- » Unterrichtsmaterialien zum Download oder Bestellen.

Neu: „Arbeitsblätter für den TI-30X Plus MultiView™“ von Heinz Klaus Strick.





Zur konkreten Aufgabe: In Liste L1 (I-Menü) geben wir die gewünschten Werte für die Erfolgswahrscheinlichkeit p ein. Dann erfolgt die Eingabe der Listenformel: Drückt man ein zweites Mal auf die I-Taste, erscheint das Menü zur Bearbeitung der Listen. Wir markieren ein Feld in Liste L2; jetzt erwartet der Rechner die Eingabe einer Berechnungsvorschrift für die Liste L2. Diese lautet für E(X):

$$L2 = \text{Sum}(x * 100 nCr x * L1^x * (1 - L1)^{(100 - x)}, x, 0, 100)$$

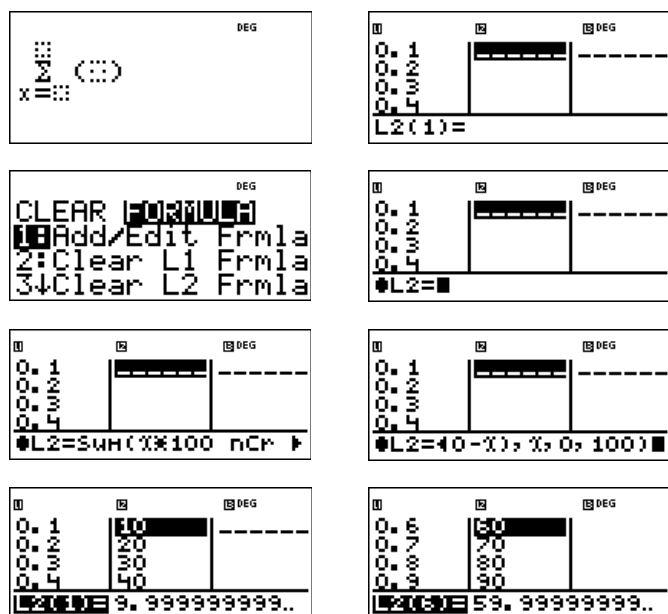


Abb. 8

Nach einiger Rechenzeit erscheinen dann die Erwartungswerte in der Spalte für Liste L2. Offensichtlich gilt: $E(X) = \mu = n \cdot p$.

Analog berechnen wir die Varianzen in Liste L3, wobei auch die gerade bestimmten Erwartungswerte aus Liste L2 verwendet werden. Auffallend an den Rechenergebnissen ist, dass die Varianzen gleich sind für p und 1 - p, und weiter, dass für alle Beispiele gilt: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

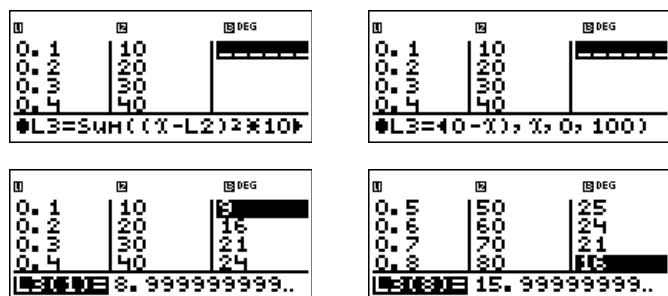


Abb. 9

Schließlich ist die Verwendung der sum-Funktion nahezu unverzichtbar im Zusammenhang mit der Entdeckung der Sigma-Regeln:

Beispielaufgabe zur Bestimmung von 95 %-Umgebungen um den Erwartungswert (sigma-Regel)

Bestimmen Sie für (1) $n = 100$ bzw. (2) $n = 200$ und die Erfolgswahrscheinlichkeiten $p = 0,3$ bzw. $p = 0,4$ bzw. $p = 0,5$ symmetrische Umgebungen um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ derart, dass diese eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 95 % haben. Berechnen Sie auch jeweils die zugehörige Standardabweichung und geben Sie den Radius der Umgebung als Vielfaches der Standardabweichung an. Welche Gesetzmäßigkeit fällt auf?

Erläuterung der Lösung

Mithilfe der Summenfunktion kann man Wahrscheinlichkeiten von symmetrischen Umgebungen um den Erwartungswert berechnen. Definiert man für ein konkretes n die Funktion f wie folgt:

$$f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

dann zeigt die Wertetabelle beispielsweise für $p = 0,4$ und $n = 100$: $f(0) = P(X = 40) \approx 0,081$; $f(1) = P(39 \leq X \leq 41) \approx 0,240$ usw.

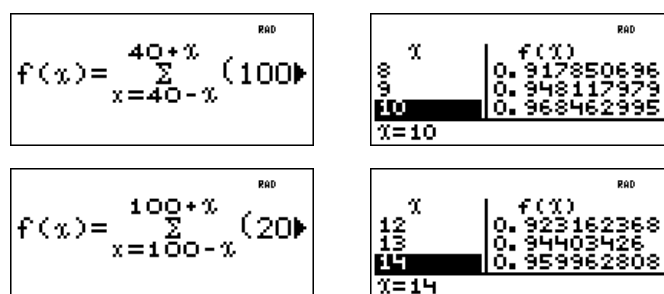


Abb. 10: Ausschnitte der Berechnungen

Beispiel: $n = 100$; $p = 0,3$; $P(21 \leq X \leq 39) \approx 0,963 \rightarrow$ Radius = 9,5 (Rechteckbreite berücksichtigen!)

	(1)			(2)		
	p=0,3	p=0,4	p=0,5	p=0,3	p=0,4	p=0,5
μ	30	40	50	60	80	100
σ	4,58	4,90	5	6,48	6,93	7,07
Radius	2,07 σ	1,94 σ	1,90 σ	1,93 σ	1,95 σ	1,91 σ

Ergebnis: Man stellt für unterschiedliches n und p fest:

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$$

Quellen:

Heinz Klaus Strick: Arbeitsblätter für den TI-30X Plus MultiView™, TI 2015

Download: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Autor
Heinz Klaus Strick (D)

Lerntypengerechte Zugänge zu einer Extremwertaufgabe mit dem TI-Nspire™ CX CAS



Anke Küddelsmann, Eric Götz

Die Bildungsstandards, die von der Kultusministerkonferenz verabschiedet wurden, fordern vom Mathematikunterricht, dass „individuelle Lernwege und Lernergebnisse [berücksichtigt] werden, damit mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht in vielfältigen kontextbezogenen Situationen angewendet werden kann.“ (Bildungsstandards, 2003, S. 8)

Bei Lehrerfortbildungen stellt sich daher immer wieder die Frage, wie man diesem Anspruch gerecht werden kann, ohne dass der Unterricht zerfasert. Dabei kann der TI-Nspire™ CX CAS helfen, da er mit einem Computer-Algebra-System (CAS), einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) sowie einem Tabellenkalkulationsprogramm mehrere digitale Mathematikwerkzeuge in sich vereint. So ist es möglich, viele verschiedene Grundvorstellungen zu einem Objekt durch verschiedene Darstellungsmöglichkeiten in die Lösung eines Problems einzubeziehen. Dadurch wird einer Fokussierung auf nur ein bekanntes Verfahren entgegengesteuert (Barzel, 2012, S. 38 ff.).

Der TI-Nspire™ CX CAS bietet damit auch eine Möglichkeit zur Binendifferenzierung, da die verschiedenen Komponenten unterschiedlichen Lerntypen entgegenkommen. Das CAS ermöglicht eine formale-symbolische Herangehensweise. Mit der DGS kann man das Problem visualisieren und eine Lösung mittels Zeichnung und Konstruktion finden. Beide können mit der Tabellenkalkulation verknüpft werden, die dann auch ein systematisches Probieren als Näherung an die Lösung unterstützt. So können je nach Lern- und Arbeitsgewohnheiten durch die verschiedenen Darstellungsformen unterschiedliche Zugänge gewählt und die Technologie kann als Erkenntnishilfe genutzt werden.

Für eine Lehrerfortbildung wurde eine Standardaufgabe auf verschiedenen Wegen mit dem TI-Nspire™ CX CAS gelöst. Dort sollte gezeigt werden, wie die verschiedenen Applikationen des TI-Nspire™ CX CAS eingesetzt werden können. In diesem Aufsatz werden diese ausgewählten Lösungswege und ihre technische Umsetzung vorgestellt. Die Lösungsideen sind angelehnt an die Darstellungen in dem Beitrag „TI-Nspire™ näher kennenlernen: eine Aufgabe – viele Wege“ von Dirk Schulz und Andreas Pallack aus der T³-Akzente-Reihe (Pallack, 2008).

Die Aufgabe

In ein rechtwinkliges Dreieck ABC soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Das Dreieck hat die folgenden Maße: $\alpha = 90^\circ$, $b = 3 \text{ cm}$ und $c = 7 \text{ cm}$.

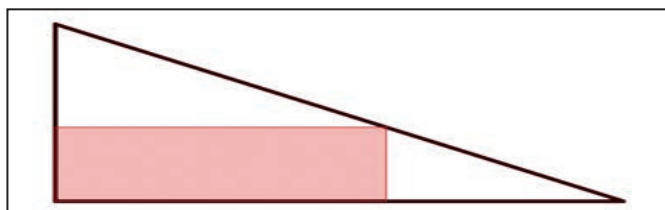


Abb. 1

Voraussetzungen

Damit die Aufgabe eine wirkliche Problemstellung darstellt, welche verschiedene Lösungswege motiviert, sollten Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen bzw. quadratische Funktionen noch nicht thematisiert worden sein. Des Weiteren wird hier davon

ausgegangen, dass der Umgang mit den verschiedenen Applikationen bereits mehrfach geübt wurde, damit sie selbstständig eingesetzt werden können.

Der geometrische Weg

Für Schüler, die eher einen visuellen Zugang bevorzugen, liegt es nahe, das Dreieck sowie mehrere mögliche Rechtecke zu zeichnen und durch Messung deren Flächeninhalte zu vergleichen. Im Geometry-Fenster kann dies zeitsparend umgesetzt werden, da durch den Zugmodus alle möglichen Rechtecke erzeugt werden können.

