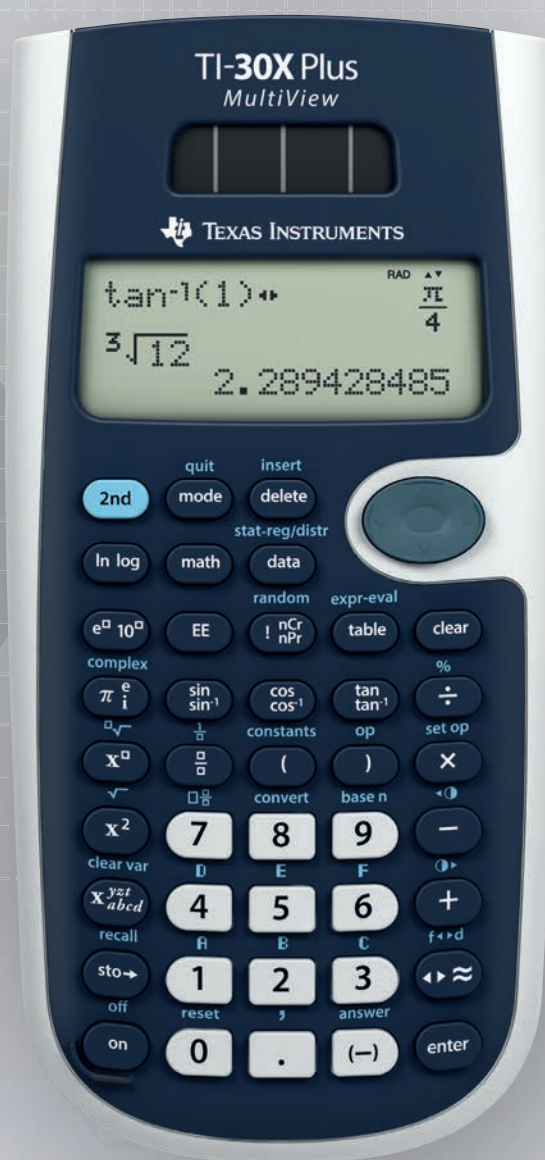


Heinz Klaus Strick

Arbeitsblätter für den

TI-30X Plus MultiView™



- » Für Sekundarstufe I und Sekundarstufe II
- » Arithmetik und Algebra
- » Analysis
- » Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Arbeitsblätter für Sekundarstufe I	6
Addieren und Subtrahieren von Brüchen	6
Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	7
Vergleich von statistischen Daten	8
Wie groß ist die Anzahl der Primteiler? (Spiel)	9
Punktprobe für eine Geradengleichung	10
Kontrolle der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Variablen	11
Ermitteln der Lage des Scheitelpunkts und der Nullstellen einer quadratischen Funktion	12
Bestimmen der Lösung einer quadratischen Gleichung (mit Wurzeltermen)	13
Umformung von Wurzeltermen	14
Bestimmen der Verdopplungszeit bei Wachstumsprozessen	15
Arbeitsblätter für Sekundarstufe II	16
Arbeitsblätter zur Analysis	16
Ermitteln eines einbeschriebenen Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt	16
Ermitteln von Nullstellen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades	17
Einführung in die Differenzialrechnung: Untersuchung von Sekantensteigungen	18
Untersuchung des Monotonieverhaltens und der Krümmung eines Graphen	19
Ermittlung der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades mithilfe des NEWTON Verfahrens	20
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (1)	21
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (2)	22
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (1)	23
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (2)	24
Arbeitsblätter zur Analytischen Geometrie	25
Untersuchung des möglichen Schnittwinkels einer Geraden mit einer Geradenschar	25
Ermittlung des Abstands eines Punktes von einer Geraden	26
Arbeitsblätter zur Regressions- und Korrelationsrechnung	27
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine lineare Funktion	27
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine quadratische Funktion	28
Regressionsrechnung: Optimierung einer exponentiellen Modellierung	29
Arbeitsblätter zur Stochastik	30
Binomialkoeffizienten – Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lottospiel <i>6 aus 49</i>	30
Bestimmen einer Binomialverteilung (vollständige Verteilung)	31
Bestimmen einer Binomialverteilung (einzelne Werte)	32
Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz von Binomialverteilungen	33
Optimierung der Annahme von Flugbuchungen	34
Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (1)	35
Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (2)	36
Bestimmen von 95 %- Umgebungen um den Erwartungswert (sigma-Regel)	37
Bestimmen von sigma-Umgebungen um den Erwartungswert	38
Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe: Punkt- und Intervallschätzung	39
Testen von Hypothesen – Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art	40
Das klassische Geburtstagsproblem und Variationen	41
Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen	42
Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung	43
Stochastik Grundkurs	44
Beispiele zum Einsatz des TI-30X Plus MultiView™	44
Würfelspiel: Aufgabenstellung Teilaufgabe a)	44
Würfelspiel: Aufgabenstellung Teilaufgabe b)	46
Würfelspiel: Aufgabenstellung Teilaufgabe c)	48
Würfelspiel: Aufgabenstellung Teilaufgabe d)	50

Vorwort

Dem Beschluss der Kultusministerkonferenz zu den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife folgend wurde das „Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen“ IQB beauftragt, den Aufbau eines Pools von Abituraufgaben auch für das Fach Mathematik zu konzipieren. Dieser Aufgabenpool steht den Ländern ab dem Schuljahr 2016/2017 als Angebot für den Einsatz in der Abiturprüfung zur Verfügung, erste Beispielaufgaben wurden bereits veröffentlicht. Diese Abituraufgaben des IQB sind abgestimmt auf das Verwenden digitaler Hilfsmittel: zum einen werden Aufgaben bereitgestellt, für deren Bearbeitung als Hilfsmittel ein **Computeralgebrasystem (CAS)** vorgesehen ist. Daneben werden Aufgaben erstellt, die mit einem **wissenschaftlichen Taschenrechner** zu bearbeiten sind, dessen Funktionsumfang sehr detailliert definiert ist.

