

► Parabelsegmente

Henning Körner

In Erinnerung an Günter Steinberg

Schneidet eine Gerade eine Parabel in zwei Punkten entsteht ein Parabelsegment. Diese Segmente bilden einen spannenden Unterrichtsgegenstand, weil hier verschiedene Aspekte der Analysis und der Geometrie thematisiert werden können. Außerdem bestehen auch historische Anknüpfungspunkte. Es wird eine Unterrichtssequenz vorgestellt, die ihren Ausgang zunächst in einer Aufgabe hat, die Basiskompetenzen schult, dann aber durch Fragen, die aus der Sache heraus entstehen, zu weiteren Untersuchungen Anlass gibt, bei denen dann zunächst ein CAS zentrales, unumgängliches Werkzeug ist. Im weiteren Verlauf führen Modifikationen und historische Bezüge zu neuer und tieferer Einsicht mit der Möglichkeit binnendifferenzierender Weiterarbeit. Insgesamt werden also an einem Objekt (Parabelsegmente) unterschiedliche Methoden angewendet und nicht, wie oft üblich, eine Methode an oft beliebig erscheinenden Objekten geübt. Der Aufbau hat somit Bruderschen ‚Blütencharakter‘. Bezüglich des Einsatzes von CAS leistet die Aufgabensequenz auch einen Beitrag zur Diskussion um „zu Fuß“ vs. „mit Knopfdruck“. Es sind Erfahrungen aus unterschiedlichen unterrichtlichen Umsetzungen des Verfassers eingearbeitet.

Aufgabe 1

Verschiebt man einen Streifen festgelegter Breite parallel zur Symmetrieachse einer Parabel, so schneidet dieser Streifen die Parabel in zwei Punkten P und Q. Diese beiden Punkte bilden ein Parabelsegment (Abb.1).

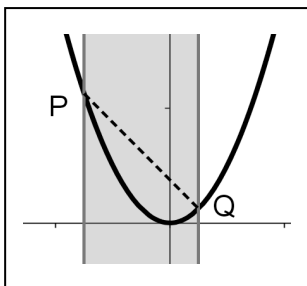


Abb.1

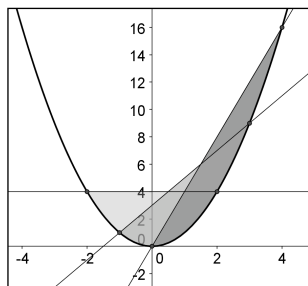


Abb.2

- Beschreiben Sie die Form des Segments (Abb.1), wenn der Streifen von links nach rechts wandert. In welcher Position des Streifens vermuten Sie einen maximalen Flächeninhalt?
- In Abb.2 sind zu $f(x) = x^2$ drei Segmente skizziert. Die zugehörigen Geraden haben die Gleichungen $g_1(x) = 4$; $g_2(x) = 2x+3$, $g_3(x) = 4x$. Zeigen Sie, dass die Segmente gleiche Breite haben und ermitteln Sie den zugehörigen Flächeninhalt. Was fällt auf? Vergleichen Sie mit Ihrer ursprünglichen Vermutung. Konstruieren Sie zwei weitere Segmente gleicher Breite nach eigener Wahl und prüfen Sie ihre (neue) Vermutung.

1a) schult inhaltliche Vorstellungskraft und soll durch intuitive Hypothesenbildung eine Berechnung motivieren. In 1b)

sind die Beispiele so gewählt, dass eine Berechnung der Flächeninhalte und der Nachweis der konstanten Breite durchaus ‚zu Fuß‘ vorgenommen werden sollten, damit Schüler nicht nur Basiskompetenzen üben, sondern auch unmittelbar erfassen, dass es durchweg um das Lösen von quadratischen Gleichungen und Bilden von Stammfunktionen quadratischer Funktionen geht. Die Zahlenwerte sind so gewählt, dass auch der numerische Aufwand gering bleibt. Am Beginn einer Problemaufgabe steht also Üben, oder: Üben in sinnstiftendem Kontext zum Auftakt. Ein Vergleich mit der anfänglichen Hypothese führt vielleicht zur Überraschung oder auch einer ersten numerischen Bestätigung. Es drängen sich dann unmittelbar Fragen auf:

- Haben alle Parabelsegmente der Normalparabel mit der Breite 4 denselben Flächeninhalt?
- Haben alle Parabelsegmente der Normalparabel mit gleicher Breite denselben Flächeninhalt?
- Haben alle Segmente gleicher Breite beliebiger Parabeln denselben Flächeninhalt?

