Taylorpolynome im Zentralabitur – lästige Pflicht oder Anlass für interessante Experimente

Thomas Sperlich

Im niedersächsischen Zentralabitur 2008 und 2009 sind Taylornäherungen für gebrochenrationale Funktionen als verpflichtender Schwerpunkt festgelegt worden. Dies führte in den Kollegien zum Teil zur Verwunderung. Wären trigonometrische Funktionen oder die Exponentialfunktion in dem Zusammenhang mit Taylorpolynomen nicht eigentlich interessanter, wurde vielerorts gefragt. Auch ich stand in meinem Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau vor dieser Aufgabe und habe dabei die Beobachtung gemacht, dass eine anwendungsorientierte Motivation nicht direkt auf der Hand liegt. Allerdings eignet sich diese Verbindung von Taylorpolynomen und gebrochen rationalen Funktionen als Anlass für einige interessante Experimente recht gut.

Da an unserer Schule der Voyage™200 eingeführt ist, ergibt sich im Analysiskurs das Problem, wie man die Betrachtung der Ableitungsregeln motiviert, sind diese doch alle auf dem Rechner implementiert. Die Schülerinnen und Schüler immer wieder zu zwingen, tatsächlich Ableitungen mit dem Bleistift durchzuführen, lässt sich höchstens als Dressurübung vorstellen. Als Werkzeug zur Differentiation von Funktionen sind die Ableitungsregeln nicht mehr nötig, das macht der Rechner. Da ergibt sich durch Betrachtung der Taylorreihen einiger einfacher gebrochen rationaler Funktionen ein neues Feld, auf dem die Ableitungsregel zur Deutung oder auch zur Erzeugung von unversehens auftretenden Mustern genutzt werden können.

Einstiegsbeispiel:

In dieser Darstellung beschränke ich mich auf die Entwicklungsstelle $x = 0$, also die sogenannte *Mac Laurinsche Formel*. Als Einstiegsbeispiel dient die denkbar einfache gebrochenrationale Funktion mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Die Taylorpolynome mit der Entwicklungsstelle x=0 lassen sich leicht mit dem CAS erzeugen und zeigen eine einprägsame Struktur, deren Fortsetzung ohne Rechnung intuitiv nahe liegt:

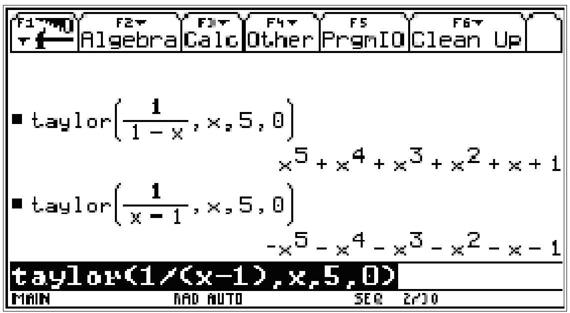

Abb.1

Durch Variation der Aufgabe oder einfach durch Eingabefehler der Schülerinnen oder Schüler ergibt sich das zweite Polynom. Es stellt sich die Frage, aufgrund welcher Eigenschaften der Funktion es zu den Gemeinsamkeiten und den Unterschieden bei den Polynomen kommt. Man kann hier mit der Spiegelung des Graphen an der x-Achse argumentieren oder mit der Faktorregel durch Ausklammern der -1.

Nach diesen beiden Beispielen ergeben sich viele mögliche Anschlussfragen. Zum Beispiel: Wie muss man die gebrochenrationale Funktion abändern, um ein Polynom wie

$p(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

mit alternierenden Vorzeichen zu erhalten? Entweder man lässt dem Spieltrieb freien Lauf und experimentiert mit dem Rechner, oder man überlegt sich anhand der Ableitungsregeln, wie die Vorzeichen zustande kommen: In der obigen Funktion $f(x) = (1-x)^{-1}$ liefert die äußere Ableitung ein negatives Vorzeichen wegen des negativen Exponenten. Das zweite negative Vorzeichen wird im ersten Fall durch die innere Ableitung und im zweiten beim Einsetzen im Nenner erzeugt. Wenn weder die innere Ableitung - der Vorfaktor vom x - noch der Wert der entsprechenden Ableitungsfunktion ein weiteres negatives Vorzeichen lieferten, hätten wir den gewünschten fortlaufenden Wechsel. Natürlich genau so gut, wenn beide gleichzeitig ein negatives Vorzeichen lieferten. So gelangt man zu den folgenden Beispielen, die beide alternieren:

Funktion	Taylorpolynom 5. Grades
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	$t(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
$f(x) = \frac{1}{-1-x}$	$t(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Variationen des Funktionsterms:

Nach diesen ersten Erfahrungen liegt es nahe, in dieser Richtung weiter zu forschen: Wie wirken sich weitere kleine Variationen des Funktionsterms, zum Beispiel das Hinzufügen einer 2, auf das Taylorpolynom aus?