Abgestimmt auf diese neuen Anforderungen an einen wissenschaftlichen Taschenrechner hat Texas Instruments den TI-30X Plus Multiview™ entwickelt. Dieser Rechner ist in den Abiturprüfungen der Bundesländer Bayern und Baden-Württemberg verbindlich vorgeschrieben. Baden-Württemberg geht noch einen Schritt weiter und setzt diesen Rechner zukünftig in den zentralen Abschlussprüfungen aller Schulformen voraus – auch um die von der KMK geforderte Durchlässigkeit von Bildungswegen zu fördern.

Wir freuen uns, für die Erarbeitung des vorliegenden Materials Heinz Klaus Strick als Autor gewonnen zu haben. Neben seinem langjährigen Wirken als Mathematiklehrer und Schulleiter des Landrat-Lucas-Gymnasiums in Leverkusen ist er vielen bekannt durch seine Mathematik-Kalender und insbesondere als Botschafter des Friedensdorfes in Oberhausen.

In den Arbeitsblättern für die Sekundarstufe I und für die Sekundarstufe II werden die vielfältigen Möglichkeiten des Einsatzes des TI-30X Plus Multiview™ aufgezeigt. Das Themenspektrum der Arbeitsblätter versucht die Breite des Lehrplans abzudecken, gleichwohl zwingt ein begrenzter Umfang zu einer Auswahl.

Im Bereich der grafischen Darstellung von Ergebnissen stößt der Rechner naturgemäß an seine Grenzen. Für die Abbildung von Graphen verwendet der Autor die TI-Nspire™ CX CAS Software.

Die Arbeitsblätter sind so aufgebaut, dass an den Anfang das Problem in Form einer Beispielaufgabe gestellt wird, dessen Lösung anschließend mithilfe des TI-30X Plus Multiview™ erfolgt. Im Material wurde mit Bedacht darauf verzichtet, einfach Tastenfolgen darzustellen. Stattdessen zeigt eine Vielzahl an Bildschirmabbildungen (Screenshots) die erforderlichen Einzelschritte zur Lösung. Weitere Aufgaben mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad am Ende des Arbeitsblattes sollen zum selbstständigen Üben anregen.

Viel Freude und Erfolg bei der Arbeit mit dem TI-30X Plus Multiview™

wünscht Texas Instruments

Gebiet: Arithmetik

Einsatz ab Stufe 5 (auch zur Wiederholung geeignet)

Addieren und Subtrahieren von Brüchen**Beispiel-Aufgabe**

Der TI-30X Plus MultiView™ kann einfache arithmetische Operationen mit Brüchen vornehmen.

Notiere die fehlenden Zwischenschritte.

$3\frac{5}{12} + \frac{11}{18}$	DEG $\frac{145}{36}$
ans $\frac{1}{36}$	$4\frac{1}{36}$

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™: Math-Print-Option ($\boxed{\text{mode}}$)

Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch und umgekehrt ($\boxed{\text{math}}$ -Menü)

Erläuterung der Lösung: Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert). Daher müssen zunächst die Brüche gleichnamig gemacht werden.

$$3\frac{5}{12} + \frac{11}{18} = 3 + \frac{15}{36} + \frac{22}{36} = 3 + \frac{37}{36} = 3 + 1 + \frac{11}{36} = 4\frac{11}{36} = \frac{145}{36} \quad \text{oder} \quad 3\frac{5}{12} + \frac{11}{18} = \frac{41}{12} + \frac{11}{18} = \frac{123}{36} + \frac{22}{36} = \frac{145}{36} = 4\frac{11}{36}$$

Übungsaufgaben

Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte.
Wenn das Ergebnis ein unechter Bruch ist, notiere es auch als gemischte Zahl.

$\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$	DEG $\frac{5}{24}$
-----------------------------	--------------------

$\frac{7}{12} + \frac{7}{16}$	DEG $\frac{49}{48}$
-------------------------------	---------------------

$\frac{7}{4} - \frac{5}{6}$	DEG $\frac{11}{12}$
-----------------------------	---------------------

$\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$	DEG $\frac{34}{15}$
-----------------------------	---------------------

$\frac{5}{4} - \frac{4}{5}$	DEG $\frac{9}{20}$
-----------------------------	--------------------

$\frac{5}{6} + \frac{4}{15}$	DEG $\frac{11}{10}$
------------------------------	---------------------

$4\frac{7}{9} - \frac{25}{6}$	DEG $\frac{11}{18}$
-------------------------------	---------------------

$5\frac{4}{5} + \frac{25}{4}$	DEG $\frac{241}{20}$
-------------------------------	----------------------

$3\frac{2}{3} - 2\frac{7}{8}$	DEG $\frac{19}{24}$
-------------------------------	---------------------