Frage (A) wird in der letzten Teilaufgabe von 1b) vorbereitet, die Algebraisierung zu den Grenzen t und $t+4$ ist bei Schülern kein Selbstläufer. Die Fragen stellen nun eine zunehmende Verallgemeinerung zu folgendem allgemeinen Satz dar:

Aufgabe 2

Beweisen Sie den Satz vom Parabelsegment: Bei jeder Parabel haben Parabelsegmente gleicher Breite denselben Flächeninhalt.

Charakteristisch für die Beantwortung der Fragen ist bei der hier gewählten Zugangsart, dass semantisch immer dasselbe passiert. Es müssen zunächst Schnittpunkte von Geraden und Parabeln bestimmt werden, um die Integrationsgrenzen zu erhalten, dann muss eine quadratische Funktion integriert werden. Syntaktisch sprengt aber der Rechenaufwand beim Weg von (A) über (B) nach (C) zunehmend jeden schulischen und auch sonst sinnvollen Rahmen. Hier kann dann ein CAS seine ganze Kraft entfalten. Ob man die Fragen dann sukzessive abarbeitet oder gleich mit (C) beginnt, weil es einem CAS ja ziemlich egal ist, wie komplex die Terme sind, kann den Vorlieben der Schüler überlassen werden. Wie sieht nun ein allgemeiner Ansatz aus? Nahelegend und dann auch von Schülern vorgeschlagen, wird:

- Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$,
- Breite des Segmentes: h
- Beginn des Segmentes t .

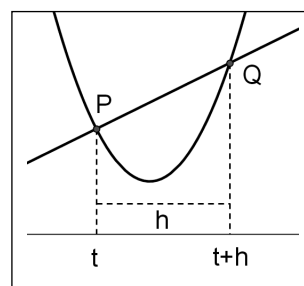


Abb.3

Die Berechnungen mit dem CAS können auf unterschiedliche Weise durchgeführt werden.

(1) Ein Protokoll zu einem Vorgehen, das außer der Zuordnung von Variablen und Funktionen keiner gesonderten CAS-Fertigkeiten bedarf und analog zu einer Berechnung ‚zu Fuß‘ erfolgt:

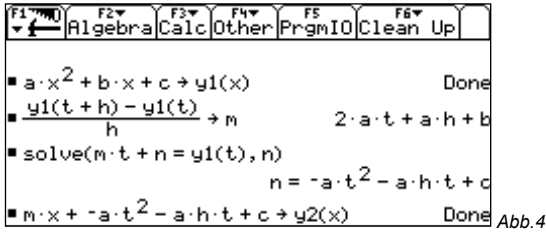


Abb.4

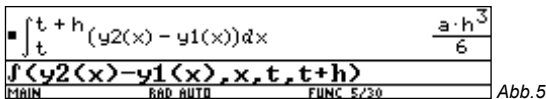


Abb.5

Zum Nachdenken: Auch folgende Eingaben führen zur korrekten Lösung, obwohl doch „b“ auf zwei verschiedene Arten definiert ist (Zeile 1 und Zeile 3), warum?

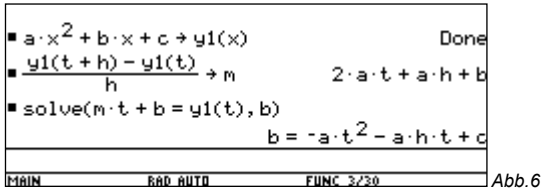


Abb.6

(2) Wenn man ein auch in anderen Situationen sinnvoll verwendbares Makro zur Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte zur Verfügung hat, gerinnt die Lösung zum Einzeiler im CAS:

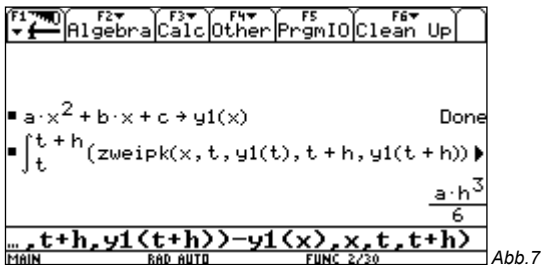


Abb.7

Anmerkung: Das „Zweipk-Makro“ könnte so erzeugt sein:

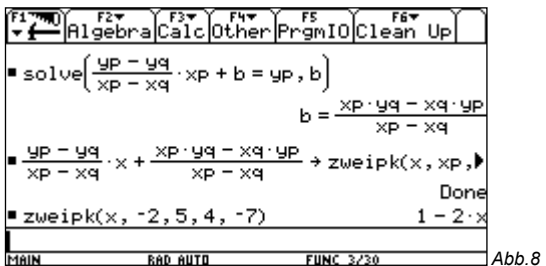


Abb.8

Das Ergebnis erfreut und überrascht zugleich. Erfreulich ist, dass im Lösungsterm kein t auftaucht, der Flächeninhalt also unabhängig vom Beginn des Segmentes ist. Überraschend ist, dass auch die Parameter b und c nicht mehr auftreten. Dies gibt aber Anlass zum Nachdenken: Na klar, eine Betrachtung von $f(x) = k \cdot x^2$ reicht aus, weil jede Parabel durch Kongruenzabbildungen (Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen) in diesen Typ überführt werden kann,

oder umgekehrt: Wenn man eine beliebige Parabel zeichnet, kann man das Koordinatensystem immer so legen, dass der Scheitelpunkt im Ursprung liegt.

Natürlich stellt man die Passung der Lösungsformel mit den Ergebnissen aus Aufgabe 1 her. Man sollte sie auch weitergehend inhaltlich interpretieren: Bei gegebener Breite ist der Flächeninhalt proportional zum Streckfaktor der Parabel, bei gegebenem Streckfaktor wächst der Flächeninhalt kubisch bzgl. der Breite h (Kovarianzaspekt).

Die teilweise komplexen Termumformungen, vor allem bei der Bestimmung des Integrals, werden bei der Arbeit mit dem CAS gar nicht sichtbar, was aber kein Problem darstellt, weil strukturelle Einsicht vorliegt (quadratische Gleichung, kubische Funktion als Stammfunktion), so dass dem Ergebnis ohne Einschränkung vertraut werden kann. Von bleibender und zentraler Bedeutung bleibt aber die Interpretation des Ergebnisses und der einsichtige Umgang mit Parametern. Dass hier nicht immer unmittelbare Klarheit vorliegt, zeigt eine Diskussion in einer Lerngruppe, die nach dem Ansatz mit $f(x) = k \cdot x^2$, Segmentbreite h und Laufparameter t darüber diskutiert, welche Variablen denn im Ergebnis auftreten müssen, können oder dürfen. Hier empfiehlt sich eine Formulierung des Satzes in Bezug auf die Parameter: Bei gleicher Breite h und gleichem Streckfaktor k erhält man immer denselben Flächeninhalt. Es interessiert also den Flächeninhalt überhaupt nicht, wo das Segment beginnt. Wenn wir den Flächeninhalt ausrechnen, darf also im Ergebnis kein t auftreten. Wenn doch, hängt der Flächeninhalt vom Beginn t des Segments ab. Es wird dann sogar weiter diskutiert, ob in der Formel nicht nur ein Parameter auftreten kann oder darf (ein parameterfreies Ergebnis wird zwar, wohl aus früheren analogen Erfahrungen, auch kurz vorgeschlagen, aber natürlich schnell verworfen). Hier muss dann inhaltliche, Verständnis fördernde Aufklärungsarbeit geleistet werden:

(a) Wenn nur k übrig bleibt, hieße das, dass die Breite egal ist. Das ist augenscheinlich falsch. Wir haben damit nicht nur den Satz bewiesen, sondern auch eine Formel entwickelt, die es uns ermöglicht, die Fläche eines Parabelsegments ohne Integralrechnung (!) anzugeben, wenn wir die Breite kennen.