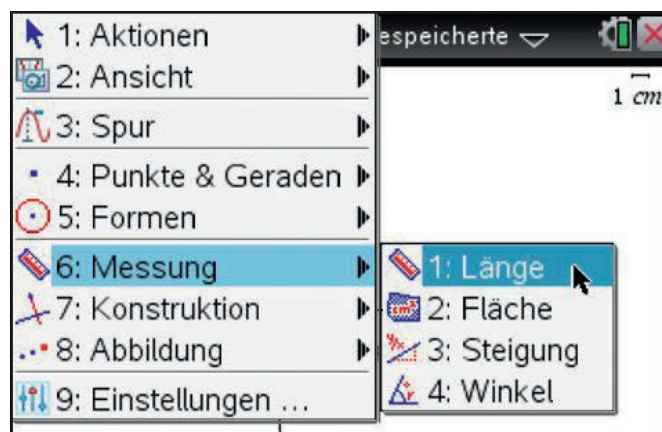


Abb. 2

Man führt im Geometry-Fenster die Konstruktion des Dreiecks durch. Dazu wählt man im Menü den Unterpunkt „Punkte & Geraden“ aus und erzeugt eine Strecke beliebiger Länge. Um die gewünschte Länge von 7 cm zu erhalten, misst man mit den Unterpunkten „Messung“ und „Länge“ den Abstand zwischen den beiden Endpunkten der Strecke. Wählt man den erhaltenen Wert an, kann man die Länge auf den gewünschten Wert, hier 7 cm, durch Texteingabe verändern. Im Anschluss konstruiert man mit dem Unterpunkt „Konstruktion“ eine Senkrechte zur Strecke c durch den Punkt A. Durch den Unterpunkt „Punkt auf“ kann der Punkt C auf dieser Senkrechten gesetzt werden, dessen Abstand vom Punkt A mit der oben beschriebenen Methode auf 3 cm festgesetzt wird. Nun wird noch eine Strecke von Punkt B nach Punkt C sowie ein Punkt D auf dieser Strecke (Unterpunkt „Punkt auf“) erzeugt.

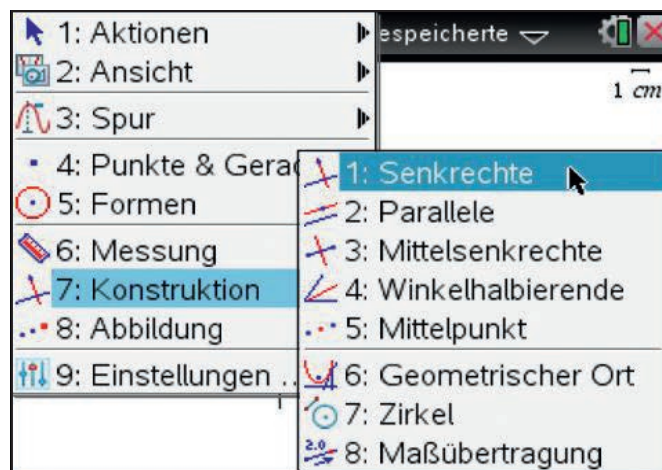


Abb. 3

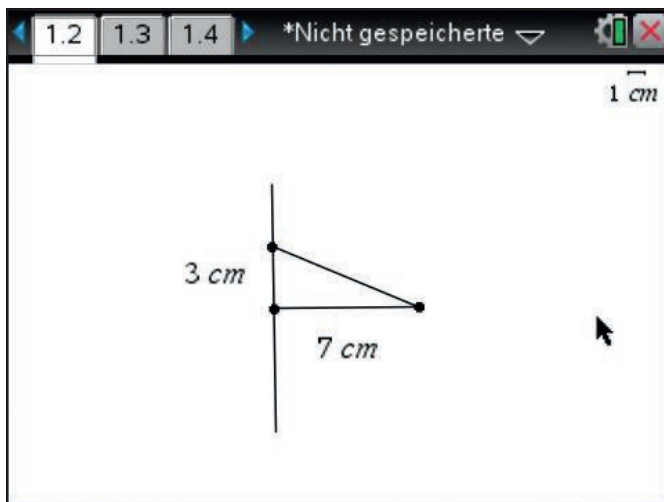


Abb. 4

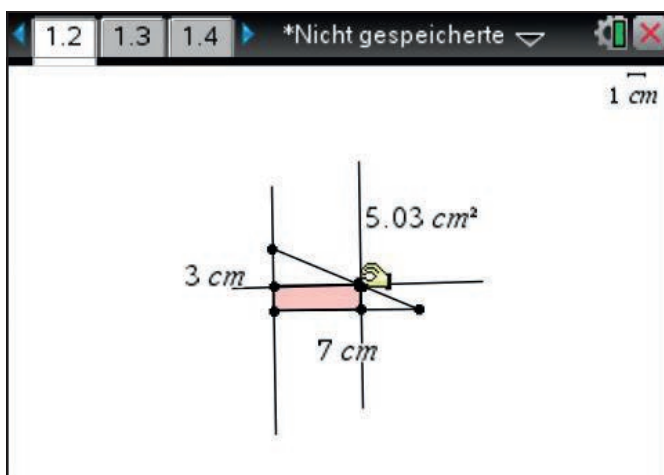


Abb. 5

Für das Rechteck wird nun jeweils eine Senkrechte durch D zu den Seiten b und c konstruiert und es werden die Schnittpunkte mit den Seiten festgelegt. Mit den Unterpunkten „Formen“ und „Polygon“ definiert man mithilfe der konstruierten Punkte das Rechteck. Zur besseren Übersicht kann das Rechteck farbig ausgefüllt und die Linienfarbe des Dreiecks festgelegt werden. Mit den Unterpunkten „Messung“ und „Fläche“ wird nun der Flächeninhalt des Rechtecks gemessen.

Zieht man jetzt an dem Punkt D, so bewegt sich dieser auf der Seite a und mit ihm verändert sich der Flächeninhalt. Man kann somit durch systematisches Probieren den größtmöglichen Flächeninhalt finden (Abb. 2 bis 5).

Der algebraische-formale Weg

Für Schüler, die eher analytisch und formal an eine solche Aufgabe herangehen, bietet das Calculator-Fenster eine Umsetzungsmöglichkeit. Überlegungen zur Veränderung der Höhe des Rechtecks in Abhängigkeit zur Länge können zu einer Funktion führen: $f(x) = 3 - \frac{3}{7}x$. Diese Funktion kann mit „:=“ definiert werden. Eine weitere Funktion „fläche(x) := x * f(x)“ berechnet den zugehörigen Flächeninhalt. Im Menü findet man unter „Analysis“ das „Funktionsmaximum“, welches den größtmöglichen Flächeninhalt liefert.



Abb. 6

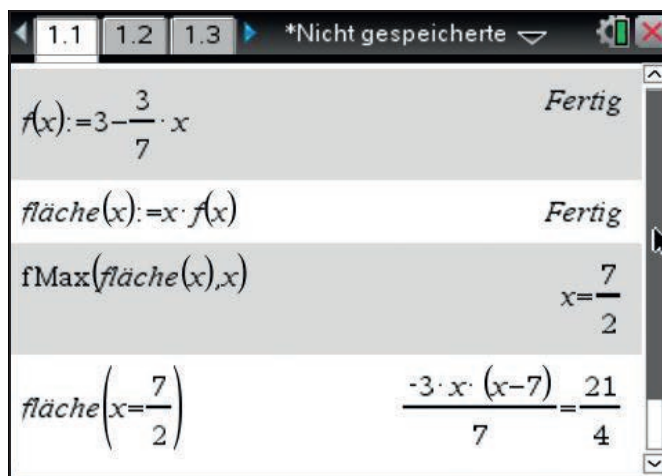


Abb. 7

Der tabellarische Weg

Die tabellarische Lösungsvariante arbeitet mit dem List & Spreadsheet-Fenster. In der zweiten Zeile einer Spalte lassen sich mit dem Befehl „Folge erzeugen“ Werte für eine Seitenlänge des Rechtecks generieren.

In den weiteren Spalten können ausgehend von den erzeugten Seitenlängen die Werte für die andere Seitenlänge und den Flächeninhalt des Rechtecks berechnet werden. Die Suche nach dem größten Flächeninhalt in Spalte C liefert nur einen Näherungswert. Eine Verfeinerung der Schrittweite in Spalte A führt zu einer größer werdenden Genauigkeit.

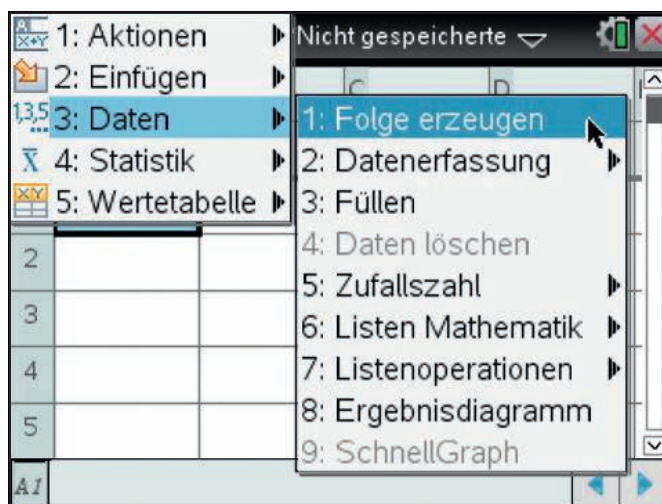


Abb. 8

Lerntypengerechte Zugänge zu einer Extremwertaufgabe mit dem TI-Nspire™ CX CAS

Anke Küddelsmann, Eric Götze

	A breite	B länge	C fläche...	D
=	=seqgen(r=3-3/7*a[=a[]*b[])			
1	0	3	0	
2	2	15/7	30/7	
3	3	12/7	36/7	
4	4	9/7	36/7	
5	5	6/7	30/7	

Abb. 9

Der grafische Weg

Dieser Weg stellt eine Mischform aus visuellem und formalem Lösungsansatz dar. Man führt einen ersten Abstraktionsschritt durch, indem man das Dreieck in einem Koordinatensystem verortet und einen Term für die Berechnung des Flächeninhaltes verwendet. Die Erzeugung des Dreiecks ist allerdings deutlich weniger aufwendig als beim geometrischen Verfahren.

Im Graphs-Fenster nutzt man im Menü die Geometry-Optionen, um den Punkt C bei (3/0) sowie den Punkt B bei (7/0) zu markieren und anschließend beide mit einer Strecke zu verbinden. Wie oben wird der Punkt D auf dieser Strecke markiert. Die Senkrechten durch D werden diesmal zu den Achsen konstruiert und die Schnittpunkte werden markiert. Auch hier werden die Länge und die Breite des Rechtecks als Abstand der Eckpunkte gemessen, die diesmal aber in der Einheit u (unit) angegeben werden.

Bei diesem Weg wird kein vollständiges Rechteck konstruiert, dessen Flächeninhalt gemessen werden kann, sondern man verwendet die Flächeninhaltsformel. Dazu erstellt man ein Textfeld, in das man die Formel hineinschreibt, hier $a \cdot b$. Wichtig ist, dass die Benennung der Größe „Fläche“ und die Formel in zwei verschiedenen Textfeldern stehen. Im Menü unter „Aktionen“ wählt man den Unterpunkt „Berechnen“ aus und klickt den Term an. Nun wird man aufgefordert, die Variablen festzulegen und klickt dafür die beiden gemessenen Längen an. Mit einem weiteren Klick kann man den berechneten Wert auf dem Bildschirm platzieren.

