

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial
-------------------	---------------	-----------------	------------------------	----------------

Bilder analysieren und rekonstruieren

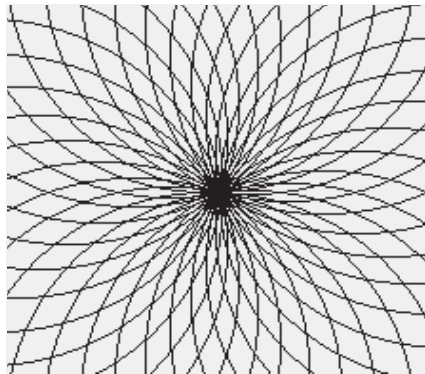
Bärbel Barzel, Freiburg

Andreas Pallack, Soest

Franz Schlöglhofer, Linz, Gmunden (Österreich)



Wie kann man die Bilder erzeugen?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe I/II (je nach gewähltem Bild)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:

Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Basiswissen aus dem Bereich der jeweils genutzten Funktionsarten und geometrischen Objekte

Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:

Bei allen Bildern geht es darum, dass Schülerinnen und Schüler Muster analysieren, Ideen zu ihrer Reproduktion entwickeln und diese realisieren.

Die weiteren Ziele sind je nach gewähltem Bild unterschiedlich.

Bei Bildern mit Funktionsgraphen geht es darum, den Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graphik zu vertiefen.

Bei Bildern mit geometrischen Konstruktionen geht es um das Erkennen und Reproduzieren der konstruktiven Elemente.

Rolle der Technologie (TI-Nspire™, TI-Nspire™ CAS):

Der Rechner dient als Werkzeug zum Ausprobieren und Optimieren eigener Ideen. Die individuellen Kreationen können, ähnlich wie bei der Textverarbeitung auf dem Computer, als Dokument abgespeichert und evtl. ausgetauscht werden.

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:

- Graphisch: Durch das Verändern von Graphen können Terme manipuliert werden.
- Algebraisch: Die Lernenden erkennen den Graphen und übersetzen ihn in einen Term.

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:

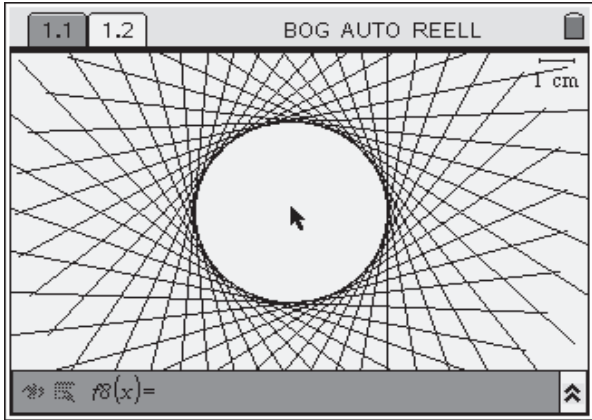
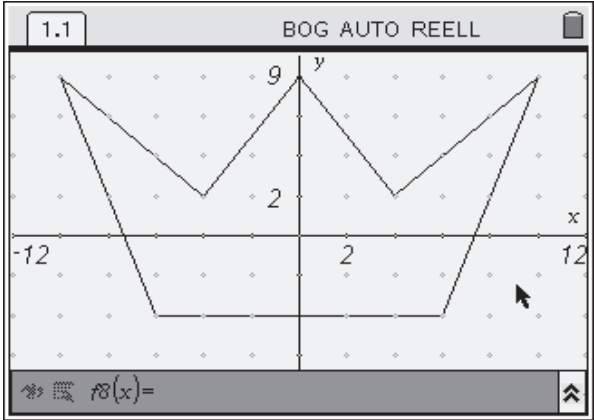
- Es bietet sich an, die Schülerinnen und Schüler in kleinen Gruppen arbeiten zu lassen und die Ergebnisse im Plenum oder in Expertengruppen zu vergleichen.

Hinweis:

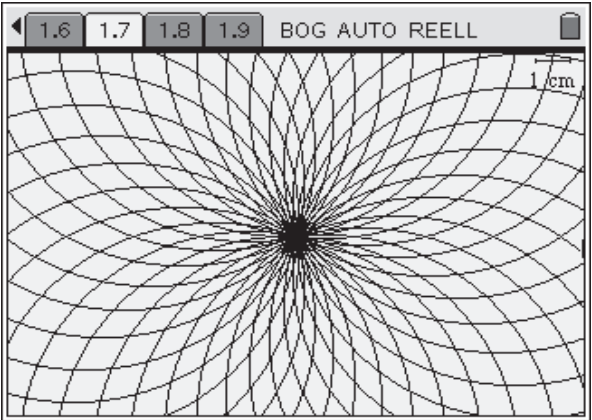
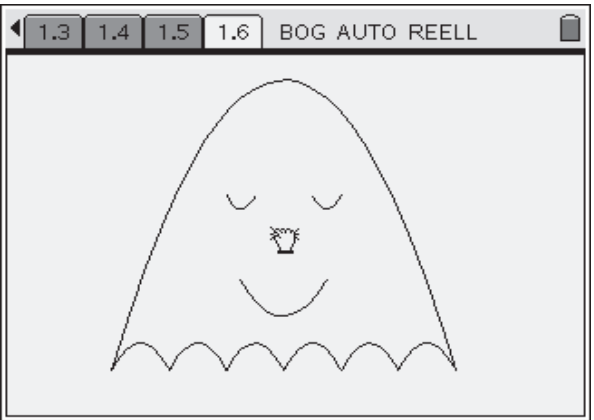
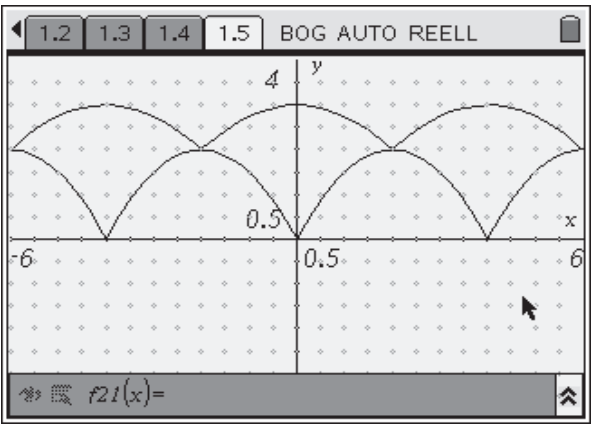
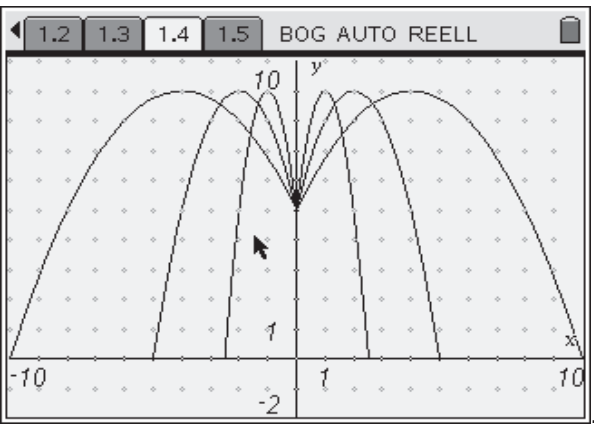
Die Bilder wurden so ausgewählt, dass sie ein breites fachliches Spektrum abbilden. Im Unterricht bietet es sich nicht an, die Lernenden alle Bilder erzeugen zu lassen. In Abhängigkeit von der Klassenstufe und der Zielsetzung sollte eine Auswahl getroffen werden.

Erzeuge die Bilder

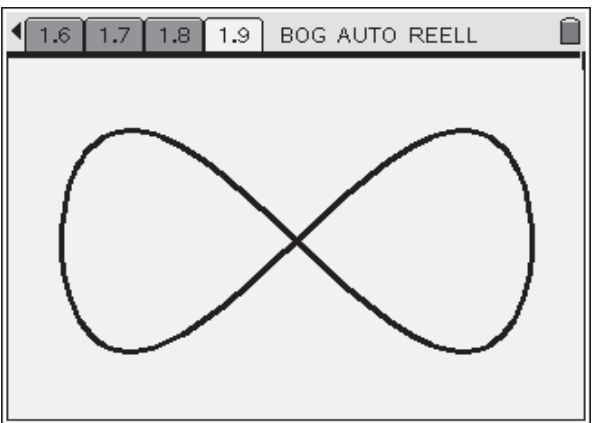
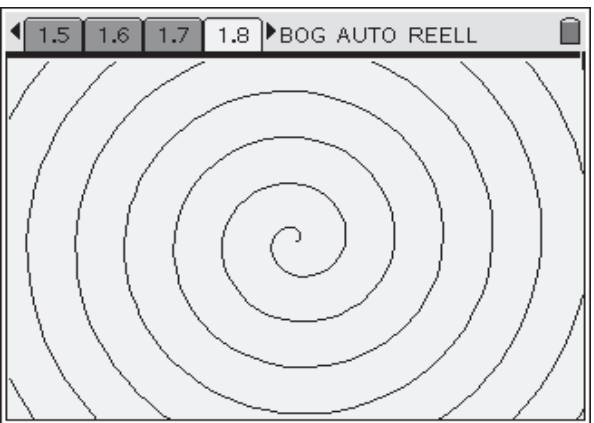
a) mit Hilfe von Geraden und ggf. Kreisen:



b) mit Hilfe von Parabeln oder Kreisen:



c) in der Polarkoordinaten- oder Parameterdarstellung



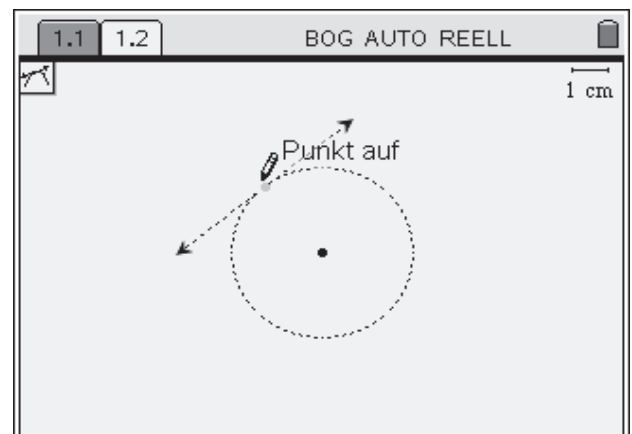
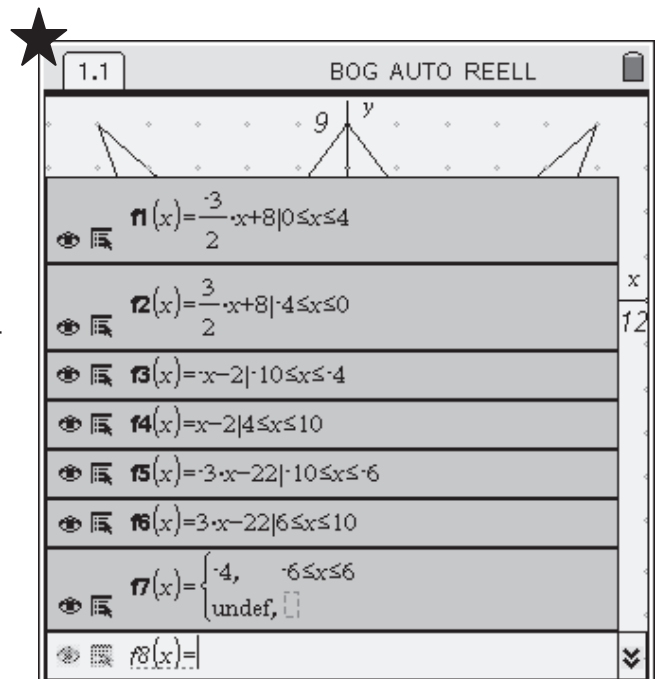
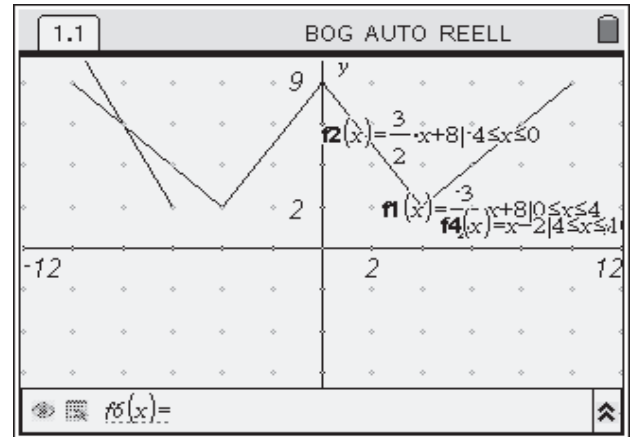
Sämtliche Bilder werden in der Applikation **Graphs & Geometry** erstellt. Für das erste Bild *Krone* benötigen Sie die Grafiksicht (Ansicht, Grafiksicht), die in der Regel standardmäßig eingestellt ist. Stellen Sie, bevor Sie beginnen, das **Koordinatensystem** so wie im Bildschirmfoto ein.

Das Bild 1.1: *Krone* wird mit Hilfe von abschnittsweise definierten Geraden erstellt (Funktionen, abschnittsweise). Für Schülerinnen und Schüler ist es oft einfacher, jeden Abschnitt einzeln zu behandeln. Entsprechend bedienen wir uns hier des Operators |. Im Bild rechts wird gezeigt, wie er angewendet wird, um Geradenabschnitte zu definieren.

Natürlich werden die Lernenden nicht immer mit dem ersten Versuch treffen. Ein wesentlicher Vorteil bei der Arbeit mit dem Rechner (man könnte die Funktionen ja auch ohne Rechner bestimmen) zeigt sich genau an dieser Stelle: Man kann die eigenen Überlegungen unmittelbar überprüfen, Fehler sind konstruktive Elemente eines Argumentationsprozesses.

Alle Funktionsabschnitte zur Definition der *Krone* finden Sie in der Abbildung rechts.

Das zweite Bild *Geradenschar* wird in der Ansicht **Ebenengeometrie** erstellt. Konstruieren Sie zuerst einen Kreis (Linien, besondere). Auf dem Kreis konstruieren Sie eine Tangente ([menu], 6, 7: Tangente).

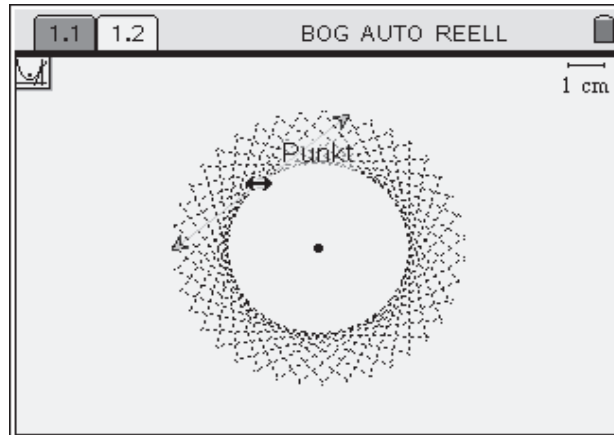


Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial
-------------------	---------------	-----------------	------------------------	----------------