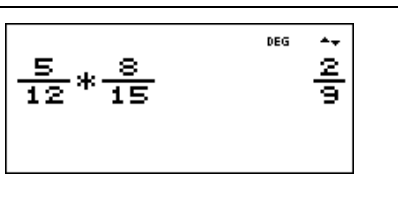
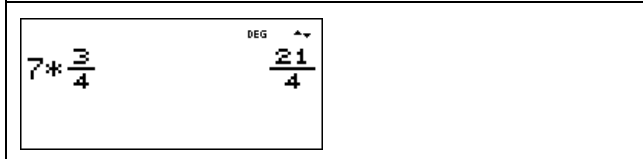
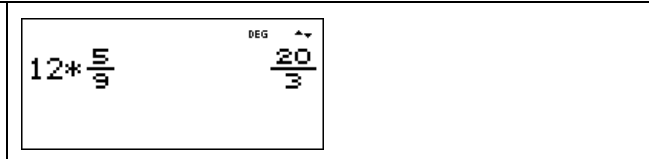
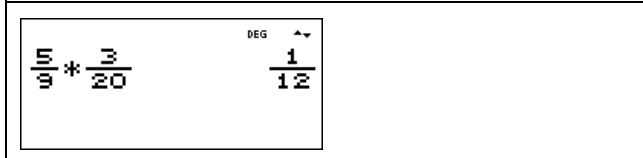
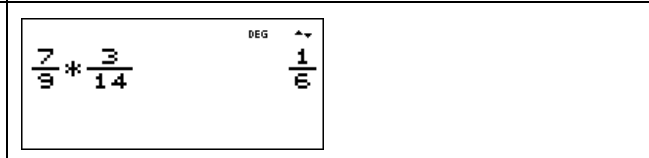
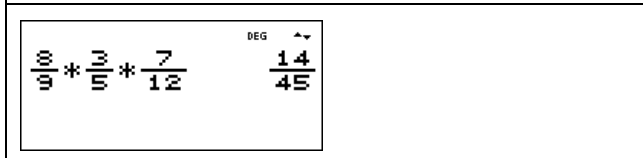
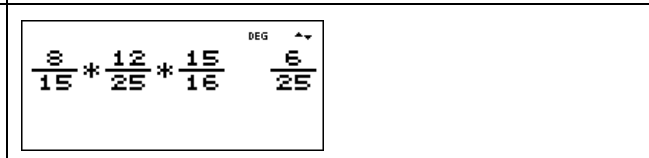
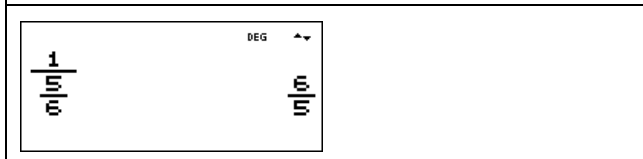
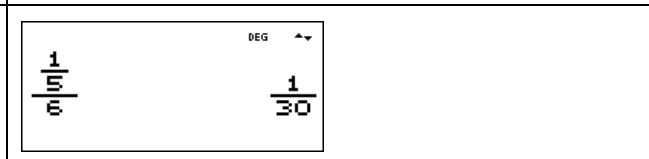
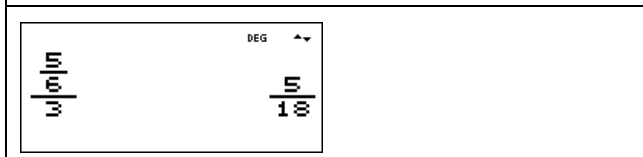
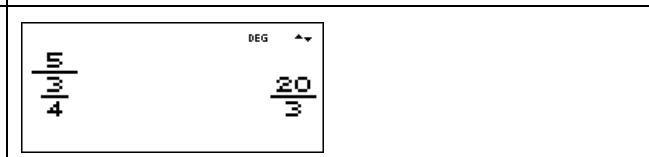
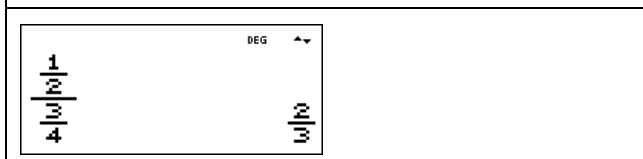
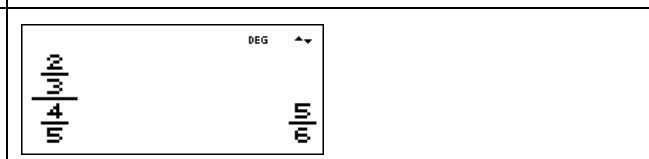
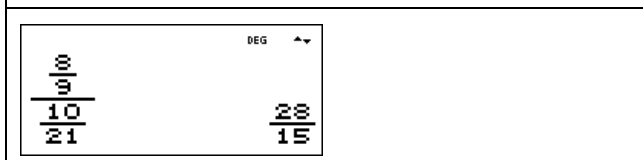
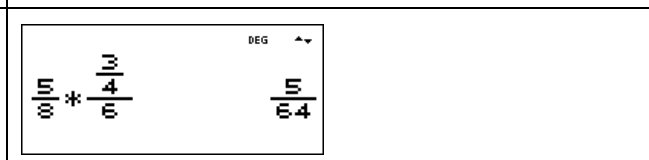
$\frac{17}{8} + \frac{11}{6}$	DEG $\frac{95}{24}$
-------------------------------	---------------------

$1\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6}$	DEG $\frac{13}{2}$
-------------------------------	--------------------

$2\frac{3}{4} + 5\frac{5}{7}$	DEG $\frac{241}{28}$
-------------------------------	----------------------

$3\frac{4}{5} + 6\frac{7}{8}$	DEG $\frac{427}{40}$
-------------------------------	----------------------

$4\frac{5}{6} + 7\frac{8}{9}$	DEG $\frac{229}{18}$
-------------------------------	----------------------

Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 5 (auch zur Wiederholung geeignet)
Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Der TI-30X Plus MultiView™ kann einfache arithmetische Operationen mit Brüchen vornehmen.</p> <p>Notiere die fehlenden Zwischenschritte.</p>	
Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™: Math-Print-Option (<code>mode</code>)	
<p>Erläuterung der Lösung:</p> <p>Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler multipliziert und durch das Produkt der Nenner teilt. Vor dem Ausmultiplizieren ist nach Möglichkeit zu kürzen.</p> $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} = \frac{5 \cdot 8}{12 \cdot 15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	
Übungsaufgaben	
<p>Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte. Wenn das Ergebnis ein unechter Bruch ist, notiere es auch als gemischte Zahl.</p>	
	
	
	
	
	
	
	

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 6
--	--------------------

Vergleich von statistischen Daten

Beispiel-Aufgabe

Um einen Leistungsvergleich herzustellen, wurde in zwei Parallelklassen (a und b) ein Test durchgeführt. Dabei ergab sich bei den erreichten Punktzahlen folgende Häufigkeitsverteilung:

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
a	1	0	0	2	1	1	1	0	1	1	0	2	4	0	0	2	3	2	2	1	2	0	1	1
b	0	0	0	0	0	1	1	0	3	1	6	0	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	1	0

Vergleiche die beiden Verteilungen. Bestimme die dazu notwendigen Kenngrößen.