Durch Ziehen am Punkt D kann dann der größte Flächeninhalt gesucht werden.

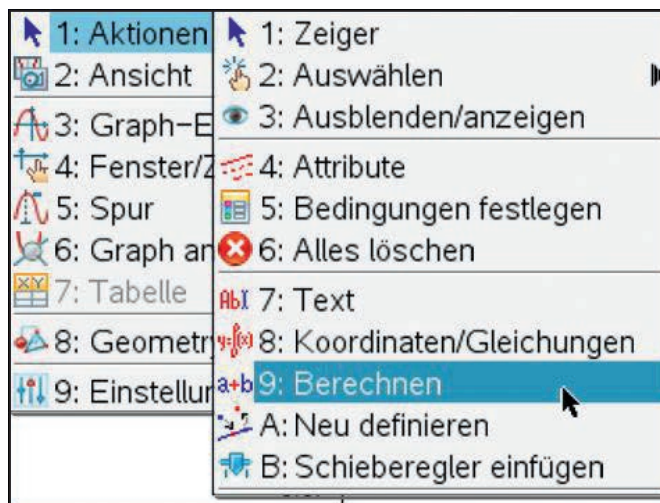


Abb. 10

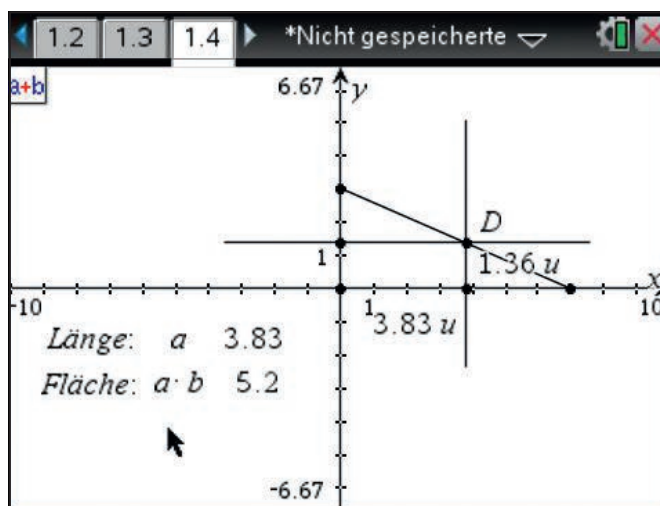


Abb. 11

Zusammenführung der Wege

Bisher wurden nur Lösungswege gezeigt, die mit einer einzigen Applikation durchgeführt werden können. Man kann aber auch mehrere miteinander verknüpfen und so die verschiedenen Lösungswege der Schüler zusammenführen.

Als Ausgangspunkt kann sowohl der geometrische als auch der grafische Lösungsweg dienen. Dort klickt man die Seitenlänge an und speichert den Wert als Variable ab. Dazu verwendet man „ctrl“ „menu“ und wählt dort „Speichern“ aus. Dann wählt man sich eine beliebige Variablenbezeichnung z.B. v aus und ersetzt damit das erscheinene „var“. Auf die gleiche Weise speichert man auch den Flächeninhalt unter einer anderen Variablen, hier w, ab.

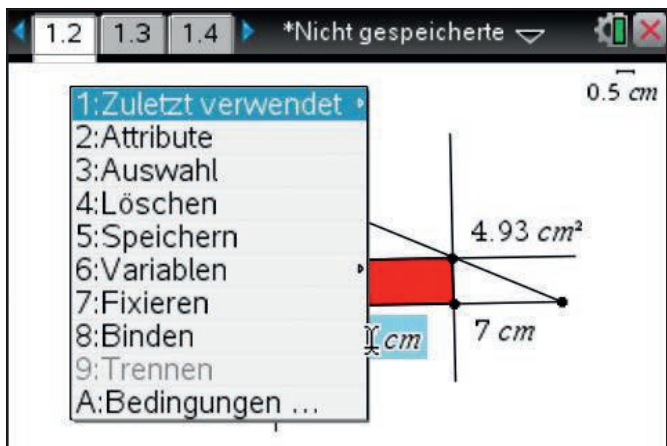


Abb. 12

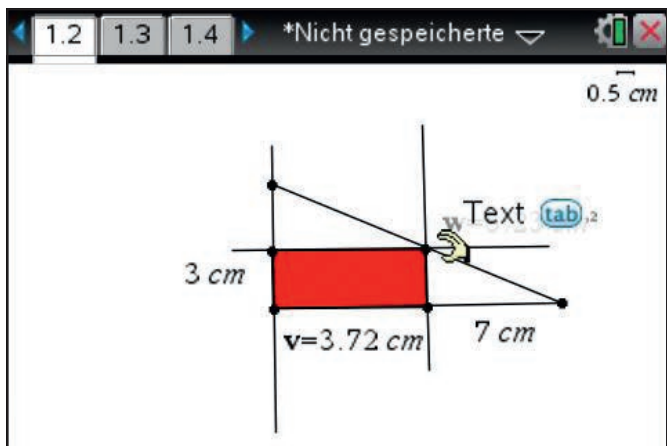


Abb. 13

In einem neuen List & Spreadsheet-Fenster können die Werte der Variablen mit dem Befehl „capture('Variable',1)“ gesammelt werden, wenn man im Geometry-Fenster Veränderungen vornimmt. Gibt man statt der 1 eine 0 ein, werden nur die Werte in die Tabelle übernommen, bei denen der Cursor anhält.

	A seitenlänge	B flaeche	C	D
=	=capture('v',1)	=capture('w',1)		
1	3.72435	5.22843		
2	3.46873	5.24958		
3	3.45131	5.24898		
4	3.39105	5.24491		
5	3.34821	5.24013		

Abb. 14

Die Daten können in einem weiteren Graphs-Fenster als Streudiagramm dargestellt werden. Sollte den Schülern bereits bekannt sein, dass eine Parabel auf einen quadratischen Zusammenhang schlie-

ßen lässt, kann dort ausgehend von $g(x) = x^2$ eine Anpassung an den Graphen erfolgen, indem man den Graphen von g durch Ziehen verändert. Dabei erhält man den Term einer quadratischen Funktion, welchen man mit dem Funktionsterm aus dem algebraischen Lösungsweg vergleichen und hinsichtlich des Funktionsmaximums analysieren kann.