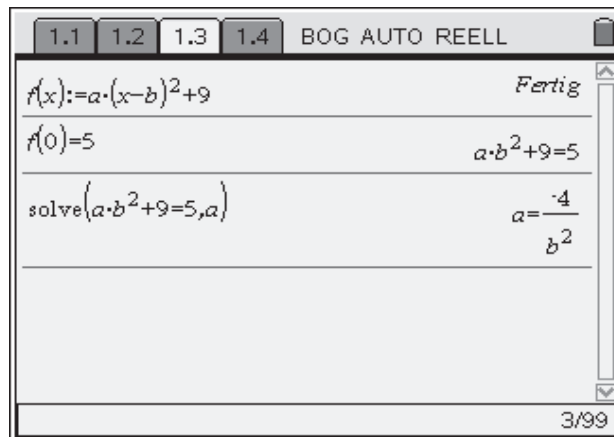
Mit Hilfe der Option **geometrischer Ort** wird die Geradenschar erstellt.

Das Bild ergibt sich also durch eine Kreistangente, die entlang des Kreisrandes bewegt wird.

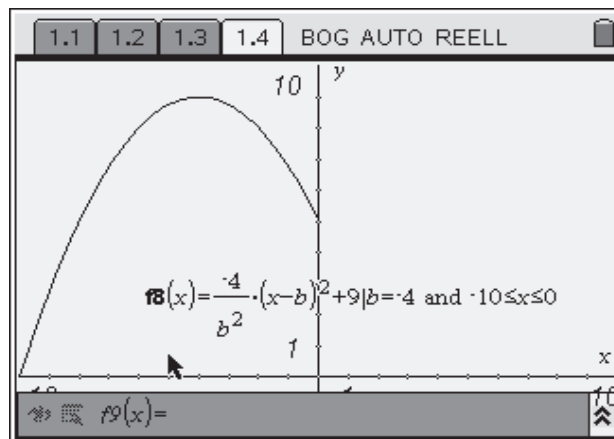
Die Länge des angezeigten Tangentenabschnitts kann verändert werden. So tastet man sich Schritt für Schritt an das Aussehen des gezeigten Bildes heran. Um es vollständig nachzubilden, müssen einige **Objekte versteckt** werden.



Beim Bild *Springbrunnen* könnte man ähnlich wie bei der Krone explorativ vorgehen. Da sich allerdings eine Systematik offenbart, wurde hier ein anderer Weg gewählt. Wenn Sie diesen Weg auch beschreiten wollen, öffnen Sie eine neue Seite mit der **Applikation Calculator**.

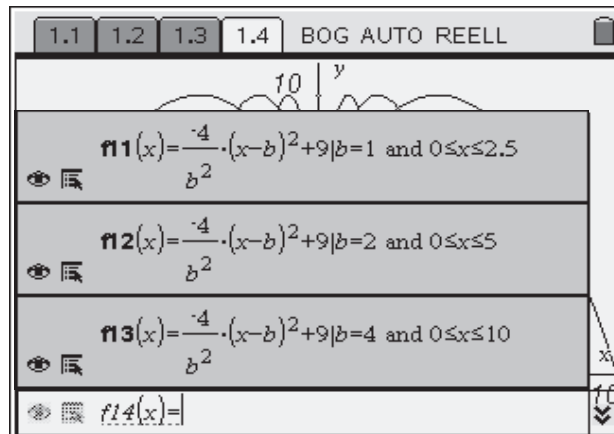


Die Scheitelpunkte aller Parabeln haben die y-Koordinate 9. Darüber hinaus verlaufen alle Parabeln durch den Punkt (0|5). Das kann man nutzen (siehe Rechnung rechts). Man erhält eine Parabelschar, die lediglich vom Parameter b abhängt (Ergebnis der Rechnung einsetzen in die Funktionsgleichung). Der SOLVE-Befehl kann jedoch in dieser Form nur mit TI-Nspire™ CAS ausgeführt werden.



Der Parameter b bestimmt die x-Koordinate des Scheitelpunktes. Durch Einsetzen der jeweiligen Koordinaten (rechts im Bild z. B. -4) ergibt sich nach und nach das gezeigte Bild.

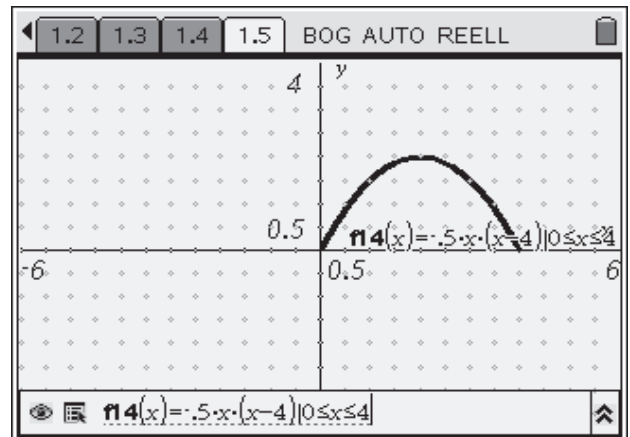
Rechts abgedruckt sind die Terme für den rechten Teil der Parabelschar. Die linken ergeben sich entsprechend.



