Programme für den Stochastik-Unterricht

Karlo Achilles

Durch verschiedene Programme kann die Funktionalität der Graphikrechner für den Einsatz im Stochastik-Unterricht sinnvoll erweitert werden. Die nachfolgend vorgestellten, in TI-Basic verfassten Programme sind für die Hand des Lehrers geeignet. Die Programme können aber auch von Schülerinnen und Schülern benutzt und im Unterricht verwendet werden. Alle Materialien wurden im Unterricht erprobt.

In diesem Artikel wird ein Programm für den TI-83/84 zur gleichzeitigen Darstellung zweier Histogramme vorgestellt. Beschrieben wird darüber hinaus ein weiteres Programm, das die Berechnungen zu allen Testverfahren auf der Grundlage der Binomialverteilung $B_{n;p}$ durchführt (Alternativtest, rechtsseitiger- , linksseitiger- , zweiseitiger Test) und soweit möglich auch eine grafische Darstellung liefert. Die entsprechenden Programme können zusammen mit diesem Artikel von der Materialdatenbank herunter geladen werden. Dort finden sich auch weitere Beispiel-Programme mit erläuternden Beschreibungen zu anderen Themenbereichen.

Zwei Listen mit dem TI-83/84 darstellen

Der TI-83 bietet zunächst nicht die Möglichkeit, 2 Histogramme gleichzeitig darzustellen. Man kann sich mit einer „Pixel-Lösung" per Programm behelfen. Der entsprechende Befehl aus dem DRAW-POINTS-Menü lautet Pxl-On(Zeile,Spalte). Dabei ist die Anzahl der „Doppelrechtecke" wegen der Auflösung auf 19 beschränkt.
Ein Beispiel für die Verwendung der Pxl-On - Anweisung ist das Zeichnen der x-Achse mit zugehöriger Skalierung und Beschriftung:

x-Achse:	For(S,0,94):Pxl-On(55,S):End
Skalierung:	For(K,0,18):Pxl-On(56,2+5K)
	Text(57,5K,K):End

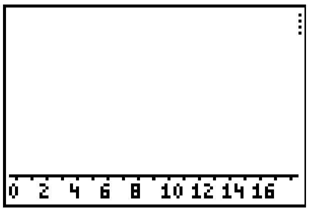

Abb.1

Das Ergebnis zeigt die Grafik in Abbildung 1, wobei dort die Ausgabe der Zahl 18 noch unterdrückt wurde, weil diese Zahl sonst nur teilweise dargestellt würde (die „8" überschreitet die rechte Grenze 94).

Für die Ausführung des Programms `ZWLISTEN.8xp` wird vorausgesetzt, dass in den Listen L2 und L3 zwei Verteilungen (mit k=0 bis maximal 18) vorliegen. Die Histogramme werden dann vom Programm automatisch unter Verwendung des Pxl-On - Befehls erzeugt. Als Maximum für die Darstellung wird der größte Wert unter beiden Listen angenommen mittels max(L2) STO A, max(L3) STO B und max(A,B) STO C. Dieses C wird der obersten Pixelzeile des Bildschirms zugeordnet. Diese Zeile hat die y-Pixel-Koordinate 0.

In den folgenden Beispielen wird die Hypergeometrische Verteilung mit der Binomialverteilung verglichen. Die Hypergeometrische Verteilung ist die dunkel dargestellte.

Dabei ist G die Gesamtzahl der Kugeln (in Formeln oft mit N bezeichnet); M ist die Anzahl der Kugeln der untersuchten Ausprägung und n ist die Anzahl der Ziehungen.

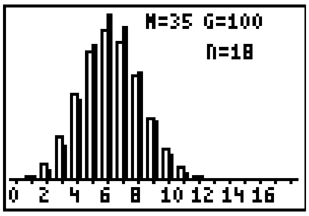

Abb. 2

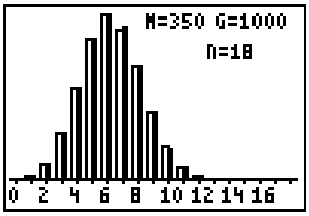

Abb.3

Man sieht in den Abbildungen 2 bzw. 3, dass sich beide Verteilungen bei großen Werten für G (bzw. N) einander annähern. In den Abbildungen 4 und 5 ist hingegen zu sehen, dass eine Erhöhung der Zahl n (Anzahl der Ziehungen) keine Angleichung der Verteilungen bewirkt.