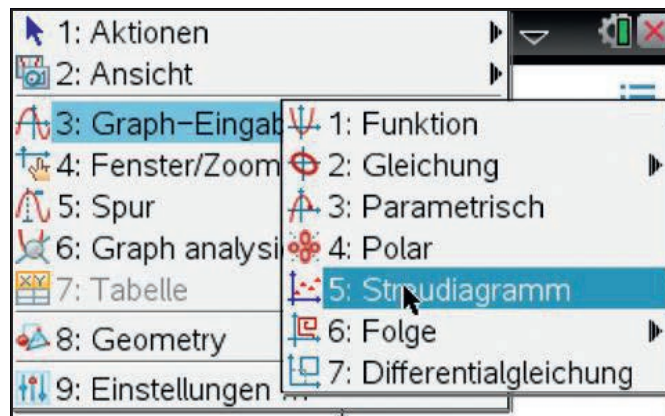


Abb. 15

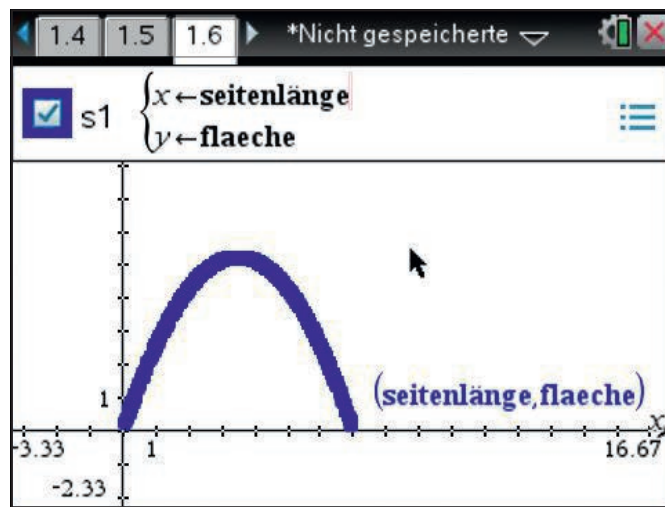


Abb. 16

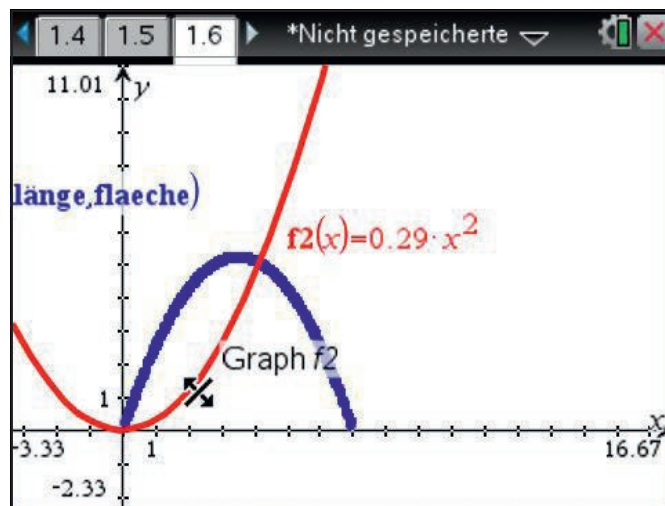


Abb. 17

Lerntypengerechte Zugänge zu einer Extremwertaufgabe mit dem TI-Nspire™ CX CAS

Anke Küddelsmann, Eric Götze

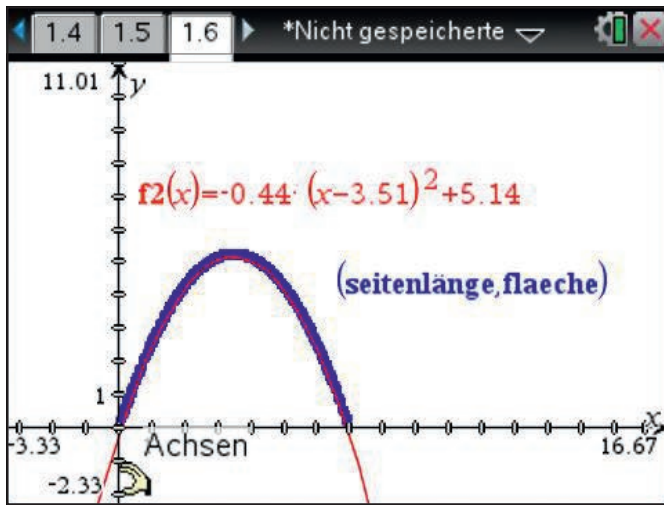


Abb. 18

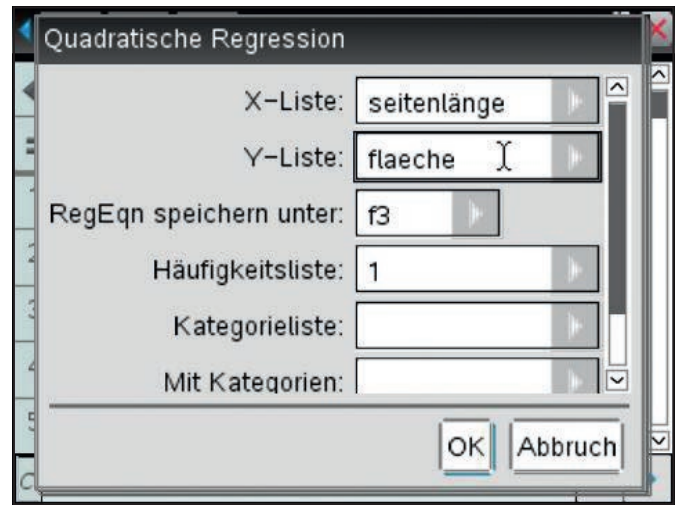


Abb. 20

Alternativ kann man den Funktionsterm auch durch eine quadratische Regression erhalten. Dazu wählt man im Calculator- oder im Lists & Spreadsheet-Fenster im Menü unter Statistik die Unterpunkte „Statistische Berechnungen“ und „Quadratische Regression“ aus. Dort gibt man die Bezeichnungen der Spalten ein, in denen die Länge und der Flächeninhalt abgespeichert sind. Man wählt einen Funktionsnamen aus, unter dem die Gleichung abgespeichert werden soll, und gibt ihn bei „RegEqn speichern unter“ ein. Da keine Häufigkeitsliste aufgenommen wurde, bleibt die Voreinstellung 1 hier erhalten.

Im Graphs-Fenster kann man mit „ctrl“, „G“ die Eingabe-Maske für Funktionen öffnen und dort f3 mit einem Haken markieren, so dass der Graph der Regressionsfunktion gezeichnet wird. Im Menü kann man dann unter „Graph analysieren“ den Unterpunkt „Maximum“ auswählen und, wie vom GTR gewohnt, den Hochpunkt bestimmen, indem man eine untere und eine obere Grenze festlegt, zwischen denen das Funktionsmaximum ermittelt werden soll.

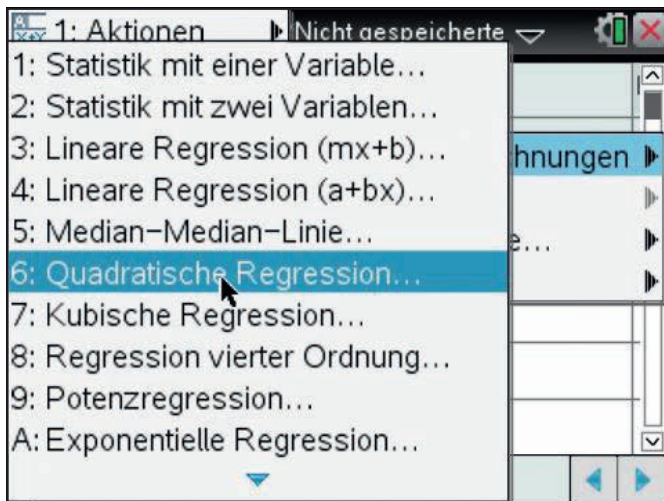


Abb. 19

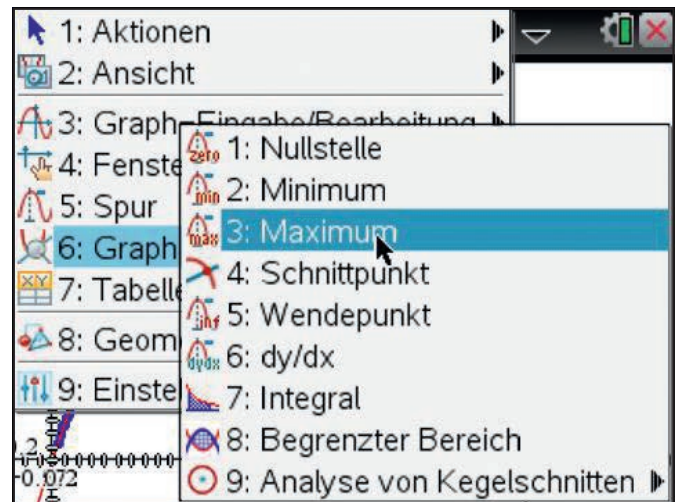


Abb. 21

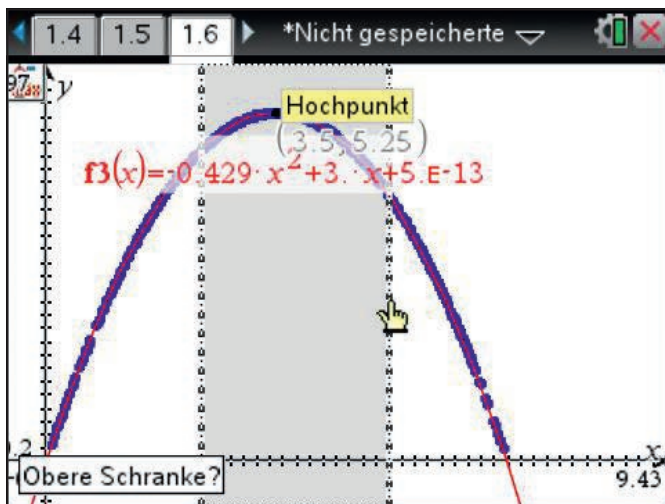


Abb. 22

Insbesondere die zuletzt dargestellte Möglichkeit der Zusammenführung der Wege kann im Unterricht als verbindendes Element verwendet werden, um den Schülern und Schülerinnen zu verdeutlichen, dass all diese Wege zum Ziel führen. Die verschiedenen Schülerlösungen können gewürdigt und ohne viel Aufwand von den Mitschülern nachvollzogen werden, da alle bereits einen Teil des Weges selbst durchgeführt haben.

Auf diese Weise ist eine breite Beteiligung an der Lösung des Problems möglich, da sowohl unterschiedliche Lerntypen berücksichtigt werden als auch Fallstricke wie unzureichende algebraische oder geometrische Kenntnisse umgangen werden können. So können auch schwächere Schüler und Schülerinnen zu einem Erfolg gelangen und sich auf der Basis dieser ersten Erkenntnis vertiefend mit den anderen Lösungswegen beschäftigen.

Literatur

- (1) Barzel, B.: Computeralgebra im Mathematikunterricht – Ein Mehrwert – aber wann?, Waxmann Verlag, 2012
- (2) Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss, KMK, 2003
- (3) Pallack, A., Schulz, D.: TI-Nspire™ näher kennenlernen: eine Aufgabe – viele Wege in: Barzel, B., Pallack, A. (Hrsg): T³-Akzente... aller Anfang ist leicht. Aufgaben mit TI-Nspire™/TI-Nspire™-CAS, Verlag der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, 2008

» **Autor:**
Anke Küddelsmann (D), Eric Götze (D)

TI Materialdatenbank

Unterrichtsmaterialien für Mathematik
und Naturwissenschaften

Nützliche Aufgabenbeispiele, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank. Allein zur TI-Nspire™ Technologie gibt es aktuell Hunderte Einträge:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Bestellen Sie gedruckte Hefte von TI und T³ – bspw. das 3. Heft aus der T³ Akzente-Reihe „Differenzialrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten“ – im Webshop:

www.ti-activities-shop.net





In diesem Beitrag werden einige Möglichkeiten beschrieben, mit der TI-Nspire™ Technologie Darstellungen von Kreisen und Kugeln anzufertigen sowie Berechnungen auszuführen. Beispielhaft werden Darstellungen von Kreisen auf der Erdoberfläche behandelt. Dabei wird näherungsweise für die Erdoberfläche Kugelgestalt angenommen. Als Radius wird der Erdradius mit 6370 Kilometern gewählt. Damit ergeben sich in den Berechnungen näherungsweise Entfernungen auf der Erdoberfläche.

Inhalt

Abschnitt 1: Ausgehend von der parametrischen Kreisdarstellung werden die Äquatorlinie und der Nullmeridian grafisch dargestellt. Darauf aufbauend wird eine Parameterdarstellung für einen Punkt der Kugeloberfläche entwickelt, die auf der geografischen Länge und Breite beruht. Damit ergibt sich eine parametrische Darstellung der Oberfläche der Kugel, wenn für die Parameter geeignete Intervalle gewählt werden.

Abschnitt 2: Mit der Formel für einen Punkt der Oberfläche wird eine Darstellung von Breiten- und Längenkreisen (Meridianen) eingegeben. Gesteuert wird durch Schieberegler.

Die Abschnitte 1 und 2 wurden bereits in der letzten Ausgabe der TI Nachrichten (Ausgabe 1/15) abgedruckt, hier folgen die Abschnitte 3, 4 und 5:

Abschnitt 3: Es wird eine Formel zur Berechnung der kürzesten Entfernung von zwei Orten auf der Oberfläche hergeleitet.

Abschnitt 4, 5: Darstellungen für Orte auf der Kugeloberfläche werden entwickelt. Ein Großkreis durch zwei Punkte der Oberfläche (und den Kugelmittelpunkt) wird berechnet und in Parameterform dargestellt.

Anregungen für die Verwendung von TI-Nspire™

Verwendung der fertigen .tns-Datei: Zu diesem Artikel liegt in der TI Materialdatenbank die Datei Geo_Kreise.tns zum Download bereit. Die geografische Länge und die Breite können im Fenster 1.2 mit Schieberegler verändert werden. Die dazugehörigen Breiten- und Längenkreise werden ausschließlich in diesem Fenster dargestellt. Im Fenster 1.3 können die geografische Länge und Breite von zwei Orten eingegeben werden. Alle weiteren Berechnungen und Darstellungen werden automatisch ausgeführt. Es sind keine weiteren Eingaben vorgesehen. Bei Verwendung der .tns-Datei als fertige Datei sollte zumindest die Herleitung der Formel für einen Punkt der Oberfläche im ersten Abschnitt behandelt werden sowie die Berechnung der Entfernung von zwei Punkten der Oberfläche im dritten Abschnitt. Damit können diverse Aufgaben gelöst werden (z.B. die Entfernung des Heimatortes zum Äquator, die Entfernung zum Pol, die Darstellung von Kreisen allgemein in 3-D u.Ä.).