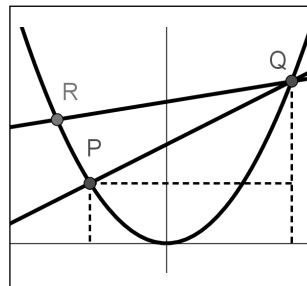


Abb.9

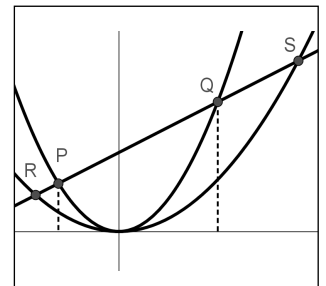


Abb.10

(b) Wenn nur h übrigbleibt, hieße das, dass der Streckfaktor egal ist. Das ist augenscheinlich falsch. Beispiel:

$$f(x) = 2x^2 - 8 \cdot x + 10 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ h = \frac{\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = x + 4$$

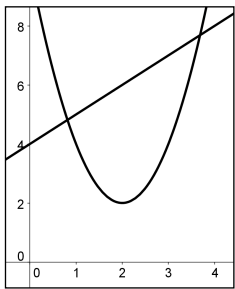


Abb.11

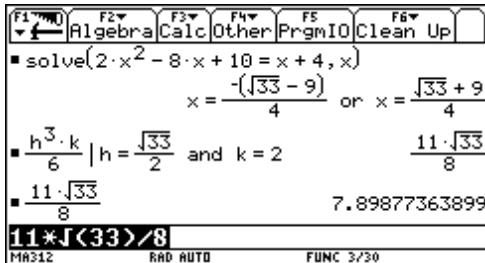


Abb.12

Es liegt nun fast auf der Hand, auch den ersten Schritt, die Berechnung der Breite, in allgemeiner Form an das CAS zu delegieren, so dass nur noch die Parameter zu der Parabel und der Geraden angegeben werden müssen.

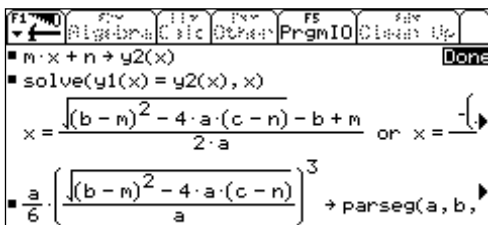


Abb.13

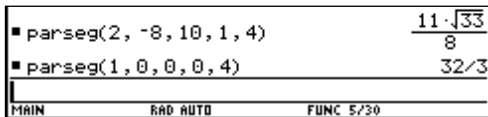


Abb.14

Bis hierhin sollte und kann auch in Kursen auf grundlegendem Niveau gegangen werden. Eine grundlegende Strategie zur Berechnung von krummlinig berandeten Flächen wird zunächst ‚zu Fuß‘ festigend geübt, ehe die Weiterarbeit mit dem CAS den Umgang mit Variablen, Termen und Funktionen schult und ein weitreichendes Ergebnis (Satz über Parabelsegmente) erzeugt. Es muss hervorgehoben werden, dass hiermit durch Technikeinsatz ein Inhalt allen Schülern durch Eigentätigkeit zugänglich wird, eine Eigentätigkeit, die Strategiewissen und Variablenverständnis beinhaltet und weniger syntaktisches Umformen von Termen. In Kursen auf erhöhtem Niveau sollte man aber auch immer mal wieder die Frage danach stellen, ob es nicht auch anders geht. Ziel ist dann eben nicht mehr die Sicherung eines Ergebnis (es ist ja bewiesen), sondern weiterführende Einsicht in die grundlegende Struktur. Nicht zu vernachlässigen ist auch ein Urmotiv mathematischen Denkens und Handelns, nämlich die Suche nach eleganteren Lösungen, auch wenn dies nicht gerade im Zeitgeist kompetenzorientierter Fokussierungen liegt. Motivation zu einer Variation liefert hier z.B. die Tastache, dass die bisherige Lösung auf Technologieeinsatz angewiesen sind, pointiert gesprochen: Eine einfache Strategie wird mit hohem Aufwand umgesetzt, bössartiger formuliert: brute force and ignorance.

Das Überraschende bei den Parabelsegmenten ist ja, dass sehr unterschiedliche Formen letztendlich alle denselben Flächeninhalt besitzen. Wenn man die Formen irgendwie ‚formgleicher‘ machen könnte, bekommt man vielleicht auch Einsicht und Ideen.