Eine 2 im Zähler sollte in ihrer Auswirkung mithilfe der Faktorregel schnell geklärt sein. Aber was geschieht bei Änderungen im Nenner?

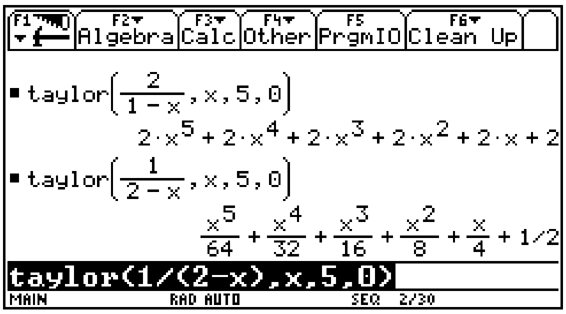

Abb. 2

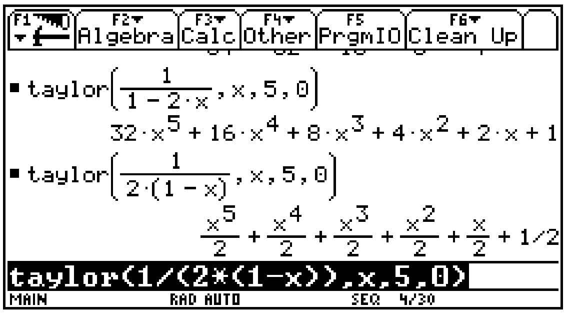

Abb.3

Während sich das letzte Beispiel analog zur Zählerzwei auf die Faktorregel zurückführen lässt, ist die Frage interessant, weshalb man beim zweiten Beispiel die Zweierpotenzen im Nenner und beim dritten im Zähler hat und dann auch noch in gewisser Weise um 1 verschoben!

Hier muss die Kettenregel bemüht werden. So tritt im dritten Beispiel die 2 als innere Ableitung auf (deshalb beim Summanden 1 noch nicht und deshalb auch im Zähler). Im zweiten Beispiel ist es wiederum der Wert der Ableitungsfunktionen, der die Zweierpotenzen verursacht. Weil sie schon beim Funktionswert auftritt, gibt es die „Verschiebung“ um eine Stelle im Muster und diese 2 steht im Nenner. Eine denkbare Verständnisfrage zur Sicherung wäre: Was ändert sich in den vier Beispielen, wenn man die 2 durch eine 3 ersetzt?

Als vorläufiger Höhepunkt wandert unsere 2 nun in den Exponenten. Eine mögliche Fragestellung, die von anderer Seite dorthin führt, ist die nach y-achsensymmetrischen Taylorpolynomen. Um diese zu erhalten, versuchen wir es mit einer y-achsensymmetrischen gebrochenrationalen Ausgangsfunktion, etwa

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

und tatsächlich ergibt sich ein Polynom mit ausschließlich geraden Exponenten (Abbildung 4), wie erwartet eine y-achsensymmetrische Funktion. Und wie bekommt man das Polynom punktsymmetrisch? Die Multiplikation mit x würde alle Potenzen ungerade machen. Also multipliziert man versuchshalber die Funktion f mit x (Abbildung 4).

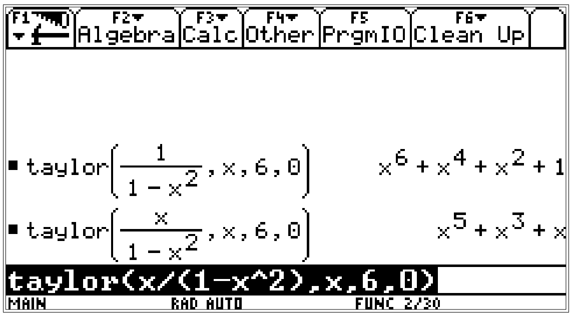

Abb. 4

Eigentlich doch verblüffend, wie einfach die Konstruktion ist und das hier eine Multiplikation mit x in der Ausgangsfunktion anscheinend bewirkt, dass auch das mit x multiplizierte Taylorpolynom wieder eine Taylornäherung darstellt (dazu sollte man den zweiten Term bis zum Grad 7 entwickeln). Die Frage nach der Symmetrie führt somit zu einer weiteren Variationsmöglichkeit.

