Markus Paul, BHAK Schwaz

Visualisierung der Stammfunktion

Eine große Hürde im Verständnis des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung stellt die „Flächeninhaltsfunktion“ dar, die die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse zwischen der unteren Grenze a und der *variablen* oberen Grenze x definiert:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Beim Beweis des Hauptsatzes wird dann gezeigt, dass die Ableitung dieser Flächeninhaltsfunktion gleich der gegebenen Funktion $f(x)$ ist. Die Integralrechnung entpuppt sich zum großen Erstaunen der Schüler als die Umkehrung der Differenzialrechnung.
Die komplizierte Flächeninhaltsfunktion und dieser Beweisschritt bereiten den Schülern große Schwierigkeiten. Was zum Teufel ist das für eine Funktion, dieses $F(x)$?
Mit einem grafischen Taschenrechner wie dem TI-83 Plus haben wir nun die Möglichkeit, diese Flächeninhaltsfunktion (eine Stammfunktion) zu visualisieren.
Dazu geben wir im [Y=]-Editor die Funktion $f(x)$ ein. Wir beginnen mit der einfachen konstanten Funktion $f(x) = 1$ in Y1=1, weiters definieren wir mit **fnInt** (Menü [MATH] > MATH > 9:fnInt) die Flächeninhaltsfunktion

$\int_0^x 1\,dt$ in **Y2=fnInt(Y1,X,0,X)**. (Abb.1)

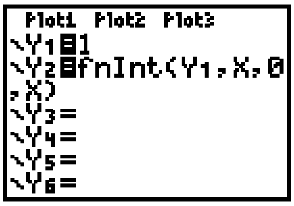

Abb. 1

Mit [ZOOM] > 4:ZDecimal werden nun beide Funktionen in einem geeigneten Bereich dargestellt und man sieht sofort: $F(x) = x$! (Abb.2)

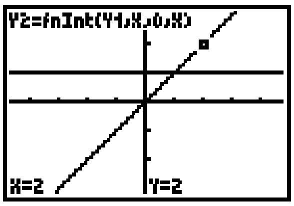

Abb. 2

Mit [CALC] > 7:∫ f(x)dx kann der Flächeninhalt zwischen Y1 und der x-Achse in den Grenzen 0 (lower limit) und 2 (upper limit) berechnet werden. (Abb.3) Springt man mit [TRACE] an der Stelle $x = 2$ auf die Flächeninhaltsfunktion Y2, erhält man dasselbe Ergebnis! (Abb.3)

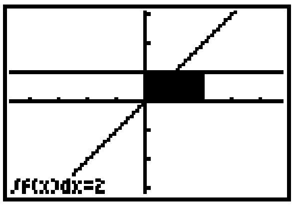

Abb. 3

Zugegeben, das war jetzt keine umwerfende Leistung. Toll wird die Sache erst jetzt: Wir können in Y1 beliebige Funktionen vorgeben und erhalten automatisch mit Y2 eine dazugehörige Stammfunktion. Nun können die Schüler selber mit verschiedensten Funktionen experimentieren, etwa mit Potenzfunktionen $f(x) = x$ oder $f(x) = x^2$ (Abb.4-6), mit Wurzelfunktionen wie $f(x) = \sqrt{x}$, Winkelfunktionen wie $f(x) = \sin(x)$, Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Die Schüler können Vermutungen über die Stammfunktion anstellen. Falls die Funktion $f(x)$ nicht durch den Ursprung geht, ist die gezeichnete Stammfunktion meistens eine Grundfunktion, die um eine Konstante (nämlich um den Achsenabschnitt Y1(0)) verschoben ist, hier gibt es für die Schüler einige Nüsse zu knacken und viel zu entdecken.

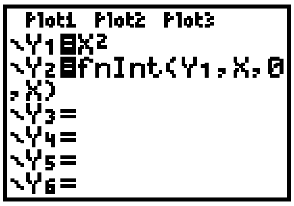

Abb. 4

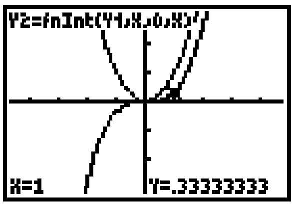

Abb. 5

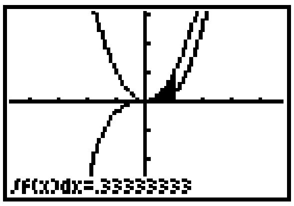

Abb. 6

Besonders interessant ist auch die Visualisierung der Flächeninhaltsfunktion eines Dreiecks. Mit **Y1=X*(X<1)+(1.5-X/2)*(X≥1)** wird ein Dreieck mit der Seite $c = 3$ auf der x-Achse und der Höhe $h = 1$ definiert, der Flächeninhalt beträgt also $A = 1{,}5$.

Günstige [WINDOW]-Einstellungen sind Xmin=-1, Xmax=4; Ymin=-1; Ymax=2. Die Auflösung sollte auf Xres=3 gesetzt werden, da für die Flächeninhaltsfunktion des Dreiecks die Rechenzeit immens groß wird!

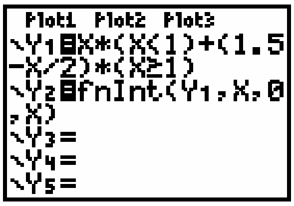

Abb. 7

Man erkennt sofort, dass sich die Flächeninhaltsfunktion aus zwei Parabelbögen zusammensetzt (Abb. 8).

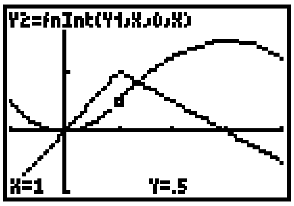

Abb. 8

Lässt man allerdings den Flächeninhalt des Dreiecks mit [CALC] > 7:∫ f(x)dx berechnen, erlebt man eine unliebsame Überraschung: Der TI-83 Plus ermittelt als Flächeninhalt nicht 1.5, sondern 1.4997141. (Abb. 9)

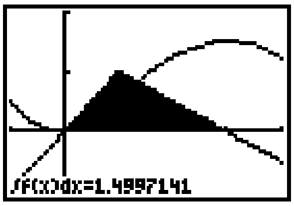

Abb. 9

Noch erstaunlicher ist, dass man mit [TRACE] für den Funktionswert Y2(3) abermals ein anderes Ergebnis erhält, nämlich 1.4999955! (Abb. 10)

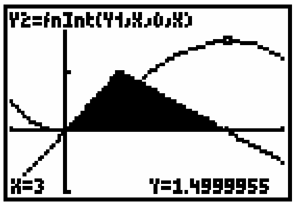

Abb. 10

Diese Ergebnisse sind natürlich erklärungsbedürftig! Hier wird den Schülern klar, dass der TR den Flächeninhalt nur näherungsweise berechnen kann (er verwendet laut Handbuch S.2-8 die Gauß-Kronrod-Methode). Weiters verwendet der TR im [CALC]-Menü die Toleranz $\varepsilon = 10^{-3}$, im [MATH]-Menü aber $\varepsilon = 10^{-5}$. Die unterschiedlichen Ergebnisse können im Hauptbildschirm nachvollzogen werden. (Abb. 11)

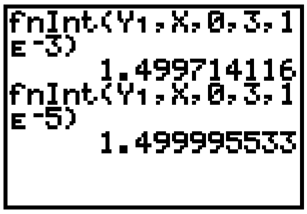

Abb. 11

Der Autor:
Dr. Markus Paul
Peter-Mayr-Straße 19
A-6020 Innsbruck
mailto:markus.paul@utanet.at