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 1-Var Stats (**2nd** **data**)

Erläuterung der Lösung

Die Daten werden in die zur Verfügung stehenden Listen L1, L2 und L3 eingegeben, und zwar: in Liste L1 die Punktzahlen von 16 bis 39 (einschl.), die als Ergebnisse des Tests aufgetreten waren, sowie die Häufigkeiten, mit denen diese Punktzahlen in den Klassen a bzw. b vorkamen, in Liste L2 bzw. Liste L3. Wählt man dann die 1-Variablen-Statistik im STAT-REG-Menü, dann fragt der Rechner noch ab, welche Listen ausgewertet werden sollen. Um die Leistungen der Klasse a zu bewerten, müssen die Daten aus Liste L1 mit den Häufigkeiten (FRQ = frequency) aus Liste L2 untersucht werden; entsprechendes gilt für die Daten aus Klasse b.

Der Vergleich der beiden Klassen zeigt: In Klasse a sind 28 Kinder, in Klasse b 27. Arithmetisches Mittel und Median liegen in Klasse a oberhalb der beiden Mittelwerte von Klasse b. Die Daten der Klasse a streuen jedoch stärker als die von Klasse b, wie man sowohl an der mittleren quadratischen Abweichung σ_x als auch an den Quartilen ablesen kann: 50% der Punktwerte liegen in Klasse a zwischen 24,5 und 33,5, in Klasse b zwischen 26 und 30. Außerdem liegen Maximum und Minimum in Klasse a weiter vom Median entfernt als in Klasse b.

	Anzahl	arithm.M.	σ_x	Min	Q1	Median	Q3	Max
a	28	28,86	6,12	16	24,5	29,5	33,5	39
b	27	27,70	3,52	21	26	28	30	38

Übungsaufgaben

Vergleiche die erreichten Punktzahlen der Klasse c mit denen aus Klasse a und b.

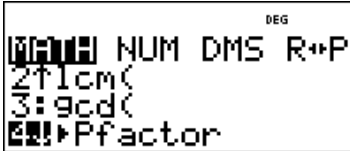
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
c	0	1	0	1	1	2	1	0	1	1	3	1	3	2	3	2	1	3	1	1	0	0	0	1

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 7
---------------------------	--------------------

Wie groß ist die Anzahl der Primteiler? (Spiel)

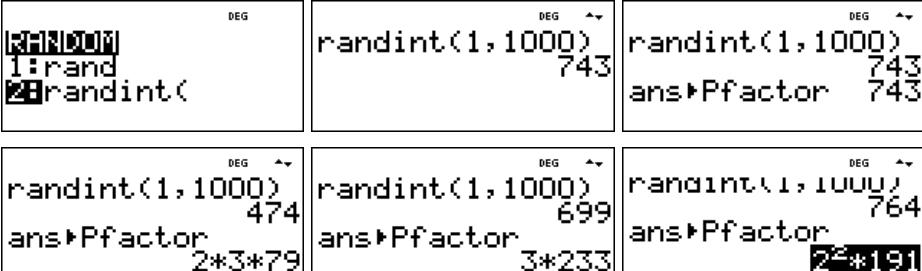
Beispiel-Aufgabe
 Mithilfe des Zufallszahlengenerators des Taschenrechners werde eine natürliche Zahl aus der Menge {1, 2, ..., 1000} gewählt. Wie viele Primteiler enthält diese Zahl?

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:
 Pfaktor-Funktion des $\boxed{\text{math}}$ -Menüs



Erläuterung der Lösung

Ganzzahlige Zufallszahlen kann man mithilfe des randint-Befehls aus dem Random-Menü des TI-30X Plus MultiView™ bestimmen: Man gibt die gewünschte kleinste und größte Zahl der Menge an (mit Komma voneinander getrennt), vgl. 1. und 2. Screenshot. – Anschließend wird auf die Antwort der Pfaktor-Befehl angewandt (am Dreieck-Symbol vor „Pfactor“ kann man ablesen, dass der Befehl im Anschluss an die natürliche Zahl eingegeben werden muss).



An den Antworten lesen wir ab, dass die Zahl 743 eine Primzahl ist, die Zahl 474 drei Primteiler besitzt, die Zahl 699 zwei und die Zahl 764 ebenfalls nur zwei Primteiler (nämlich 2 und 191).

Übungsaufgaben

- Mache ein Spiel mit einem Partner: Jeder von euch erzeugt eine Zufallszahl und bestimmt mit dem TI-Schulrechner die Anzahl der Primfaktoren. Gewonnen hat, wer die größere [kleinere] Anzahl von Primteilern hat. Wenn die Anzahl gleich ist, muss die Spielrunde wiederholt werden.
 - Welche der beiden Spielregeln ist günstiger?
 - Protokolliere, wie oft die Anzahl der Primfaktoren 1, 2, 3, 4 beträgt. (Warum kann die Anzahl der Primteiler nicht größer als 4 sein?)

Anzahl Primfaktoren	1	2	3	4			
absolute Häufigkeit							


2. Der TI-Schulrechner kann natürliche Zahlen bis 999999 in Primfaktoren zerlegen. Führt in der Klasse den o. a. Zufallsversuch oft durch protokolliert, wie oft welcher Fall auftritt.

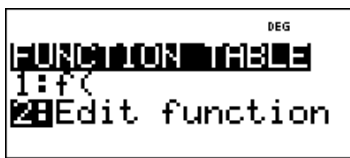
Anzahl Primfaktoren	1	2	3	4	5	6	7
absolute Häufigkeit							

Gebiet: Lineare Funktionen	Einsatz ab Stufe 7
-----------------------------------	--------------------

Punktprobe für eine Geradengleichung

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben sind die Punkte P (2 | 4) und Q (7 | 6). Bestimme die Gleichung $y = mx + b$ der Geraden, die durch die beiden Punkte verläuft, und überprüfe deine Rechnung mithilfe des TI-Schulrechners. Bestimme weitere Punkte, die auf der Geraden liegen.