Eigene Erstellung der Datei: Wer sich mehr mit Problemen der Darstellung als immer wichtiger werdendem mathematischen Inhalt beschäftigen will, kann sich damit in den Abschnitten zwei und vier auseinandersetzen. Je nach Aufgabenstellung können die Darstellungen selbst angefertigt oder gemeinsam entwickelt werden. Der Abschnitt fünf ist als Ergänzung gedacht, wenn noch die Erweiterung der Kreisgleichung in einer allgemeineren Lage beabsichtigt ist.

3) Entfernung von zwei Punkten auf der Erdoberfläche

Die Entfernung zweier Punkte A und B auf der Kugel soll ermittelt werden. Dazu soll zunächst eine Formel hergeleitet werden, um damit konkrete Entfernungen zu berechnen. Die Punkte sind durch ihre geografische Länge und geografische Breite angegeben.

Punkt A: Länge **gla**, Breite **gba**

Punkt B: Länge **glb**, Breite **gbb**

Zu beachten ist: Die Eingaben von A und B erfolgen im Fenster 1.3. Alle Berechnungen und Darstellungen in den folgenden Fenstern beruhen auf diesen Daten. Keine weiteren Eingaben sind in der fertigen .tns-Datei vorgesehen.

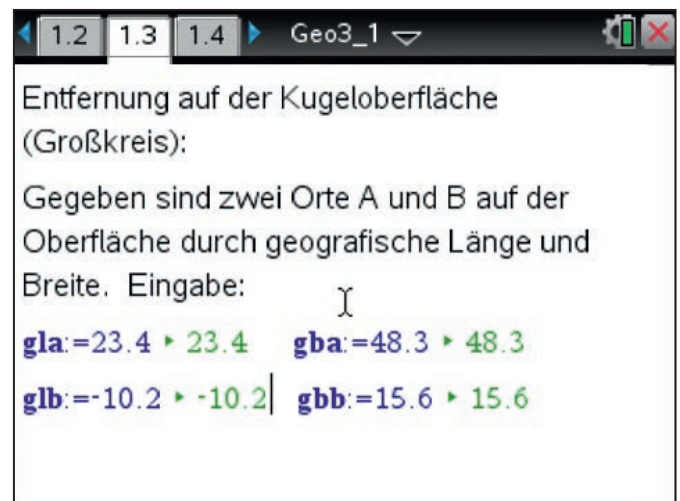


Abb. 13

Mit der Formel für einen Punkt auf der Kugeloberfläche werden die Koordinaten der Punkte A und B berechnet.

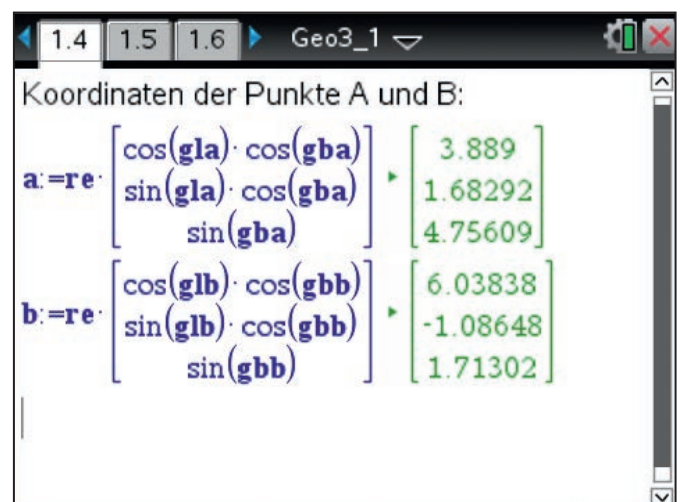


Abb. 14

Mit der Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren wird der Winkel zwischen \vec{OA} und \vec{OB} berechnet.

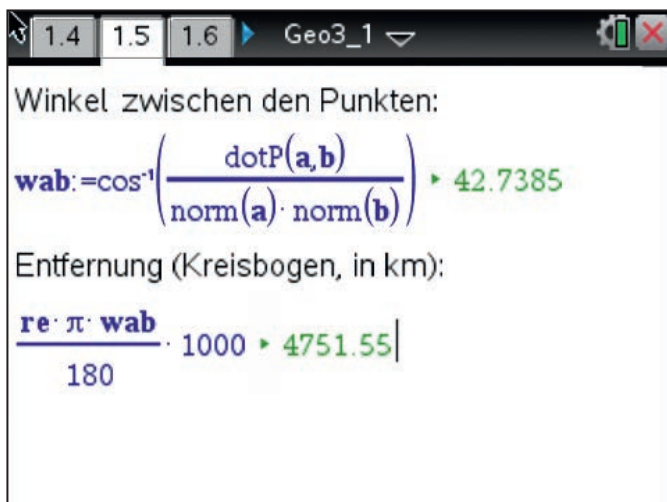


Abb. 15

Aus dem berechneten Winkel kann mit der Formel für den Kreisbogen die Entfernung der beiden Punkte auf der Kugeloberfläche berechnet werden.

Die Berechnung der Entfernung ist damit gelöst. Im folgenden Abschnitt soll jedoch als Ergänzung noch die Kreislinie des Weges auf der Kugeloberfläche dargestellt werden.

4) Lage der Punkte A und B auf der Kugeloberfläche

Eingetragen werden sollen Strecken vom Mittelpunkt $O = (0; 0; 0)$ zu den Punkten A und B. Für die Darstellung müssen zunächst die Koordinaten der Vektoren auf Variablen gespeichert werden. Hier speichern wir auf ax, ay, az, bx, by, bz.

Anschließend werden die Parameterformen der Geraden für die Darstellung der Strecken verwendet. Der Parameter ist jeweils im Intervall $[0;1]$.



Abb. 16

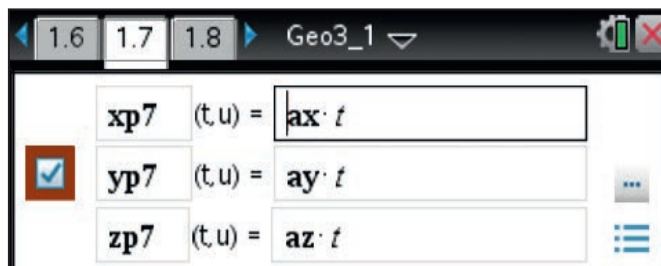


Abb. 17

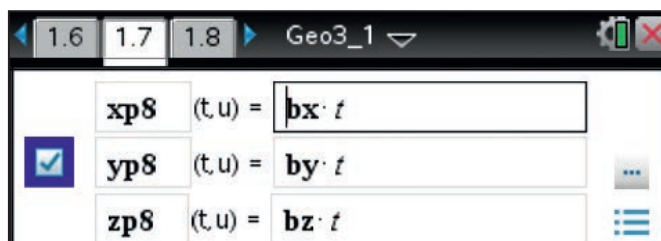


Abb. 18

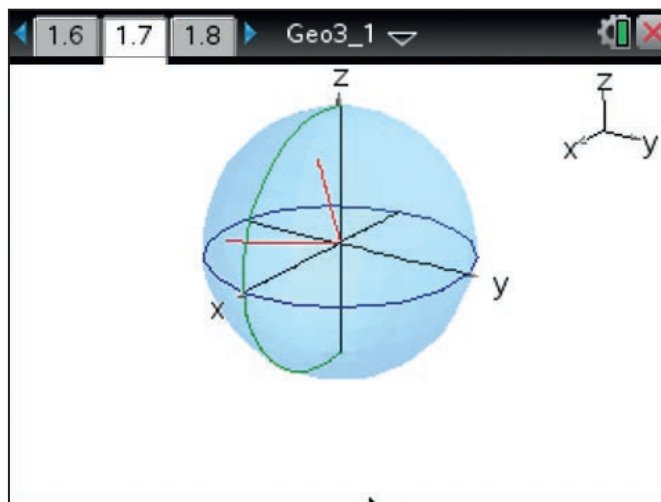


Abb. 19

Die Abbildung zeigt die daraus resultierende Darstellung der Strecken, die vom Mittelpunkt zu den Punkten A und B führen.

5) Großkreis durch A und B

Die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten A und B auf der Kugeloberfläche ist gegeben durch einen Großkreis. Dies ist ein Kreis durch A und B mit dem Kugelmittelpunkt als Kreismittelpunkt.

Zur Darstellung des Großkreises benötigen wir eine Erweiterung der bisherigen parametrischen Kreisdarstellung, da der Kreis eine allgemeine Lage im Raum annehmen kann. Vereinfacht wird dieses Problem durch die Bedingung, dass der Mittelpunkt gleich dem Ursprung und der Radius gleich dem Kugelradius ist.

Parameterdarstellung des Großkreises in einer allgemeinen Schreibweise mit Mittelpunkt O:

$$X = r \cdot \vec{e} \cdot \cos(t) + r \cdot \vec{f} \cdot \sin(t)$$

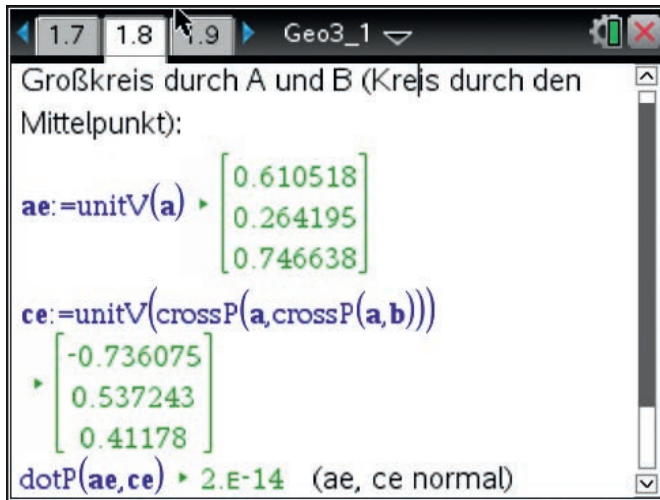


Abb. 20

Dabei sind \vec{e} und \vec{f} zwei Vektoren mit der Länge 1, die normal aufeinanderstehen, r ist der Radius des Kreises. Berechnung von \vec{e} und \vec{f} :

ae: Der erste Vektor ergibt sich als Einheitsvektor, gebildet aus dem Vektor \vec{OA} (Anweisung unitV).

ce: Der Vektor \vec{OB} verbindet zwar den Ursprung mit einem Punkt der Kreislinie. Die beiden Vektoren werden allerdings nicht allgemein aufeinander normal stehen. Um einen Normalvektor zu erhalten, berechnet man einen neuen Vektor ce durch die zweimalige Anwendung des Kreuzprodukts und der anschließenden Berechnung des Einheitsvektors. Die Abbildung zeigt die Umrechnung der Vektorkoordinaten zur grafischen Darstellung.