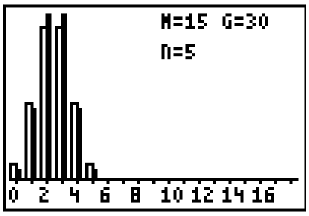

Abb. 4

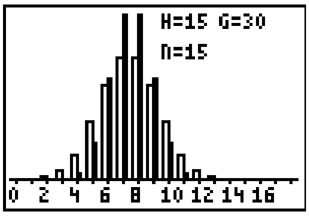

Abb. 5

Im Unterricht kann auf diese Weise die Formulierung der nachfolgenden Regel motiviert werden:

> *Die Binomialverteilung approximiert die Hypergeometrische Verteilung umso besser, je größer N (Gesamtzahl der Kugeln) gegenüber n (Anzahl der gezogenen Kugeln) ist.*

TI-83/84 Programm zum Hypothesen-Test

Das Programm `HYPOTST.8xp` führt die Berechnungen zu gängigen Testverfahren (Alternativtest, rechtsseitiger- , linksseitiger- , zweiseitiger Test) auf der Grundlage der Binomialverteilung $B_{n;p}$ durch und liefert soweit möglich auch eine grafische Darstellung.

Eingabe- und Ausgabe

Eingegeben werden müssen für den Programmablauf zunächst der Stichprobenumfang n, die Wahrscheinlichkeit p_0 der Nullhypothese H_0 sowie die Wahrscheinlichkeit p_1 der Alternativhypothese H_1. Der Stichprobenumfang n darf maximal 998 betragen, denn mit n=998 erhält man eine Tabelle mit 999 Elementen, da auch k=0 tabelliert werden muss. Der TI-84 erlaubt nur 999 Listenelemente.
Mit Alfa-li wird die Schranke für einen linksseitigen Test (z.B. $\alpha_{li} \leq 0{,}05$) und mit Alfa-re die Schranke für einen rechtsseitigen Test (z.B. $\alpha_{re} \leq 0{,}05$) abgefragt. Bei einem zweiseitigen Test gibt man beide Schranken ein (z.B. 0,25 und 0,25).

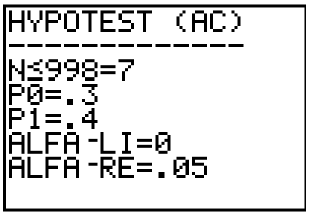

Abb. 6

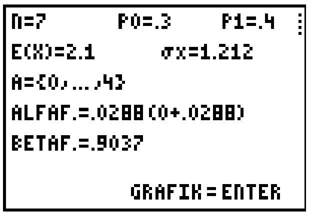

Abb.7

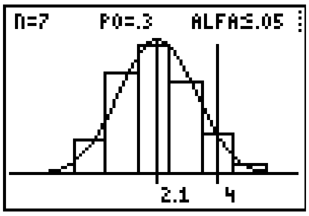

Abb. 8

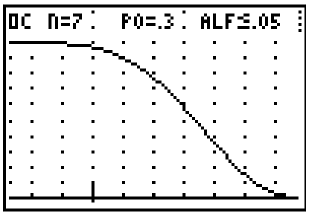

Abb.9

Berechnet werden der Annahmebereich A sowie der α-Fehler und β-Fehler, ferner der Erwartungswert μ=E(X) und die Standardabweichung σ. In der graphischen Darstellung sind μ sowie die Grenzen des Annahmebereichs A als vertikale Linien zu sehen.

Auf Wunsch kann eine Normalverteilungskurve über die graphische Darstellung der Binomialverteilung gelegt werden. Am Schluss wird noch eine OC-Kurve gezeichnet. Hierbei werden die 95 Pixels des x-Bereichs so verwendet, dass bei einer Schrittweite von $\Delta p_1=0{,}01$ gilt: $0{,}03 \le p_1 \le 0{,}97$.