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion ()






Erläuterung der Lösung


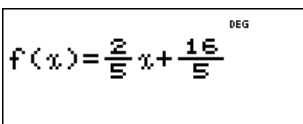
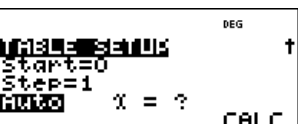


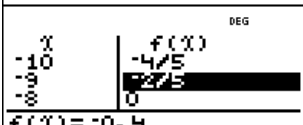
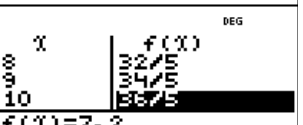
Zu bestimmen sind die Koeffizienten m und b der Geradengleichung. Zunächst bestimmt man die Steigung m der Geraden: Die Gerade durch die Punkte P und Q hat die Steigung

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{6 - 4}{7 - 2} = \frac{2}{5}$$
 Diesen Wert für m und die Koordinaten von P bzw. von Q kann man in die Geradengleichung $y = mx + b$ einsetzen:

$$4 = \frac{2}{5} \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{16}{5} \quad \text{bzw.} \quad 6 = \frac{2}{5} \cdot 7 + b \Leftrightarrow b = \frac{16}{5}$$

Kontrollrechnung mit dem TI-Schulrechner: Man gibt die Geradengleichung unter  als Funktionsgleichung ein. Im TABLE SETUP muss ggf. noch der Startwert (Start) und die Schrittweite (Step) korrigiert werden. Nach mehrfachem Drücken der -Taste erscheint die Wertetabelle der Funktion. Durch Scrollen der Wertetabelle kann man überprüfen, ob tatsächlich die Paare (2 | 4) und (7 | 6) in der Wertetabelle vorkommen. Wenn dies der Fall ist, hat man richtig gerechnet (d. h., die Punktkoordinaten erfüllen die lineare Funktionsgleichung), andernfalls ist ein Fehler in der Rechnung.

Alle Paare, die in der Wertetabelle vorkommen, beschreiben Punkte, die auf der Geraden liegen. Beispielsweise liegen auch die Punkte (-9 | -2/5), (-8 | 0) und (10 | 36/5) auf der Geraden. Die Bruchzahlen -2/5 und 36/5 können durch Drücken der -Taste in eine Dezimalzahl umgewandelt werden (erscheint unter der Tabelle).

Übungsaufgaben

Bestimme die Gleichung der Geraden $y = mx + b$ durch die Punkte P und Q. Überprüfe deine Rechnung mithilfe des TI-Schulrechners. Gib noch mindestens zwei Punkte der Geraden an, die in einem anderen Quadranten des Koordinatensystems liegen.

(a) P (3 5) ; Q (-2 4)	(d) P (3 0) ; Q (7 -3)
(b) P (1 -3) ; Q (5 5)	(e) P (6 1) ; Q (-4 -1)
(c) P (-2 1) ; Q (4 1)	(f) P (-1 -1) ; Q (5 -2)

Gebiet: Algebra

Einsatz ab Stufe 8

Kontrolle der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Variablen**Beispiel-Aufgabe**

Als Lösung des linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$

hat man das Zahlenpaar $(x | y) = (2 | -3)$ gefunden. Die Kontrolle der Lösung kann durch Einsetzen der für x und y gefundenen Werte in die beiden Gleichungen erfolgen.

Alternativ kann man auch folgendes überlegen: Jede der beiden Gleichungen kann man mithilfe einer Geraden im Koordinatensystem darstellen. Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden geben die Lösung des Gleichungssystem an. Anstelle der Zeichnung kann man die Wertetabellen der beiden zugehörigen linearen Funktionen betrachten und dort die Lösung (d. h. den gemeinsamen Punkt der beiden Geraden) ablesen.

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion (**table**)

**Erläuterung der Lösung**

Umformen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -3x + 12 \\ 3y = -2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 6 \\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

Dann gibt man nacheinander jede der beiden Geradengleichungen über den Editor der **table**-Funktion des TI-Schulrechners ein und prüft jeweils, ob das gefundene Lösungspaar in der Wertetabelle vorkommt. Wenn dies nicht der Fall ist, hat man sich bei der Lösung des linearen Gleichungssystems verrechnet.

$f(x) = \frac{3}{2}x - 6$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>-3 1/2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-3 1/2</td> </tr> <tr> <td>x=2</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	1	-3 1/2	2	-3 1/2	x=2		$f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>-2 2/3</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-1 1/3</td> </tr> <tr> <td>x=2</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	1	-2 2/3	2	-1 1/3	x=2	
x	f(x)																		
1	-3 1/2																		
2	-3 1/2																		
x=2																			
x	f(x)																		
1	-2 2/3																		
2	-1 1/3																		
x=2																			

Übungsaufgaben

1. Bestimme die Lösung des Gleichungssystems und überprüfe die gefundene Lösung mithilfe der **table**-Funktion des TI-Schulrechners.

(a) $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 1y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -1x + 6y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 0,3x - 0,7y = -0,9 \\ -0,1x + 0,9y = 2,3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = -\frac{3}{4} \end{cases}$

2. Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystem aus Aufgabe 1, indem du für die beiden Geradengleichungen, die das Gleichungssystem bestimmen, jeweils vom TI-Schulrechner eine Wertetabelle berechnen lässt. Diese Wertetabellen überträgst du in dein Schulheft (nebeneinander eine gemeinsame Spalte jeweils für die x -Werte, zwei Spalten für die zugehörigen y -Werte).

Bei welcher der vier Teilaufgaben treten bei dieser Methode Probleme auf?


Gebiet: Funktionen

Einsatz ab Stufe 8

Ermitteln der Lage des Scheitelpunkts und der Nullstellen einer quadratischen Funktion**Beispiel-Aufgabe**

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 - 6x + 2$.

Ermittle die Lage des Scheitelpunkts der quadratischen Funktion. Untersuche, ob der Graph der Funktion Nullstellen besitzt. Gib ggf. deren Lage an.