Hier hilft ein Blickwechsel, der eigentlich schon bei der Einführung der Bestimmung krummlinig berandeter Flächen, die von zwei Funktionen gebildet werden, vorgenommen werden sollte. Statt der Schnittstellen der Funktionen f und g werden die Nullstellen der Differenzfunktion $d = f - g$ betrachtet. Damit ist die Bestimmung des Inhalts der Fläche zwischen zwei Funktionen auf die ja vorher behandelte Bestimmung der Fläche zwischen einer Funktion und der x -Achse zurückgeführt. Auf das hier vorliegende Problem ergibt sich

Aufgabe 3

f ist eine beliebige Parabel, g eine beliebige Gerade. Es gilt: $d(x) = g(x) - f(x)$.

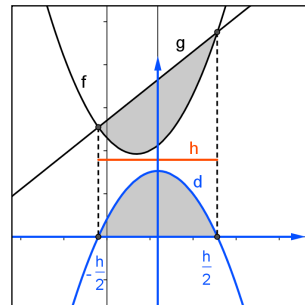


Abb.15

- Begründen Sie, dass die beiden grauen Flächen gleich groß sind.
- Benutzen Sie nun das „neue“ Koordinatensystem, und entwickeln Sie eine Gleichung von d in diesem System. Beweisen Sie damit den Satz vom Parabelsegment.

Mit dieser Transformation werden alle Segmente zu derselben Parabel augenscheinlich ‚ähnlicher‘, sie werden symmetrisiert (fundamentale Heuristik), alle sind achsensymmetrisch! Dass sie alle kongruent sind, ist nicht unmittelbar zu sehen und wird zunächst Ergebnis der Rechnung, die infolge der Symmetrien auch wesentlich übersichtlicher und weniger aufwändig ist.

Mit $d(x) = -ax^2 + b$ und den bekannten Nullstellen von d , erhält man

$$d(x) = -ax^2 + \frac{ah^2}{4}$$

Für den Flächeninhalt des Segments erhält man dann:

$$2 \cdot \int_0^{h/2} d(x) dx = 2 \cdot \left[-\frac{a}{3}x^3 + \frac{ah^2}{4}x \right]_0^{h/2} = \frac{ah^3}{6}$$

Eine Idee, ein Blickwechsel, führt zu einer starken Reduktion der Termkomplexität, das Problem wird mit vertretbarem Aufwand ‚zu Fuß‘ lösbar! Dieser Blickwechsel leistet aber noch mehr: Die Differenzfunktion d ist immer eine Parabel und hat unabhängig von der Lage des Segmentes immer denselben Streckfaktor (mit umgekehrten Vorzeichen), weil ja von der Ausgangsfunktion nur etwas Lineares abgezogen wird. Sie hat auch immer denselben Abstand zwischen den Nullstellen, nämlich die Breite des Segments. Damit sind die

Segmente kongruent, alle Parabelsegmente haben denselben Flächeninhalt. Der Nachweis der Flächengleichheit gelingt ohne weitere Rechnung.

Mit einer Dynamischen Geometrie-Software (DGS), wie sie z.B. beim TI-Nspire™ implementiert ist, kann der Sachverhalt vollständig geometrisch konstruiert und dann dynamisiert werden (Streifen verschieben), so dass die Flächengleichheit sehr schön einsichtig wird. Der besseren Visualisierung wegen, wird $f(x) = x^2 + 1,5$ betrachtet.

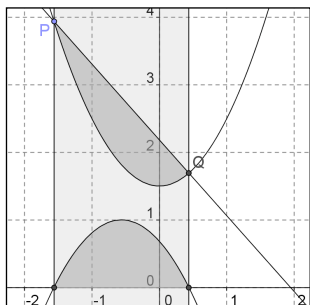


Abb. 16

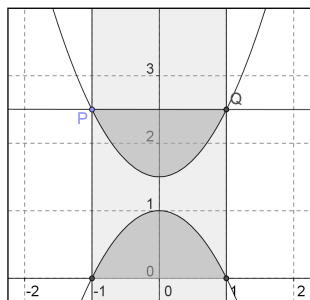


Abb. 17

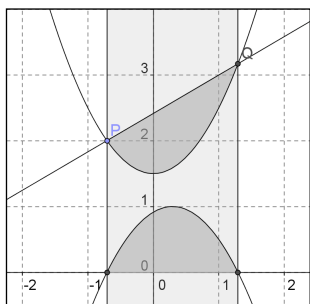


Abb. 18

Ein genauere Blick sichert uns tiefere Einsicht und elegantere, einfachere Lösungen!