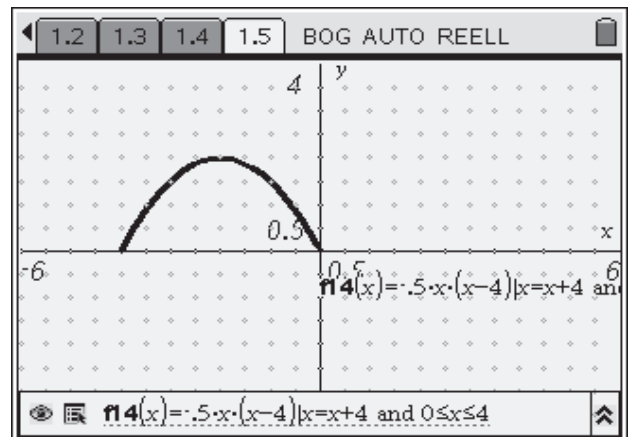
Man kann in der Regel nicht davon ausgehen, dass Schülerinnen und Schülern dieser elegante Lösungsweg einfällt. Es empfiehlt sich, die Schülerlösungen zu nutzen, um nach Synergien bei der Bestimmung der Funktionsgleichungen zu suchen. Daraus wird sich dann eine ähnliche Systematik ergeben, wie sie hier vorgeschlagen wurde.

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial
-------------------	---------------	-----------------	------------------------	----------------

Das Bild *Parabelbrücke* besteht aus zwei unterschiedlichen Formen von Parabelabschnitten. Bei der Konstruktion nutzen wir die Idee, die Abschnitte zu verschieben. Dazu wird ein erster Parabelabschnitt wie rechts gezeigt erstellt.

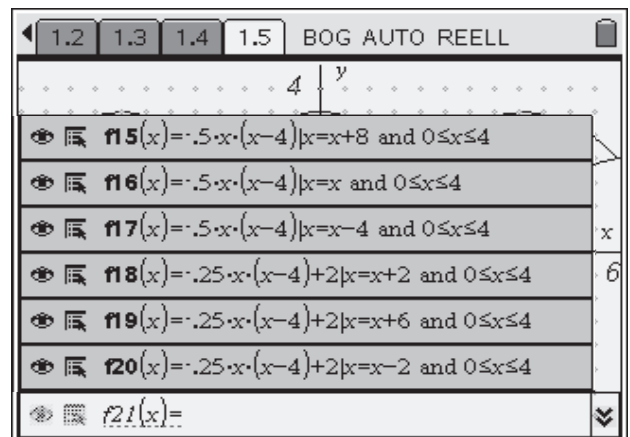


Beim Verschieben kann man sich eines Tricks bedienen: Man ersetzt die Variable x durch sich selbst und einen Summanden. Dadurch werden alle x in den Funktionstermen durch $x + a$ ersetzt, was einer Verschiebung in x -Richtung entspricht.



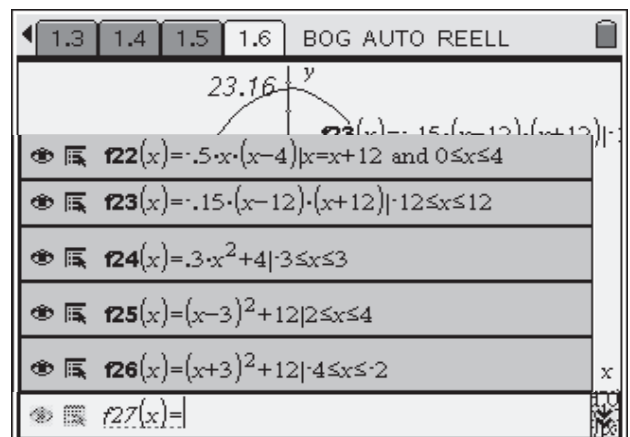
Gezeigt ist rechts die Verschiebung des ursprünglichen Bogens um 4 Einheiten nach links ($x = x + 4$).

In den 80er Jahren wurden Notationen wie $x = x + 4$ ausführlich diskutiert. Wir halten diese Notation nicht für schädlich, wenn Schülerinnen und Schülern die Bedeutung bewusst ist, die hier natürlich eine ganz andere ist, als z. B. in der Applikation **Calculator**.



Rechts finden Sie die noch ausstehenden Parabelabschnitte. f14 bis f18 beschreiben die unteren Parabelbögen, f18 bis f20 die oberen.