Schließlich noch ein Fall, der einen im ersten Moment in die Irre führen kann. Die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

stellt wieder nur eine kleine Variation durch Hinzufügen der Klammern dar. Im ersten Moment könnte man denken, da das ja die erste Ableitung der Ausgangsfunktion sei, wäre man schon einen Schritt weiter beim Taylorpolynom und bräuchte nur die 1 zu streichen. Aber Vorsicht! Das war zu einfach gedacht. Der Rechner liefert Abbildung 5:

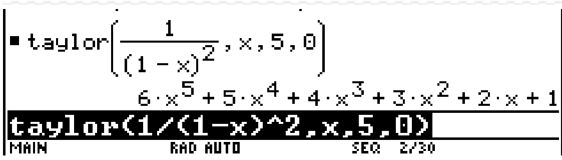

Abb. 5

Auch ein denkbar einfaches Muster, aber etwas anders als im ersten Moment erwartet. Wieder stellt sich die Frage, wie es kommt. Dieses Mal lässt die Frage sich besser mit dem Bildungsgesetz der Taylorpolynome beantworten. Hier ist es nämlich wegen der Fakultäten im Nenner der einzelnen Koeffizienten und dem Wert der Funktion an der Stelle 0 nicht einfach mit einem „shift“ getan.

Ausblick

Der Schritt zu etwas komplexeren Zählertermen (linear) lässt sich mithilfe der Summenregel auch noch gut nachvollziehen (Abbildung 6). Hier wird der Blick für Termstrukturen gefordert, da die Zerlegung des Bruchterms die Erklärung anhand der Taylorpolynome einfacherer, zum Teil bereits bekannter Funktionen liefert.

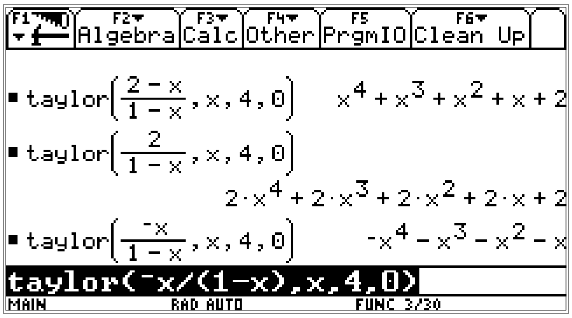

Abb. 6

Eine vertiefende Frage wäre, ob und wie sich die folgende, oben getätigte Beobachtung verallgemeinern lässt: Wenn f eine n-fach differenzierbare Funktion ist und t das Taylorpolynom vom Grad n an der Stelle 0, so haben wir gezeigt, dass dann $k \cdot t$ das Taylorpolynom vom Grad n für $k \cdot f$ an der Stelle 0 ist. Wie (in Abb.4 unten und Abb.6 unten) gesehen, liegt die Vermutung nahe, dass auch $x \cdot t$ ein Taylorpolynom für $x \cdot f$ ist. Gilt das immer? Gilt das auch für die Multiplikation mit beliebigen linearen Funktionen (Abbildung 6, oberste Zeile)? Und falls es für die Multiplikation mit linearen Funktionen gilt, wie ist es mit Produkten von f mit Polynomfunktionen?

Weitere interessante Muster ergeben sich zum Beispiel bei Betrachtung der Funktionen der Art:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^n} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

Vermuten Sie einmal, welche Struktur sich ergeben wird!

Eine weiter in die Tiefe gehende Ausweitung der Betrachtungen bei einigen der Beispiele auf die Stammfunktionen (Logarithmus oder Arcustangens) ist von unseren Vorgaben zum Zentralabitur her nicht vorgesehen.

Man sieht, dass sich hier ein Feld auftut, auf dem man nach Belieben und auf unterschiedlichem Niveau experimentieren kann, da nur kleine Variationen der Funktion f zu ständig wechselnden, aber stets einfach zu durchschauenden Mustern führen. Deren genauer begründete Herleitung führt immer wieder auf die Grundbegriffe des Ableitungskalküls. Man nutzt die CAS-Möglichkeiten zum Experimentieren gründlich aus, ohne dass sie einem das Nachdenken über die zugrunde liegenden Regeln wirklich ersparen. Im Gegenteil, die rechnererzeugten Muster fordern eine mathematische Analyse und ein Training des Grundverständnisses geradezu heraus. Es liegt allerdings am Lehrer, darauf zu achten, dass die Beschleunigung, die diese Untersuchungen durch die Möglichkeiten des CAS-Einsatzes erfahren, nicht zu einem Verlust an Transparenz führt. Er muss (sich) rechtzeitig bremsen, um die Schülerorientierung nicht aus den Augen zu verlieren, denn die Gefahr einer starken und ausschließlichen Sachorientierung ist hier natürlich sehr groß.

Autor:
Thomas Sperlich, Northeim (D)
Studienseminar Hildesheim
TSperlich@t-online.de