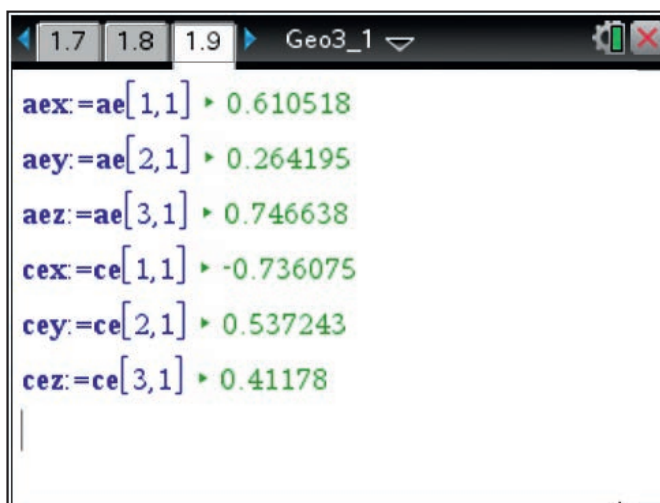


Abb. 21

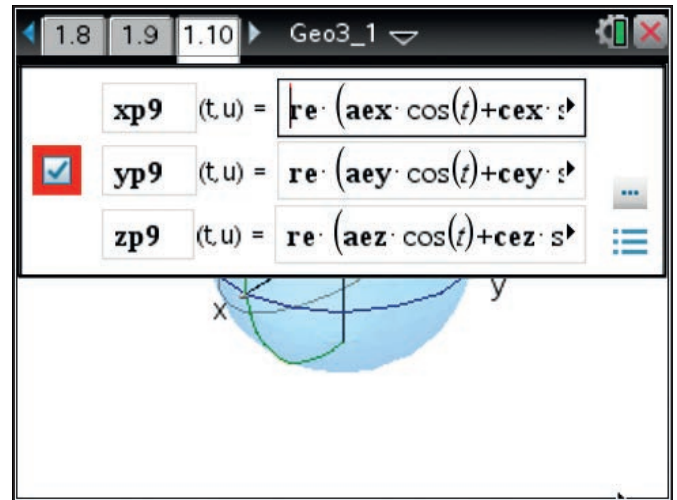


Abb. 22

Die in der Abbildung gezeigte Parameterdarstellung des Großkreises ist gegeben durch die folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} re \cdot (aex \cdot \cos(t) + cex \cdot \sin(t)) \\ re \cdot (aey \cdot \cos(t) + cey \cdot \sin(t)) \\ re \cdot (aez \cdot \cos(t) + cez \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

Der Parameter t wird z.B. im Intervall [0;360] gewählt.

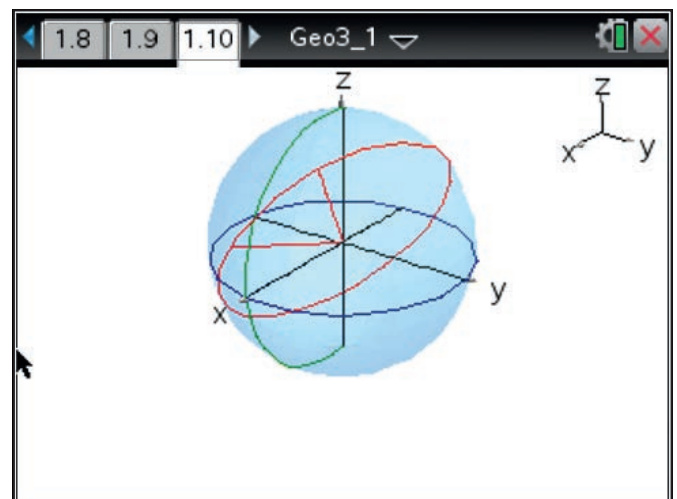


Abb. 23

Es ergibt sich der in der Abbildung dargestellte Kreis. In den folgenden Beispielen werden die Entfernungen auf der Kugeloberfläche von Wien nach New York und von Wien nach Tokio berechnet und die zugehörigen Großkreise dargestellt.

Näherungsweise Daten der drei Städte:

- Wien: 16,4° östliche Länge, 48,2° nördliche Breite
- New York: 74,0° westliche Länge, 40,4° nördliche Breite
- Tokio: 139,7° östliche Länge, 35,7° nördliche Breite



Die Abbildungen 24 a bis c zeigen die Berechnung am Beispiel Wien – New York:

Entfernung auf der Kugeloberfläche (Großkreis):
Gegeben sind zwei Orte A und B auf der Oberfläche durch geografische Länge und Breite. Eingabe:
 $gla:=16.4 \rightarrow 16.4$ $gba:=48.2 \rightarrow 48.2$
 $glb:=-74 \rightarrow -74$ $gbb:=40.4 \rightarrow 40.4$

Winkel zwischen den Punkten:
 $wab:=\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\text{norm}(\mathbf{a}) \cdot \text{norm}(\mathbf{b})}\right) \rightarrow 61.3398$
Entfernung (Kreisbogen, in km):
 $\frac{r_e \cdot \pi \cdot wab}{180} \cdot 1000 \rightarrow 6819.6$

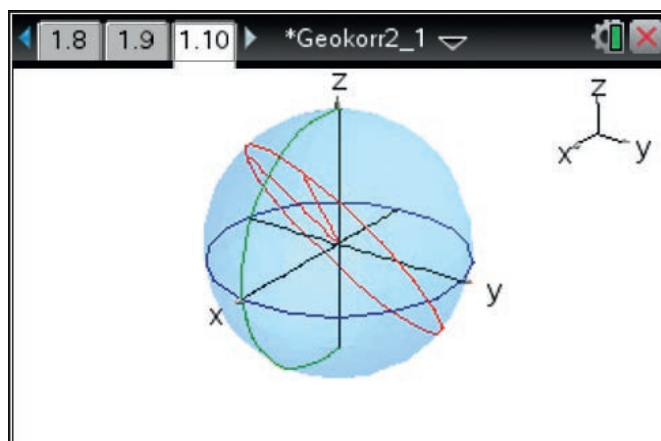


Abb. 24 a bis c

Die Abbildungen 25 a bis c zeigen die Berechnung am Beispiel Wien – Tokio:

Entfernung auf der Kugeloberfläche (Großkreis):
Gegeben sind zwei Orte A und B auf der Oberfläche durch geografische Länge und Breite. Eingabe:
 $gla:=16.4 \rightarrow 16.4$ $gba:=48.2 \rightarrow 48.2$
 $glb:=139.7 \rightarrow 139.7$ $gbb:=35.7 \rightarrow 35.7$

Winkel zwischen den Punkten:
 $wab:=\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\text{norm}(\mathbf{a}) \cdot \text{norm}(\mathbf{b})}\right) \rightarrow 82.0771$
Entfernung (Kreisbogen, in km):
 $\frac{r_e \cdot \pi \cdot wab}{180} \cdot 1000 \rightarrow 9125.12$

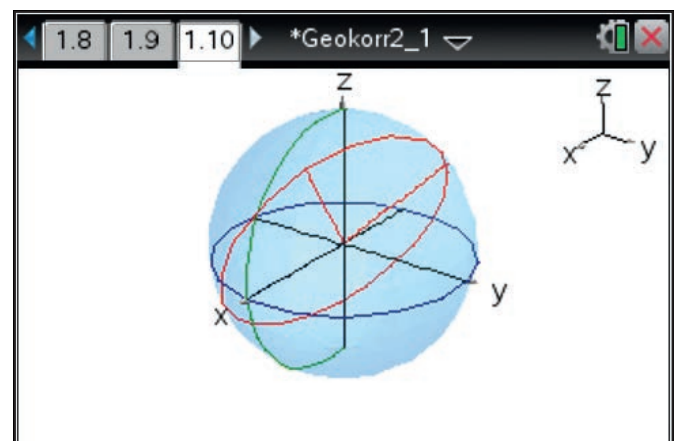


Abb. 25 a bis c

Literatur/ Hinweise:

Weinhandl Robert: *Die Verebnung der Welt – Kartographie im Mathematikunterricht* (Diplomarbeit, Universität Wien bei Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. S. Götz); Wien 2011

Download des kompletten Artikels inkl. tns-file:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

 **Autor:**
Dr. Franz Schlöglhofer (A)



„Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.“¹

Zumindest in diesem Punkt zum Technologieeinsatz sind sich die 16 Kultusminister der Länder einig gewesen, als die Kultusministerkonferenz am 18. Oktober 2012 einstimmig die „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife“ beschloss. Die Gestaltung der Rahmenbedingungen eines Prüfungseinsatzes digitaler Werkzeuge wiederum liegt in der Hoheit der Bundesländer. Vielfältige Ansätze bei der Umsetzung sind die Folge.

Wenn in den KMK-Standards von digitalen Mathematikwerkzeugen die Rede ist, werden einfache wissenschaftliche Taschenrechner (mit dem spezifizierten Funktionsumfang der Vorgaben in Bayern und Baden-Württemberg) genannt, zudem grafikfähige Taschenrechner und Computeralgebrasysteme (CAS), aber auch Tabellenkalkulation und Geometriesoftware. Damit erreicht der länderübergreifende Technologiekonsens auch schon wieder seine Grenzen, denn nun heißt es: „Die Zulassung grafikfähiger Taschenrechner und CAS als Hilfsmittel für die schriftliche Abiturprüfung ist in den Ländern unterschiedlich geregelt.“² Diese Länderregelungen betreffen die Frage, ob bestimmte digitale Werkzeuge im Bundesland zugelassen sind, aber auch, unter welchen Bedingungen sie in der Abiturprüfung eingesetzt werden dürfen.

Die Vorgaben zu den schriftlichen Prüfungen im Abitur des Landes Nordrhein-Westfalen fordern beispielsweise: „Bei der Nutzung von Taschenrechnern hat die Fachkraft unmittelbar vor der Prüfung bei allen Taschenrechnern einen Speicher-Reset durchzuführen oder sich von dem vorgenommenen Speicher-Reset zu überzeugen.“³ In Niedersachsen erklärt das Kultusministerium den Zweck des geforderten Resets: „Alle Taschenrechner einer Prüfungsgruppe sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.“⁴

Traditionelle digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht vereinen Hardware, Betriebssystem und Anwendungsprogramm zu einem unlösbaren Ganzen, wie es beispielsweise beim TI-30X Plus Multiview™, dem TI-84 Plus oder dem Voyage V200™ der Fall ist. Das Konzept neuerer Werkzeuge wie der TI-Nspire™ Technologie basiert auf Datenträger- und Datenablagensystemen in Form von Dateien, die gespeichert, gelesen, geändert oder gelöscht werden können. Diese TI-Nspire™-Dateien funktionieren interoperabel auf dem Handheld ebenso wie auf dem PC, dem Mac oder beispielsweise dem iPad.