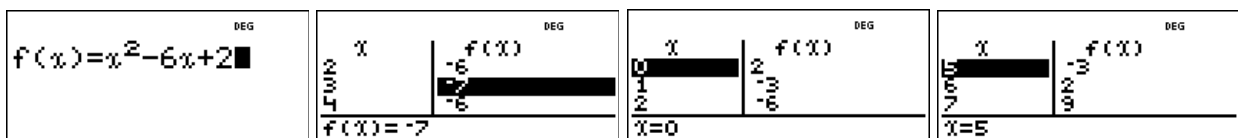
Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion ()

**Erläuterung der Lösung**

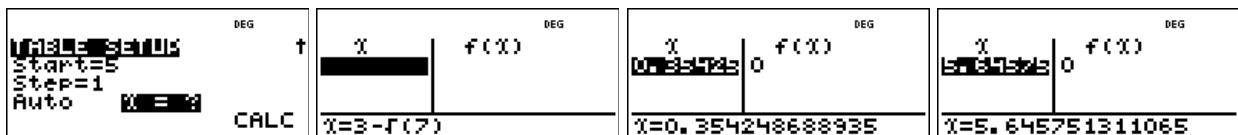
Die Graphen von quadratischen Funktionen sind achsensymmetrische Parabeln, deren Symmetrieachse durch den Scheitelpunkt der Parabel verläuft. Daher kann man die Lage des Scheitelpunkts an der Wertetabelle der Funktion ablesen. Durch Scrollen in der Wertetabelle erkennt man, dass der Graph der Funktion f mit symmetrisch zur Achse $x = 3$ ist, denn links und rechts davon treten jeweils gleiche Funktionswerte auf, z. B. $f(2) = f(4) = -6$.

Der Punkt $S(3 | -7)$ ist daher der Scheitelpunkt der Parabel.

Dieser Punkt liegt unterhalb der x -Achse, und da die Parabel nach oben geöffnet ist, schneidet der Graph der Funktion die x -Achse in zwei Punkten. Die Nullstelle links liegt zwischen $x = 0$ (positiver Funktionswert) und $x = 1$ (negativer Funktionswert), die Nullstelle rechts entsprechend symmetrisch zu $x = 3$ zwischen $x = 5$ und $x = 6$:



Zur Kontrolle der exakten Nullstellen $x_1 = 3 - \sqrt{7}$ und $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, die man durch Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung $x^2 - 6x + 2 = 0$ berechnet hat, muss man beim Durchgang durch das Menü von der Option „Auto“ auf „ $x = ?$ “ wechseln und dann in die leere x -Spalte der Tabelle den berechneten Wert eintippen. Der TI-Schulrechner gibt automatisch die Dezimalzahl-Darstellung der Nullstelle an. Entsprechend verfährt man mit der anderen Nullstelle.

**Übungsaufgaben**

1. Die x -Koordinate des Scheitelpunkts des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 3x + 3$ ist nicht ganzzahlig. In der Wertetabelle des TI-Schulrechners kann man die x -Koordinate des Scheitelpunkts trotzdem ablesen. Wieso? Wie erhält man dann die y -Koordinate des Scheitelpunkts? Was ergibt sich hinsichtlich der Nullstellen der Funktion?

2. Ermittle die Lage des Scheitelpunkts der quadratischen Funktion f . Untersuche, ob der Graph Nullstellen besitzt und gib ggf. deren Lage an.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

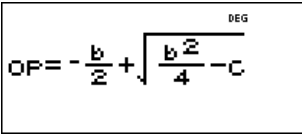
c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

e) $f(x) = -x^2 - 4x + 7$

b) $f(x) = x^2 + 3x + 3$

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$

f) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8		
Bestimmen der Lösung einer quadratischen Gleichung (mit Wurzeltermen)			
Beispiel-Aufgabe			
<p>Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$</p> <p>Bestimmt werden soll ein Term für die allgemeine Lösung, sodass bei Einsetzen der Koeffizienten die Lösungen – sofern sie existieren – als Wurzelterme ausgegeben werden.</p> <p>Löse hiermit dann die Gleichungen</p> <p>(1) $x^2 + 4x - 7 = 0$ (2) $x^2 - 8x - 2 = 0$ (3) $x^2 + 10x + 5 = 0$ (4) $x^2 - 2x + 3 = 0$</p>			
Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™: Definition von Operationen mithilfe von set op (2^{nd} \boxed{x}) Ausführen von Operationen mithilfe von op (2^{nd} $\boxed{\square}$)	DEG OP=		
Erläuterung der Lösung			
Nach Umformung erhält man die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ und $x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$			
Der TI-30X Plus MultiView™ verfügt über die Option, eine bestimmte Abfolge von Operationen abzuspeichern; dabei können unterschiedliche Variablen verwendet werden. In dieser Aufgabe geht es also darum, einen Term für die Lösung einzugeben. Dies ist leider nur für <i>einen</i> Term möglich, beispielsweise die erste Lösung; für die zweite Lösung muss entsprechend das Vorzeichen geändert werden. Zunächst speichert man die Werte für die Variablen, dann führt man die gespeicherte Operation durch.			
			
(1) Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 4x - 7 = 0$ sind $x_1 = -2 + \sqrt{11}$ und $x_2 = -2 - \sqrt{11}$ (2) Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 8x - 2 = 0$ sind $x_1 = +4 + 3\sqrt{2}$ und $x_2 = +4 - 3\sqrt{2}$			
DEG \wedge 4 → b -7 → c DEG \wedge -7	DEG \wedge $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ n=1 $\sqrt{11}-2$	DEG \wedge -8 → b -2 → c DEG \wedge -2	DEG \wedge $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ n=1 $3\sqrt{2}+4$
(3) Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 10x + 5 = 0$ sind $x_1 = -5 + 2\sqrt{5}$ und $x_2 = -5 - 2\sqrt{5}$ (4) Die Gleichung $x^2 - 2x + 3 = 0$ hat keine reelle Lösung.			
DEG \wedge 10 → b 5 → c DEG \wedge 10 5	DEG \wedge $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ n=1 $2\sqrt{5}-5$	DEG \wedge -2 → b 3 → c DEG \wedge -2 3	DEG DOMAIN Error
Übungsaufgaben			
1. Das Lösungsverfahren mithilfe der set op/op-Funktion ist nicht für beliebige ganzzahlige Koeffizienten anwendbar. Welche Einschränkung muss man beachten? 2. Bestimme wie in der Beispiel-Aufgabe auch die Lösungen von (1) $x^2 + 6x - 3 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (3) $x^2 + 4x + 3 = 0$ (4) $x^2 - 12x + 8 = 0$ (5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (6) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (7) $x^2 - 20x + 5 = 0$ (8) $x^2 + 16x + 3 = 0$			

Gebiet: Algebra

Einsatz ab Stufe 8 (auch zur Wiederholung geeignet)

Umformung von Wurzeltermen**Beispiel-Aufgabe**

Der TI-30X Plus MultiView™ kann einfache algebraische Umformungen von Wurzeltermen vornehmen.