Die Untersuchung von Parabelsegmenten hat auch eine historische Dimension. Im Rahmen seiner Untersuchungen zur Quadratur der Parabel, erhielt Archimedes folgendes Ergebnis:

Aufgabe 4

Sei f eine beliebige Parabel und AB eine Sehne mit dem Mittelpunkt D . Zieht man durch D eine Parallele zur Symmetrieachse bis zum Schnittpunkt C mit der Parabel, so verhält sich der Inhalt des Parabelsegmentes zum Inhalt des Dreiecks ABC wie 4:3.

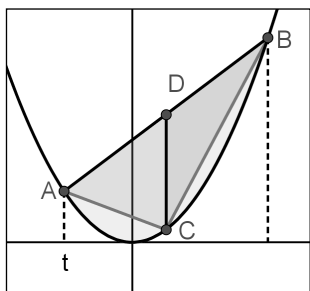


Abb. 19

$f(x) = k \cdot x^2$, Breite des Segments: h ; es ist zu zeigen, dass der Inhalt des Dreiecks ABC nur von k und h abhängt, aber nicht von t .

(1) Die beiden Dreiecke ACD und CBD haben denselben Flächeninhalt, weil sie dieselbe Grundseite CD und dieselbe

Höhe $h/2$ haben. Damit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC :

$$F_{ABC} = \frac{h}{2} \cdot CD$$

(2) Es bleibt die Bestimmung von CD .

Das CAS wird wieder die Rechnungen übernehmen, wir müssen aber Ansätze finden. Diese sollten Schüler selbstständig erarbeiten, dafür muss Zeit gegeben werden, Zeit, die man mit den Berechnungen auf Knopfdruck wieder hereinholt. Wichtig ist, dass die Ansätze und Strategien dokumentiert werden. Wo früher Rechenkaskaden die Dokumentationen prägten, müssen nun Ansätze, Strategien und Interpretationen die Dokumentationen prägen. Dies könnte ungefähr so aussehen:

(A) Die Länge von CD ist die Differenz der y -Koordinaten von C und D .

(B) Die y -Koordinate von C ist: $k(t + \frac{h}{2})^2$.

(C1) Die y -Koordinate von D ist: $\frac{1}{2} \cdot (k(t+h)^2 + kt^2)$

(C2) Gerade g_{AB} durch A und B ;

$$y\text{-Koordinate von } D \text{ ist: } g_{AB}(t + \frac{h}{2})$$

(C1) bedarf eines gewissen Blicks, es muss erfasst werden, dass die y -Koordinate von D gerade das arithmetische Mittel der y -Koordinaten von A und B ist. Die Berechnung ist dafür dann auch ‚zu Fuß‘ machbar.

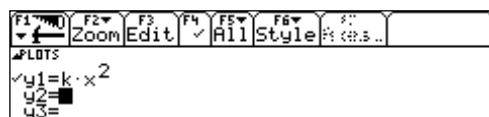


Abb. 20

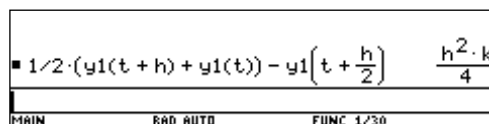


Abb. 21

(C2) bedarf weniger einer zündenden Idee, Geraden durch zwei Punkte und Funktionswerte bestimmen, sollten Standard sein. Dafür ist hier der Rechenaufwand höher.

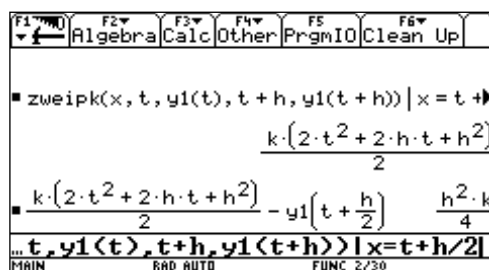


Abb. 22

(3) Die Fläche des Dreiecks ABC beträgt

$$\frac{4}{3} \cdot F_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h^2 k}{4} = \frac{kh^3}{6} = F_{\text{Segment}}$$

Anmerkungen:

(1) ist sicher am schwierigsten zu sehen, weil auch der geometrische Blick, sozialisationsbedingt und curricular gestützt, meist wenig ausgeprägt ist. Es ist aber wieder eine ähnliche Heuristik wie bei Aufgabe 3. Eine ‚schiefe‘ Fläche wird in zwei Flächen zerlegt, deren Inhalt einfacher zu bestimmen ist.