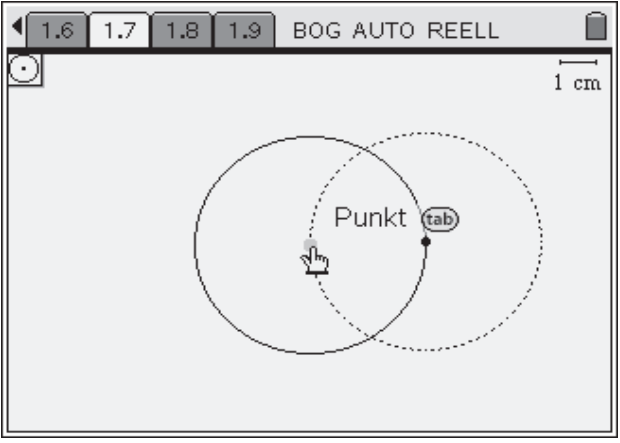
Das Bild *Schlafender Geist* unterscheidet sich wesentlich von den vorhergehenden Parabelbildern. So ist kein Koordinatensystem vorgegeben. Wir nutzen das hier aus, indem die Ergebnisse der *Parabelbrücke* übernommen werden. Die unteren Bögen des Geistes sind die erweiterten unteren Brückenbögen (siehe z. B. f22). Die anderen Parabelabschnitte wurden durch gezieltes Experimentieren gefunden. Von Vorteil (wegen der Symmetrie) ist es dabei, wenn der Geist sich an der y -Achse spiegelt.



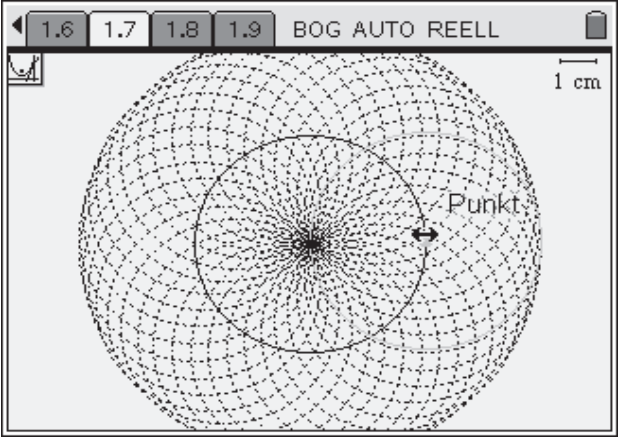
Zum Schluss werden die Koordinatenachsen ausgeblendet und die Nase mit Hilfe des Zeigers ([☑]) länger als 1 Sekunde drücken) erstellt.

Das Bild *Sonnenblume* wird ähnlich wie das Bild Geradenschar (siehe oben) erstellt. Statt einer Tangenten wandert jedoch nun der Mittelpunkt eines Kreises entlang des Randes (**geometrischer Ort**).

Die Radien der beiden Kreise sind identisch.

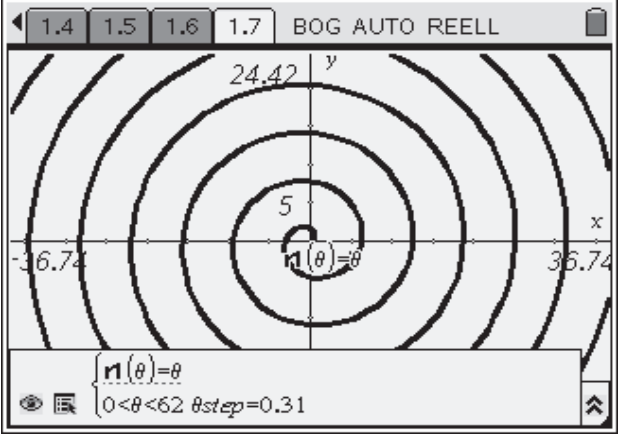


Durch Vergrößern des Basiskreises tastet man sich nach und nach an das vorgegebene Bild heran. Um es vollständig nachzubilden, müssen einige **Objekte versteckt** werden.

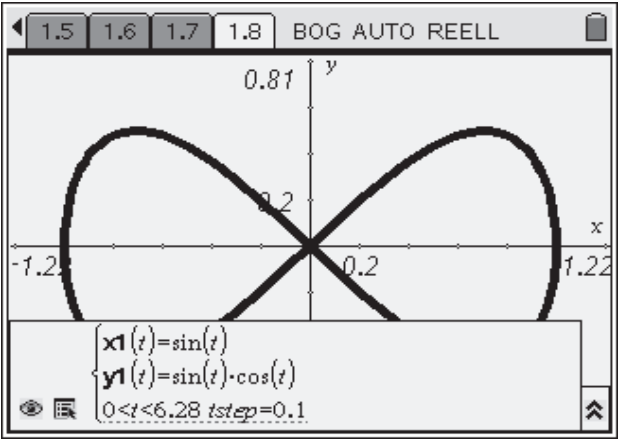


Die beiden letzten Bilder sind – im Vergleich zu den vorhergehenden – Exoten. Man benötigt für sie ein wenig Wissen über Koordinatensysteme.

Die *Spirale* wird durch den **Graphen einer Funktion in Polarkoordinatendarstellung** erzeugt. Die notwendigen Angaben finden Sie im Bildschirmfoto rechts.



Die *Schleife* wird durch den **Graphen einer Funktion in Parameterdarstellung** erzeugt. Die notwendigen Angaben finden sie im Bildschirmfoto rechts unten.