Press-to-Test

Was für den Unterricht sowie für seine Vor- und Nachbereitung erhebliche Vorzüge in Sachen Flexibilität und Anwenderfreundlichkeit mit sich bringt, kollidiert in Prüfungen und Tests mit den Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler, erworbene Kompetenzen nachzuweisen, die eine eigene Leistung darstellen, auch wenn hierzu Hilfsmittel eingesetzt werden können.

Deshalb wurde der Prüfungsmodus Press-to-Test entwickelt. Press-to-Test blockiert Inhalte, d.h. Dateien – ohne sie zu löschen. Der Prüfungsmodus ist durch eine Tastenkombination einfach herzustellen und optisch jederzeit durch eine blinkende LED im Gehäuse des Rechners kontrollierbar, auch von fachfremden

aufsichtsführenden Lehrerinnen und Lehrern. Zudem blockiert Press-to-Test nicht nur alle vorgefertigten Dateien, es können auch bestimmte mathematische Werkzeuge begrenzt oder gänzlich deaktiviert werden. Das Verlassen des Prüfungsmodus erfolgt, indem der Rechner mit einem zweiten Handheld verbunden werden muss. Sollte das Betriebssystem des Rechners – beabsichtigt oder unbeabsichtigt – herunterfahren und neu gestartet werden müssen: Am Prüfungsmodus ändert sich nichts, der Rechner ist noch immer im Press-to-Test-Modus. Und wenn es Schülern nun doch gelingt, während der Prüfung den sicheren Modus durch Verbinden des Rechners mit einem Zweitrechner unbemerkt vom aufsichtsführenden Lehrer zu verlassen? Dann ist das immer noch ein Betrugsversuch, der zum sofortigen Ausschluss von der Prüfung führen wird. Und der Schüler muss in jedem Fall in Kauf nehmen, dass die zu Beginn im Press-to-Test-Modus bearbeiteten Aufgaben unwiederbringlich verloren sind.

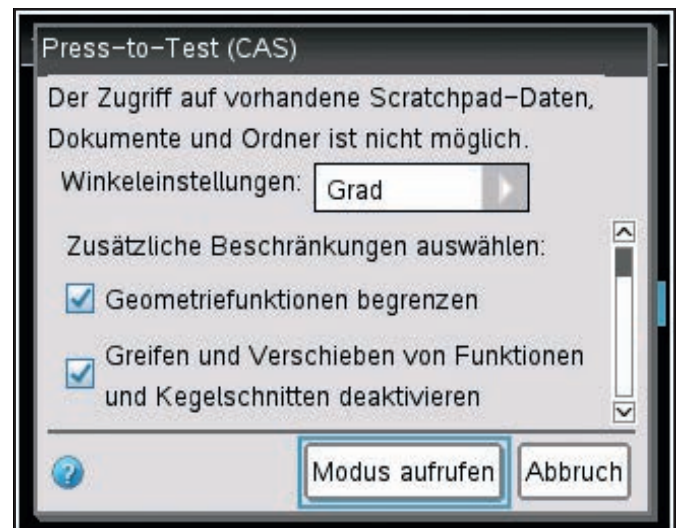


Abb. 1

Press-to-Test als verbindlicher Prüfungsmodus setzt sich mehr und mehr auch im internationalen Maßstab durch. Die Kultusministerien in Frankreich und in den Niederlanden haben einen solchen Prüfungsmodus mittlerweile vorgeschrieben. Texas Instruments hat daher Press-to-Test nicht nur für TI-Nspire™, sondern auch für den neuen TI-83 Premium CE und den neuen TI-84 Plus CE-T entwickelt.

Vorreiter in Sachen einheitlicher Prüfungsmodus waren übrigens die Europäischen Schulen (Schola Europaea). Diese Schulen, getragen von den Mitgliedsstaaten der Europäischen Union, definieren in ihren Prüfungsanforderungen neben dem Prüfungsmodus auch explizit das zu verwendende Betriebssystem von TI-Nspire™ CX CAS (beispielsweise OS 4.0 oder höher).

Tablets und Laptops in der Prüfung

Mehr und mehr Bundesländer prüfen mittlerweile, Computeralgebrasysteme neben Handhelds auch auf Tablets oder Laptops in Prüfungen zuzulassen. Insbesondere wenn weitere digitale Hilfsmittel wie elektronische Wörterbücher in den zentralen Abschlussprüfungen der Bundesländer zulässig sind, wird der Vorzug einer einheitlichen elektronischen Plattform mit einem gemeinsamen Standard des Prüfungsmodus deutlich. Nach derzeitigem

Kenntnisstand gestatten erste Bundesländer den Einsatz von Tablets und Laptops unter definierten Bedingungen, beispielsweise in Nordrhein-Westfalen⁵.

Zentrale Merkmale eines sicheren Prüfungsmodus:

- Blockieren der Kommunikationsschnittstellen (W-LAN, Bluetooth, USB)
- Blockieren der Kamera
- Blockieren des Dokumentenarchives/der Dateiverwaltung generell, auch innerhalb einer Software/App

Auffällig ist, dass eine sichere Prüfungssituation bislang ausschließlich über Voraussetzungen definiert wird, die die Schule (letztlich die Lehrerinnen und Lehrer) sicherzustellen hat, anstatt technische Kriterien an einen Prüfungsmodus zu definieren, die ein System erfüllt oder eben nicht. Besonders deutlich wird das in Bezug auf die Forderung, in Prüfungen sicherzustellen, dass der Zugang zu W-LAN-Netzen zuverlässig unterbunden wird. Wie soll eine Schule das sicherstellen? Das kann sie bestenfalls für das hausinterne Netz garantieren, aber nicht für reichweitenstarke Netze außerhalb der Schule. Störsender sind in solchen Fällen kein legales Instrument, wie ein Schulleiter aus Salzburg bereits 2011 im Zuge einer Anzeige wegen Verstoßes gegen das Telekommunikationsgesetz erfahren musste. Ein solcher Eingriff ist nur Behörden erlaubt. Neben Netzanbietern, die finanzielle Einbußen in den Prüfungsstunden zu vermeiden suchen, wird vor allem das Argument gebracht, dass damit gegebenenfalls auch Notrufe behindert werden. Nun laden diese Argumente geradezu ein, Szenarien zu konstruieren und in düstersten Farben auszumalen, was im schlimmsten Fall alles schief gehen kann. Eine gänzlich andere Philosophie verfolgt Dänemark. Die Verantwortlichen vertreten die Position, wonach viel von der Gestaltung der Abituraufgabe abhängt, ob die Zulassung sämtlicher verfügbarer Hilfsmittel dem Schüler nutzt, sofern er eine eigene Leistung in der Prüfung erbringt. Aktuell steht dänischen Schülern die Nutzung gedruckter oder elektronischer Hilfsmittel frei.

Vor dem Hintergrund der Zulassung von Laptops und Tablets unter bestimmten Bedingungen auch in der Abiturprüfung des Landes Nordrhein-Westfalen haben sich die Unternehmen Microsoft, Acer, Cornelsen und Intel mit Texas Instruments und mit RDT zusammengetan, um eine Komplettlösung für Mathematik zu präsentieren, zugeschnitten auf die Bedingungen des Landes NRW. Mit dem Klausurmanager der Ramcke DatenTechnik GmbH (RDT) erzeugt der Lehrer eine sogenannte Klausur-ID in Form einer fünfstelligen Ziffernfolge, die nur ein einziges Mal erzeugt und genutzt werden kann. Zu Beginn der Prüfung startet der Schüler den Klausurmanager auf seinem Gerät und gibt den vom Lehrer vorgegebenen Code ein. Anschließend startet der Klausurmodus. Nur ausgewählte Softwareprogramme – in diesem Fall TI-Nspire™ CAS – können gestartet werden. Die Kamera und sämtliche Schnittstellen sind blockiert, die Dateiverwaltung der TI-Nspire™-Software eingeschlossen.

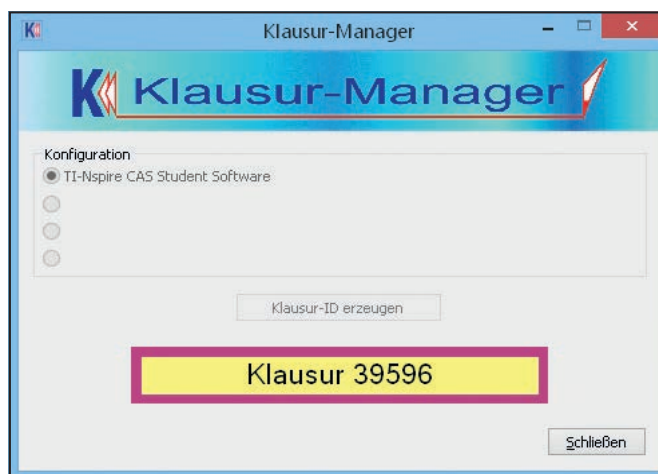


Abb. 2



Abb. 3

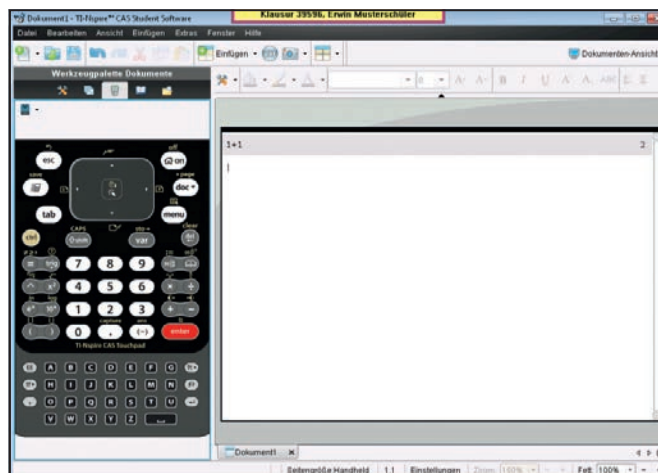


Abb. 4



Zudem erscheint auf dem Display ein Fenster mit der Prüfungs-ID und dem zugehörigen Farbcode, sodass jederzeit der Prüfungsmodus optisch kontrolliert werden kann. Bei Verlassen des Prüfungsmodus steht zur Wahl, das soeben erzeugte Dokument abzugeben, beispielsweise durch Speichern auf einem USB-Stick.