Notiere die fehlenden Zwischenschritte.

$$(1+\sqrt{2})^2 \quad 2\sqrt{2}+3$$

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™: Math-Print-Option (`mode`)

Erläuterung der Lösung

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 3 \quad (\text{Anwendung binomischer Formel})$$

Übungsaufgaben

Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte.

$$\sqrt{27} \quad 3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{50}-\sqrt{18} \quad 2\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} \quad \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(1+\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{2}) \quad 2\sqrt{2}+1$$

$$(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 \quad -2\sqrt{35}+12$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} \quad \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{3-\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}} \quad \frac{5\sqrt{7}-13}{3}$$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \quad \frac{-\sqrt{21}+5}{2}$$

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 9
---------------------------	--------------------

Bestimmen der Verdopplungszeit bei Wachstumsprozessen

Beispiel-Aufgabe

Ein Kapital von 1000 € werde mit einen jährlichen Zinssatz verzinst; die Zinsen werden jeweils zum Kapital hinzugefügt. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
 Der Zinssatz p beträgt (1) 1 % (2) 2 % (3) 2,5 % (4) 3 % (5) 3,6 % (6) 4 % (7) 4,8 %
 Welcher Zusammenhang zwischen dem Zinssatz p und der Verdopplungszeit d fällt auf?

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion (table)

Erläuterung der Lösung

Zu lösen ist jeweils die Gleichung: $2000 = 1000 \cdot q^n$, wobei $q = 1 + p$ (p Zinssatz).
 Dazu stellt man jeweils die Wertetabellen der Funktion f mit $f(x) = 1000 \cdot q^x$ auf und sucht dort nach demjenigen Wert von x, bei dem der Funktionswert von 2000 überschritten wird, z. B.

- (1) $f(x) = 1000 \cdot 1,01^x$ (≥ 2000 für $x \geq 70$) (2) $f(x) = 1000 \cdot 1,02^x$ (≥ 2000 für $x \geq 36$)

--	--

- (3) $f(x) = 1000 \cdot 1,024^x$ (≥ 2000 für $x \geq 30$) (4) $f(x) = 1000 \cdot 1,03^x$ (≥ 2000 für $x \geq 24$)

--	--

- (5) $f(x) = 1000 \cdot 1,036^x$ (≥ 2000 für $x \geq 20$) (6) $f(x) = 1000 \cdot 1,04^x$ (≥ 2000 für $x \geq 18$)
 (7) $f(x) = 1000 \cdot 1,048^x$ (≥ 2000 für $x \geq 15$)

Vergleicht man die Ergebnisse, dann entdeckt man die Faustregel: $p \cdot d \approx 72$
 (manchmal findet man in Büchern oder Internetquellen auch die Angabe $p \cdot d \approx 70$).

Übungsaufgaben

1. Untersuche die Gültigkeit der Regel für andere geeignete Teiler von 70 bzw. 72.
2. Suche auch eine Regel für die Verdreifachung eines Kapitals.

Zusatz

Der TI-Schulrechner verfügt über eine Option, zu gegebenen Wertepaaren eine geeignete Funktion zu finden, deren Graph möglichst gut zu diesen Paaren „passt“.

Unter den Optionen von stat-reg (2nd data) findet man die Option *Pwr-Reg* (Regression durch eine Potenzfunktion). Wieso wird hierdurch die Merkregel bestätigt?

--	--	--	--

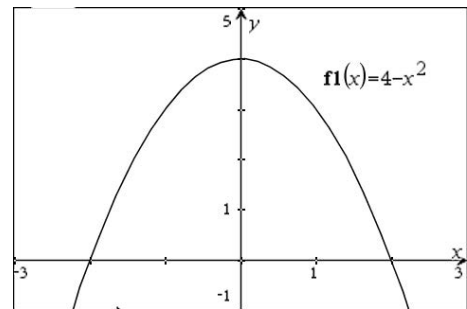
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

Ermitteln eines einbeschriebenen Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - x^2$.

Ein möglichst großes Rechteck soll (oberhalb der x -Achse) so eingezeichnet werden, dass zwei der Eckpunkte auf dem Graphen der Funktion f und zwei auf der x -Achse liegen.



Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion (`table`)
 Anwenden der Option `expr-eval`



Erläuterung der Lösung

Da der Graph achsensymmetrisch zur y -Achse ist, genügt es, nur die rechte Hälfte des Rechtecks zu betrachten und dann zu verdoppeln. Der Flächeninhalt $A(x)$ eines Rechtecks, das die Bedingungen hinsichtlich der Lage der Eckpunkte erfüllt, berechnet sich aus der Breite x und der Höhe $f(x)$, d. h., es gilt

$$A(x) = 2 \cdot x \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot (4 - x^2) = 8x - 2x^3$$

Diesen Funktionsterm gibt man in den Editor der `table`-Funktion ein. Zunächst wählt man als Schrittweite für die Wertetabelle $Step = 0.1$. Beim Scrollen findet man heraus, dass zunächst die Funktionswerte von $A(x)$ steigen und dann wieder abnehmen. Zwischenbilanz: Das Maximum liegt im Intervall $1.1 < x < 1.3$.