Die Hilfslinien und farbigen Markierungen können hier eine zusätzliche Hilfe sein.

Die Lösungen mit dem CAS zu (C) zeigen, dass tatsächlich eine sprachnahe Formulierung („y-Koordinate von D minus y-Koordinate von C“) ausreicht, um erfolgreich das Problem zu lösen, wenn man funktional mit dem CAS arbeitet. Der auf Verständnis bezogene Kern liegt eben im Ansatz und der Strategie! Sicherer Umgang mit Funktionen und funktionales Denken dominieren vor syntaktischem Arbeiten mit Termen. Ist das noch bzw. schon Mathematik? Aber ja!

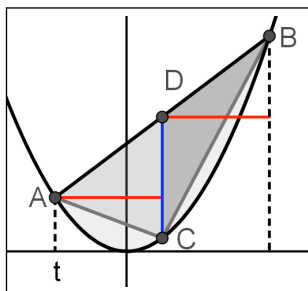


Abb.23

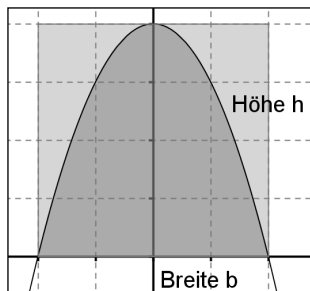


Abb.24

3. In einer etwas modifizierten Form und mit Einschränkung auf einen Spezialfall ist der Satz von Archimedes für Kurse auf grundlegendem Niveau einfacher zugänglich:

Die Fläche unter dem Parabelbogen ist zwei Drittel der Fläche des Rechtecks aus der Höhe h und der Breite b der Basis der Parabel.

Ist nun alles geklärt?

(1)

Wenn man viele Geraden zeichnet, die die Segmente erzeugen, erhält man nebenstehendes Bild. Da entsteht ja wieder eine Parabel?!

Was ändert sich an den Geradenbild, wenn man die Segmentbreite verändert?

Wie sieht das Geradenbild aus, wenn man zu $f(x) = k \cdot x^2$ Segmente der Breite 3 durch $(1 | f(1))$ skizziert?

Wie sieht das Geradenbild aus, wenn man zu $f(x)=0,5 \cdot x^2$ Segmente beliebiger Breite durch $(1 | f(1))$ skizziert? (vgl. Abb.25)

(2)

Wenn man $f(x) = x^2$ durch $f(x) = x^4$ ersetzt, gilt dann ein analoger Satz?

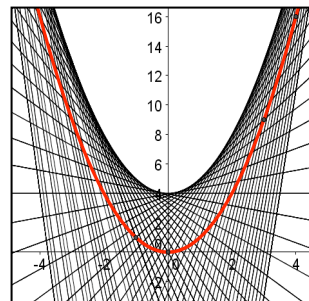


Abb.25

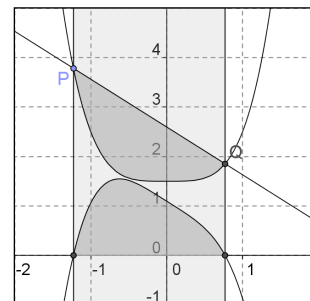


Abb.26

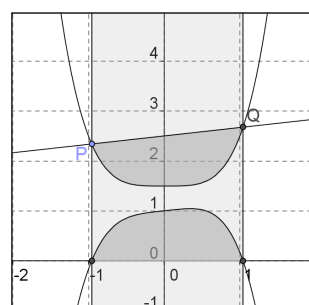


Abb.27

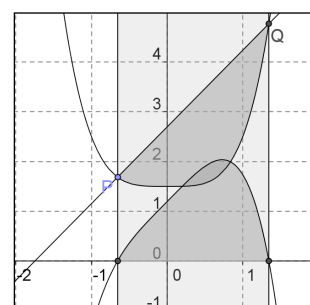


Abb.28

Wohl nicht. Woran liegt das? Gibt es ein kleinstes oder größtes Segment?

**Hört denn das Fragen in der Mathematik nie auf?
Hoffentlich nicht! Günter Steinberg**

Autor

Henning Körner, Oldenburg (D)
Studienseminar Oldenburg f.d. Lehramt an Gymnasien
hen.koerner@t-online.de