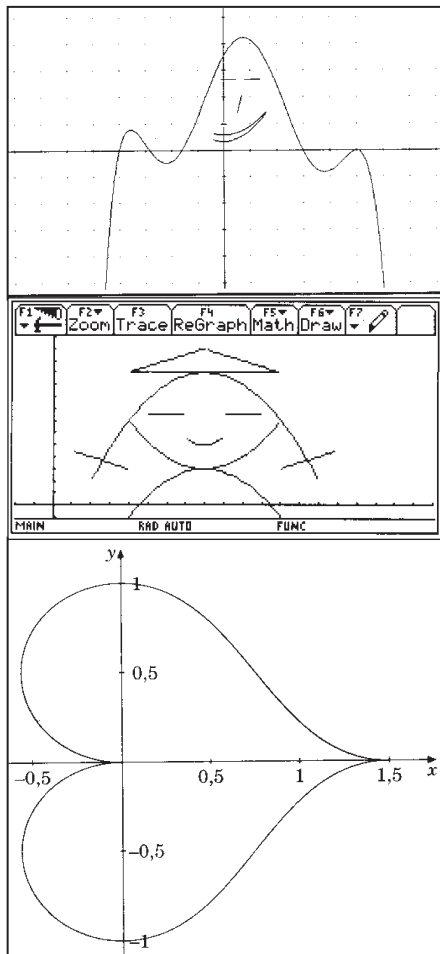


Wenn Schülerinnen und Schüler diese Koordinatensysteme noch nicht kennen, werden sie kaum in der Lage sein, die Funktionsterme selbstständig zu entwickeln. Doch auch das Vorführen des Entstehens dieser Bilder hat einen Mehrwert: Die Lernenden sehen, dass es weitere als die bekannten Koordinatensysteme gibt, und dass es je nach Situation günstig sein kann, ein anderes System zu wählen. Schließlich werden Positionen auf der Erde auch nicht in kartesischen Koordinaten gemessen.

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial
-------------------	---------------	-----------------	------------------------	----------------

Darstellung von Figuren im Mathematikunterricht

Seit damit begonnen wurde Mathematik-Software im Unterricht zu nutzen, wurde immer wieder die Darstellung von Funktionsgraphen als ein wichtiges Thema für den Computereinsatz angeführt. Mehrfach wurde versucht, diese Darstellungsform „spielerisch“ zu behandeln.



Dazu einige Beispiele: Der „Geist“ links in der Abbildung stammt von Paul Drijvers aus früher DERIVE-Zeit. Um diese Figur nachzubilden, ist einiges Wissen über Eigenschaften von Polynomfunktionen notwendig, also mathematisches Grundwissen, das wir unseren Schülerinnen und Schüler vermitteln wollen. Dies gilt auf anderer Ebene ebenfalls für die Figur aus dem Beitrag von Bärbel Barzel (linke Abbildung).

In der „Mathe-Welt“ (Mathematik lehren, Heft 130) wird allgemein auf Anwendungen mit Kurven (z. B. in der Computergraphik und in der Technik) eingegangen. Im Anschluss daran ist ein kleines Projekt vorgeschlagen („Das Liebesherz“). Durch geeignete Funktionen (Kreise, Polynomfunktionen) soll die Figur nachgebildet werden.

Wenn auch diese Form des Erstellens einer Figur noch nicht Anwenden von Mathematik ist, so kann damit eine motivierende Übungsphase im Mathematikunterricht verbunden sein. Das Erkunden von Eigenschaften von Funktionen kann in spielerischer Weise im Unterricht gesteuert werden. Das Ziel für die Lernenden ist nicht das Abarbeiten einer Übungssequenz zu bestimmten Funktionstypen sondern selbstständige Auseinandersetzung mit Funktionen und kreatives Arbeiten anhand selbst gewählter Figuren.

Neben Funktionsgraphen können auch parametrische Darstellungen oder Darstellungen in Polarkoordinaten thematisiert werden. Für diese flexible und viel verwendete Darstellungsform lassen sich an verschiedenen Stellen

des Mathematikunterrichts Beispiele finden. Die Parameterdarstellung bietet sich jedoch als ein „natürlicher“ Zugang an, wenn bereits entsprechendes Vorwissen aus Trigonometrie und Vektorrechnung vorhanden ist.

