

► Tipps und Tricks: Binomialverteilung und dreimal-mindestens Aufgabe

Martin Kesting



Betrachtet wird eine Bernoulli-Kette der Länge n . Typische Aufgaben, in denen n gesucht ist, lauten etwa so:

Wie viele Versuche benötigt man mindestens, um bei einer Trefferwahrscheinlichkeit $p=0.3$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 5 Treffer zu erreichen?

Die Binomialverteilung kann mit Befehlen der Art **binomPdf** und **binomCdf** oft nur näherungsweise berechnet werden. Für eine exakte Formel ist es im Allgemeinen eine gute Idee, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu betrachten, also "höchstens 4" statt "mindestens 5" Treffer:

Die Wahrscheinlichkeit bei n Versuchen höchstens 4 Treffer zu erhalten ist

$$\text{binomcdf}(n) := \sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Der Befehl `binomCdf` sollte gleichwertig sein, liefert aber zum Beispiel für $n=10$ eine Abweichung:
`binomCdf(10, p, 4) - binomcdf(10)` -> $-4.93E-11$
 Offenbar wird eine Näherungsformel verwendet.

Abb.1

Der Versuch die Aufgaben mit Hilfe der fertigen Formeln per `solve`-Befehl zu lösen scheitert daher grundsätzlich. Die exakte Formel kann helfen:

`solve(1 - binomCdf(n, p, 0.4) >= 0.9, n)`
 -> `binomCdf(n, 0.3, 0.4) <= 0.1`
 liefert keine Lösung, auch mit der exakten Formel scheitert `solve` an der Ungleichung, kann aber die Gleichung für den Grenzfall lösen:
`solve(1 - binomcdf(n) = 0.9, n)` -> $n = 24.515276808$
 Die Lösung ist demnach $n=25$, denn
`1 - binomCdf(24, p, 4)` -> 0.888924776739 und
`1 - binomCdf(25, p, 4)` -> 0.909528081446

Abb.2

Dieser Weg, eine letztlich sehr komplizierte Gleichung per `solve` lösen zu lassen, wobei zuvor die Bernoulli-Formel eingegeben wird, ist nicht unbedingt schneller, als gleich auf die Näherungsformel und systematisches Probieren zu setzen:

n	1 - binomcdf(n, 'p', 0.4)
23	0.859451246552
24	0.864397033041
25	0.888924776739
26	0.909528081446
27	0.926697502035

Abb.3

Der Befehl `seq()` gestattet die Ausgabe der Wahrscheinlichkeiten für verschiedene n in einer Tabelle.

Autor

Martin Kesting, Ilmenau (D)