Einschränkungen bei der grafischen Darstellung:
Da beim TI-83/84 in der Horizontalen 95 Pixel zur Verfügung stehen, kann eine Grafik nur dann gezeichnet werden, wenn die Anzahl der darzustellenden Rechtecke kleiner oder gleich 47 (= 95 DIV 2) ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in der Grafik nur die 3-fache σ-Umgebung dargestellt (Breite 6σ), weil außerhalb dieser Umgebung die Rechtecke verschwindend klein werden.

Zu bedenken ist aber, dass der TI-83/84 die Histogramme immer abhängig von Xmin, Xmax und Xscl zeichnet. So kann es passieren, dass der jeweilige k-Wert sich nicht in der Mitte des zugehörigen Rechtecks befindet. Ein Beispiel zeigt Abbildung 10 mit n=4, p_0=0.6, Xmin=-1.3, Xmax=5.1, Xscl=1.

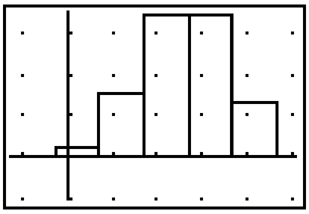

Abb. 10

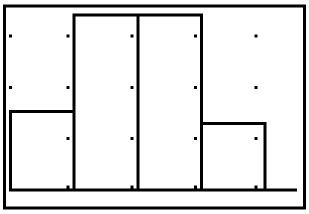

Abb.11

Der Rechner geht dabei offenbar so vor: Das erste Rechteck (k=0) beginnt genau dann bei Xmin (ganz links), wenn -1<Xmin≤0 ist. Ist Xmin≤-1, so werden links 1 oder mehrere Rechtecksplätze „freigehalten". Umgekehrt werden Rechtecksplätze entfernt, sofern Xmin>0 ist. Dies zeigt die Abbildung 11 mit Xmin=0.1, Xmax=4.6, Xscl=1.

Eine übersichtliche Darstellung erhält man also dann, wenn Xmin genau zwischen zwei ganzen Zahlen lieg. Will man das Rechteck zu k=0 am linken Rand beginnen lassen, so wählt man Xmin=-0,5. Bei k=17 wählt man Xmin=16,5 . Für die 3σ-Umgebung bedeutet dies: Der gesamte Bereich der x-Achse wird festgesetzt auf das Intervall [round(μ-3σ)-0,5; round(μ+3σ)+0,5]. Durch diesen Trick gelingt es die Histogramme wunschgemäß zu zeichnen.

Die Intervallbreite darf nun höchstens 47 Pixeleinheiten betragen, d.h. es gilt stets round(μ+3σ)+0,5 – (round(μ-3σ)-0,5) ≤ 47, was identisch ist mit:

$$\text{round}(\mu+3\sigma) - \text{round}(\mu-3\sigma) - 46 \le 0\,.$$

Dies stellt eine Bedingung für die Wahl der Werte zu n und p_0 dar. Gibt man die Werte für p_0 vor, so lassen sich mittels Tabellen die für eine Grafik „zulässigen" n-Werte ermitteln. Wegen der Symmetrie von σ gilt dabei für p_0=0,6 die gleiche Einschränkung wie für p_0=0,4 (etc.). Einige Beispiele:

p_0=0,1	n≤654, aber es sind auch n=656 bis 663, 668 bis 671, 680 möglich
p_0=1/6	n≤428, auch n=431 bis 433, 438 möglich
p_0=0,2	n≤371, auch n=374 bis 376, 380 möglich
p_0=0,3	n≤284, auch n=286, 287, 290 möglich
p_0=0,4	n≤248, auch n=250, 255 möglich
p_0=0,5	n≤236, auch n=238, 240, 242, 244 möglich

Bei großen Werten für n (etwa n=654 bei p_0=0,1 - vgl. Abb. 12) gibt es in der Regel einen MEMORY-Error, weil die für die Grafik erforderlichen Listen der Werte zu k und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten P(X=k) zu viel Speicherplatz belegen.