Literatur/Quellenangaben

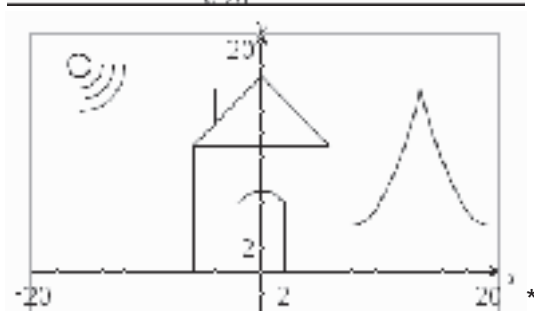
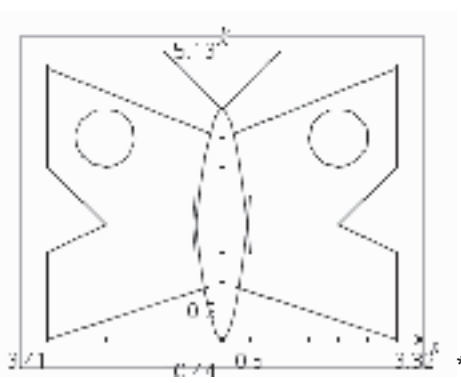
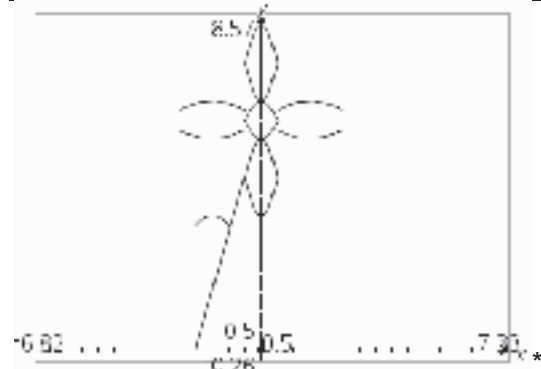
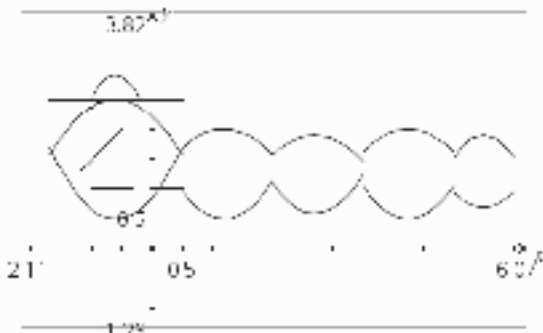
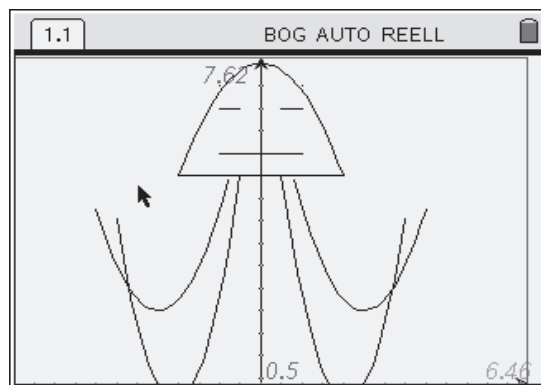
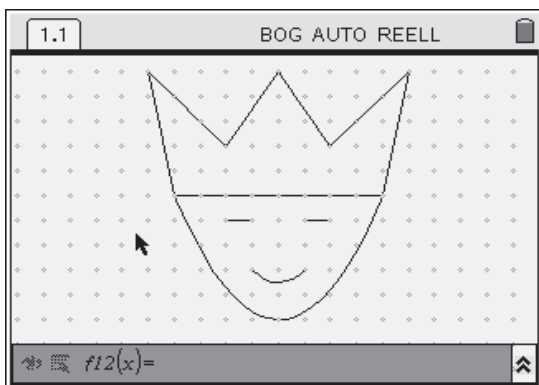
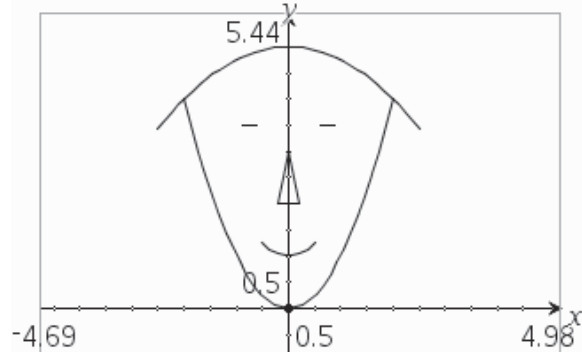
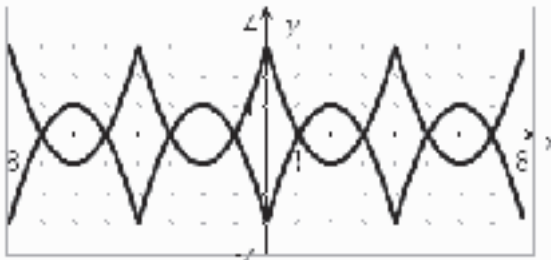
Barzel, B.; Bilder schaffen mit Graphen; Mathematik lehren – Sammelband Standards, Friedrich Verlag, 2007.

Arbeitsblatt aus Mathematik lehren, Heft 130.

Die Bilder 1.1, 1.4 und 1.5 von Seite 2 dieses Beitrags stammen von Franz Schläglhofer. Bild 1.6 wurde nach einer Idee von Claudia Werner erstellt. An einen Artikel von Andreas Pallack (Mustererkennung an ästhetischen Figuren. Sonderbeilage TI-Nachrichten 1/2007) wurden die Bilder 1.2 und 1.7 angelehnt.

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial
-------------------	---------------	-----------------	------------------------	----------------

Die folgenden Figuren sollen einfach Anregung sein für weitere Tätigkeit. Sie stammen aus dem Unterricht von Franz Schlöglhofer und wurden von Schülerinnen und Schülern der 5. B-Klasse des Gymnasium Ort, Gmunden selbstständig entworfen. Wiederum kann man versuchen, die Figuren nachzubilden oder auch selbst weitere Figuren entwerfen.



* Um diese Bilder exakt nachzubilden, benötigt man vertikal Streckenabschnitte. Diese lassen sich in der Parameterdarstellung erzeugen (siehe Beispiel rechts).