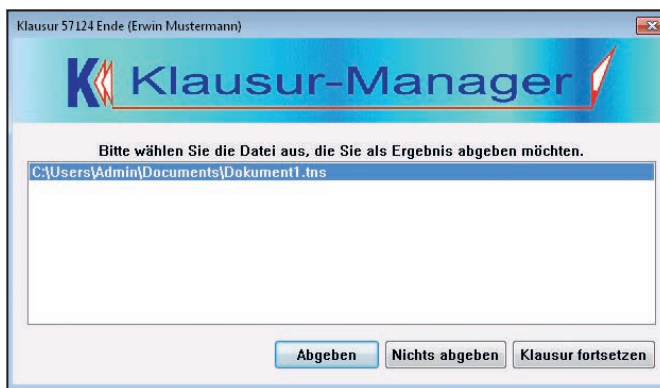


Abb. 5

Der Klausurmanager ist auf die Bedingungen des Landes NRW abgestimmt entwickelt worden. Bei der Vorstellung dieser Lösung in den Kultusministerien anderer Bundesländern wurden weitere Ideen für nützliche Features geboren. Für die Industrie wäre es deshalb hilfreich, wenn sich die Kultusministerien auf Kriterien für einen einheitlichen Prüfungsmodus einigen könnten. Es müssen nicht 16 sein.

Quellen:

- http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf, S. 13.
- ebd., S. 26.
- https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/abitur/upload/gost/Abiturverfuegung_2014-Teil_A.pdf, S. 8
- http://www.nibis.de/nli1/gohrgs/13_zentralabitur/zentralabitur_2016/14MathematikHinweise2016_20140303.pdf, S. 2
- <http://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/gtr/angebot-home/graphikfaehige-taschenrechner-im-mathematikunterricht-der-gymnasialen-oberstufe.html>

» Autor:
Dirk Ritschel (D)

TI KURZ-NACHRICHTEN

IQB veröffentlicht Aufgabensammlung

Das Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen IQB in Berlin hat mit Blick auf die ab dem Schuljahr 2016/17 geltenden länderübergreifenden Abiturstandards eine Aufgabensammlung veröffentlicht. Sie zeigt exemplarisch, wie die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen und Vorgaben für die Abiturprüfung in Aufgaben und Erwartungshorizonte übersetzt werden können. Die Aufgabensammlung für das Fach Mathematik enthält drei Bereiche: (1) Aufgaben, für deren Bearbeitung eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen ist; (2) Aufgaben, für deren Bearbeitung als digitales Hilfsmittel ein einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner (z. B. TI-30X Plus Multiview™) vorgesehen ist sowie (3) Aufgaben, für deren Bearbeitung als digitales Hilfsmittel ein Computeralgebrasystem (CAS) vorgesehen ist.

Brandenburg erlaubt CAS in MINT-Fächern

Schülerinnen und Schüler in Brandenburg, die ihr Mathematik-Abitur mit Computeralgebrasystem schreiben, können ihren Rechner zukünftig auch in den Prüfungen für Biologie, Chemie, Geografie und Physik verwenden.

Mecklenburg-Vorpommern macht CAS verbindlich

Das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur in Mecklenburg-Vorpommern hat einen neuen Rahmenplan für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe im Fach Mathematik veröffentlicht. Der Rahmenplan berücksichtigt den besonderen Wert digitaler Mathematikwerkzeuge, deren sinnvoller Einsatz im alltäglichen Unterricht die Entwicklung mathematischer Kompetenzen unterstützt. Als digitales Mathematikwerkzeug wird ein Computeralgebrasystem (CAS) in Unterricht und Prüfung verwendet. Die Regelung ist ab dem Schuljahr 2018/2019 ab der Klassenstufe 10 verbindlich.

Neues Kerncurriculum in Niedersachsen fordert CAS

Mit Beginn des Schuljahres 2015/16 ist in Niedersachsen ein neues Kerncurriculum für die Jahrgänge 5-10 an den Gymnasien in Kraft getreten. Das neue Curriculum sieht altersangemessen und in sachadäquatem Umfang den Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge vor. Deren Nutzung wird über die Formulierung der Kompetenzen verbindlich vorgegeben. Dies schließt neben Programmen zur grafischen Darstellung, für Tabellenkalkulation und für Dynamische Geometrie auch Computeralgebrasysteme (CAS) ein.



TI-Nspire™ Technologie

TI-Nspire™ im sicheren Prüfungsmodus: Press-to-Test

Es gibt für die Modelle TI-Nspire™ CX und TI-Nspire™ CX CAS den sogenannten **Press-to-Test-Modus**. Hierbei wird der Zugriff auf die im Gerät gespeicherten Dateien und Funktionen gesperrt ohne die Dateien und Funktionen zu löschen.

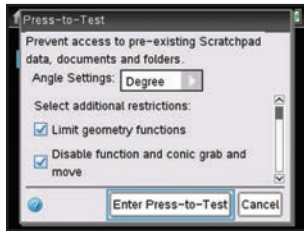
Durch das Aktivieren des **Press-to-Test-Modus** wird während der Prüfung der Zugang zu bereits bestehende Programmen, Dokumenten, Dateien, Anwendungen sowie Bildern gesperrt.

Die Bildschirmdarstellung kann je nach Modell und installiertem Betriebssystem leicht abweichen.

Vor der Prüfung – Den Rechner in den Press-to-Test-Modus setzen:

1) Den Rechner ausschalten: Drücke **ctrl** [off] Tasten.

2) Zeitgleich **esc** und **ctrl** [on] solange gedrückt halten bis der Press-to-Test-Bildschirm erscheint.

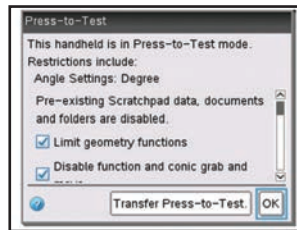


3) Bestimmte Einschränkungen auswählen: Standardmäßig sind alle Einschränkungen ausgewählt. Um die Standardeinschränkungen zu ändern, mit der Pfeiltaste oder mit **tab** durch die Liste der Einschränkungen klicken. Wenn eine Einschränkung markiert

ist, **ctrl** [on] Taste drücken, um die Beschränkung aufzuheben. (Nicht die **enter** Taste drücken!) Um alle Einschränkungen zu deaktivieren, **ctrl** [A] Tasten drücken.

4) Press-to-Test-Modus aktivieren: Mit **tab** **Press-to-Test-Modus** auswählen und mit **enter** bestätigen.

5) Das Betriebssystem des Handhelds startet neu und bestätigt die Einschränkungen. Mit **OK** bestätigen und weiter zum Home-Bildschirm.



6) Wenn der Press-to-Test-Modus aktiviert ist, wird ein Schloss-Symbol in der oberen rechten Ecke des Home-Bildschirms angezeigt.



Eine LED blinkt in der Nähe des Mini-USB-Anschlusses:

- » Grün, wenn alle Einschränkungen (Standard) ausgewählt wurden.
- » Gelb, wenn eine oder mehrere Einschränkungen deaktiviert wurden.

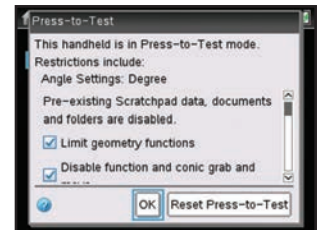
Wenn der Handheld sich im Press-to-Test-Modus befindet und in nachfolgenden Prüfungen verwendet werden soll, können durch das Drücken der Reset-Taste alle während des Press-to-Test-Modus erstellten Daten und Dateien gelöscht werden.

Nach jeder Prüfung – Den Press-to-Test-Modus zurücksetzen:

1) Stellen Sie sicher, dass der Rechner ausgeschaltet ist: **ctrl** [off].

2) **esc** und **ctrl** [on] gleichzeitig gedrückt halten bis der Press-to-Test Bildschirm erscheint.

3) **Modus zurücksetzen** auswählen und mit **OK** bestätigen.



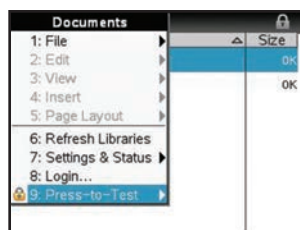
Bei Verlassen des Press-to-Test-Modus werden alle vorherigen Systemeinstellungen und Dateien wiederhergestellt. Alle Daten und Dateien, die im Press-to-Test-Modus erstellt wurden, werden gelöscht.

Nach der Prüfung – Press-to-Test-Modus verlassen:

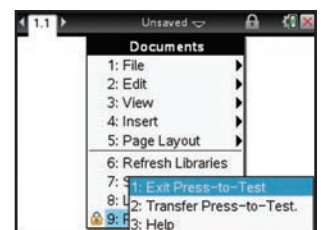
1) Taschenrechner mit einem anderen TI-Nspire™-Handheld per Mini-USB-Kabel verbinden.

2) **ctrl** [on] drücken, um auf den Home-Bildschirm zu gelangen. 2: **Eigene Dateien** auswählen.

3) **doc** drücken, 9: **Press-to-Test** wählen und mit **ENTER** bestätigen.



4) 1: **Press-to-Test verlassen** auswählen und mit **ENTER** bestätigen.



Anschließend startet das Betriebssystem neu und der Press-to-Test-Modus wurde verlassen.

Alle Informationen zu Produkt, Services und Bezugsquellen finden Sie unter:
education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Wir sind für Sie da

Innovative Technologie

Die Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-84 Plus C Silver Edition, TI-84 Plus CE-T, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und die TI-Nspire™ CX Modelle lassen sich durch zusätzliche Applikationen und/oder Upgrades erweitern. Neben kompatibler Software (Win/Mac®) gibt es nun auch die TI-Nspire™ App für iPad® und die TI-Nspire™ CAS App für iPad®. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac®.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel Exemplare oder Klassenätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich:

ti-loan@ti.com

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte. Zudem wird TI-Technologie in führenden Lehrwerken eingesetzt.

- Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net
- Viele Handreichungen von TI und T³ können Sie auch über den TI-Unterrichtsmaterialien Webshop beziehen: www.ti-activities-shop.net
- Das kostenlose Abonnement der TI-Nachrichten erhalten Sie unter: ti-nachrichten@ti.com

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:



Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS

Tel.: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)

Fax: +49 (0)8161 80 3185

ti-cares@ti.com

education.ti.com/deutschland

education.ti.com/oesterreich

education.ti.com/schweiz

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

Texas Instruments und seine Vertreter sind bemüht, die Richtigkeit der Kommentare und Darstellungen in dieser Publikation zu gewährleisten. Dennoch wird keine Haftung für inhaltliche Ungenauigkeiten, für Artikel oder Behauptungen von Autoren übernommen. Die hier abgedruckten Meinungen sind nicht unbedingt die Meinungen von Texas Instruments. Alle Angaben ohne Gewähr. Texas Instruments behält sich das Recht vor, Produkte, Spezifikationen, Dienstleistungen und Programme ohne vorherige Ankündigung zu ändern. Alle erwähnten Firmen-, Marken- und Produktnamen sind Warenzeichen bzw. Marken der jeweiligen Rechtsinhaber.