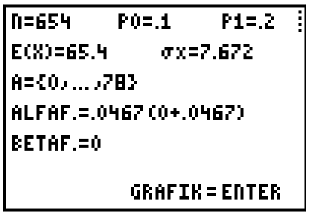

Abb. 12

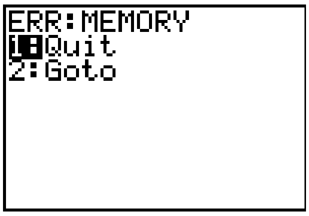

Abb. 13

Beispiele zum Programmablauf
Die nachfolgenden Abbildungen zeigen einige typische Programmdurchläufe. Abbildung 14 bis 16 zeigen die Berechnungen zu einem zweiseitigen Test, die Abbildungen 17 bis 18 zeigen einen linksseitigen Test.

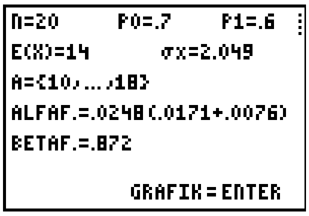

Abb. 14

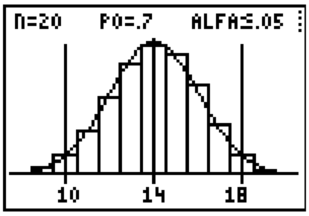

Abb. 15

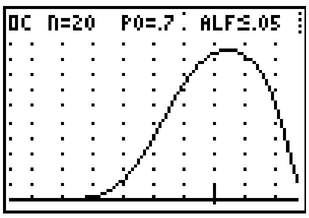

Abb. 16

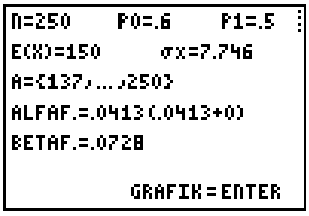

Abb. 17

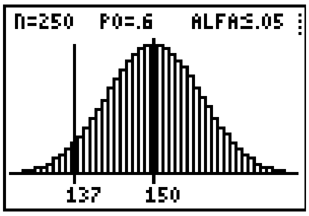

Abb. 18

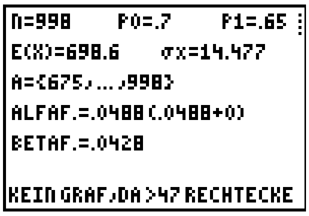

Abb. 22

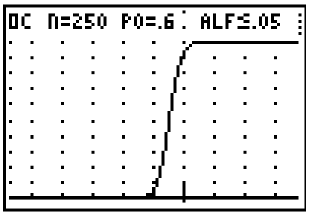

Abb. 19

Das Programm berechnet auch für größere Werte für n einen Annahmebereich. Da die Anzahl der Rechtecke zu groß ist, wird aber keine Graphik angezeigt.

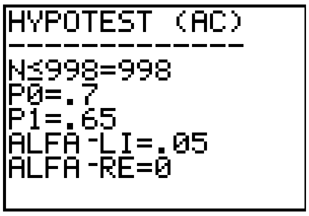

Abb. 20

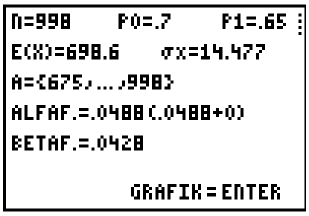

Abb. 21

Übersicht über die im Programm verwendeten Variablen

N	Stichprobenumfang n
P / Q	p_0 (Nullhypothese H_0), p_1 (Alternativhypothese H_1)
A / B	α linksseitig (z.B. 0,05), α rechtsseitig
W / Z	linke / rechte Grenze des Annahmebereichs A
C / D	α-Fehler, β-Fehler
I / J	α-Fehler links / rechts
M	μ (Erwartungswert)
S	σ (Standardabweichung)
F	Maximum der Verteilung (max(L_3))
H / L	Pixelposition von W / Z (linke / rechte Grenze)
R	Pixelposition von M (Erwartungswert)
U / V	round(μ+3σ) bzw. round(μ-3σ)
L_1	k-Werte von 0 bis n
L_2	Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$
L_3	Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$

Autor:
Karlo Achilles,
KGS Weyhe-Leeste
karlo.achilles@gmail.com