Um die Stelle des Maximums weiter einzuschränken, wird dann die Schrittweite auf $Step = 0.01$ verkleinert. Jetzt kann man die Stelle des Maximums auf das Intervall $1.14 < x < 1.16$ einschränken. In weiteren Schritten kommt man auf $1.154 < x < 1.156$ und $1.1546 < x < 1.1548$.

Als Lösung kann man ungefähr angeben: Wenn $x \approx 1.1547$ gewählt wird, hat das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt von $A(1.1547) \approx 6,1584$ FE.

Um die y -Koordinate des Punkts auf dem Graphen zu bestimmen, muss man noch $x \approx 1.1547$ in die Funktionsgleichung $f(x) = 4 - x^2$ einsetzen: $f(1.1547) \approx 2.6666$. Dies kann direkt oder mithilfe der Option `expr-eval` (`2nd``table`) erfolgen: Dazu gibt man unter `expr-eval` den Funktionsterm von $f(x)$ ein, dann für x den gewünschten x -Wert.

$f(x) = 8x - 2x^3$	TABLE SETUP Start=0 Step=0.1 GOTO X=?	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.1</td><td>6.138</td></tr> <tr><td>1.2</td><td>6.144</td></tr> <tr><td>1.3</td><td>6.006</td></tr> </tbody> </table> f(X)=6.144	X	f(X)	1.1	6.138	1.2	6.144	1.3	6.006	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.14</td><td>6.158912</td></tr> <tr><td>1.15</td><td>6.15825</td></tr> <tr><td>1.16</td><td>6.158208</td></tr> </tbody> </table> X=1.15	X	f(X)	1.14	6.158912	1.15	6.15825	1.16	6.158208
X	f(X)																		
1.1	6.138																		
1.2	6.144																		
1.3	6.006																		
X	f(X)																		
1.14	6.158912																		
1.15	6.15825																		
1.16	6.158208																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.154</td><td>6.158399472</td></tr> <tr><td>1.155</td><td>6.15840225</td></tr> <tr><td>1.156</td><td>6.158391168</td></tr> </tbody> </table> X=1.155	X	f(X)	1.154	6.158399472	1.155	6.15840225	1.156	6.158391168	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.1546</td><td>6.158402801</td></tr> <tr><td>1.1547</td><td>6.158402871</td></tr> <tr><td>1.1548</td><td>6.158402803</td></tr> </tbody> </table> X=1.1547	X	f(X)	1.1546	6.158402801	1.1547	6.158402871	1.1548	6.158402803	Expr=4-x^2	4-x^2 2.66666791
X	f(X)																		
1.154	6.158399472																		
1.155	6.15840225																		
1.156	6.158391168																		
X	f(X)																		
1.1546	6.158402801																		
1.1547	6.158402871																		
1.1548	6.158402803																		

Übungsaufgabe

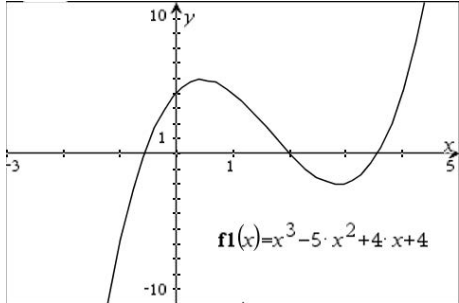
Ermitteln Sie analog zur Beispielaufgabe das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, das man zum Graphen der achsensymmetrischen Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ einzeichnen kann.

Beachten Sie, dass der *Modus* des TI-Schulrechners auf RAD eingestellt ist.

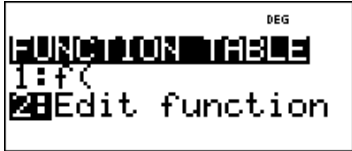
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

Ermitteln von Nullstellen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades

Beispiel-Aufgabe
 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit
 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 4$.



Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion (`table`)



Erläuterung der Lösung

Durch die Eingabe des Funktionsterms über die `table`-Option wird eine Wertetabelle erzeugt; am Vorzeichenwechsel kann man die ungefähre Lage der Nullstellen ablesen.

(1) Man findet die ganzzahlige Nullstelle $x_2 = 2$; die Nullstelle x_1 liegt zwischen $x = -1$ und $x = 0$ und die Nullstelle x_3 zwischen $x = 3$ und $x = 4$. Ausgehend von den Intervallen der Breite 1 werden schrittweise die Intervalle auf die Länge 0,1, 0,01 und 0,001 verkleinert, um die beiden nicht-ganzzahligen Nullstellen genauer zu bestimmen.

Die Funktion hat drei reelle Nullstellen: $x_1 \approx -0,562$; $x_2 = +2$; $x_3 \approx +3,562$.

Hinweis: Wenn man im Funktionsterm einen der Koeffizienten als Dezimalzahl eingibt, z. B. beim absoluten Glied 4.0 statt 4, treten in der Wertetabelle nur Dezimalzahlen und keine Brüche mehr auf.

<code>f(x)=x^3-5x^2+4x+4</code>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>-2</td><td>-32</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-6</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td></tr> </table> <p>X=-1</p>	X	f(X)	-2	-32	-1	-6	0	4	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>-2</td></tr> </table> <p>X=3</p>	X	f(X)	1	4	2	0	3	-2	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2">TABLE STATUS</th></tr> <tr><td>Start=-1</td><td></td></tr> <tr><td>Step=0.1</td><td></td></tr> <tr><td>Auto X=?</td><td></td></tr> </table> <p>CALC</p>	TABLE STATUS		Start=-1		Step=0.1		Auto X=?									
X	f(X)																																		
-2	-32																																		
-1	-6																																		
0	4																																		
X	f(X)																																		
1	4																																		
2	0																																		
3	-2																																		
TABLE STATUS																																			
Start=-1																																			
Step=0.1																																			
Auto X=?																																			
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>-0.7</td><td>-1.593</td></tr> <tr><td>-0.6</td><td>-0.416</td></tr> <tr><td>-0.5</td><td>5/8</td></tr> </table> <p>X=-0.5</p>	X	f(X)	-0.7	-1.593	-0.6	-0.416	-0.5	5/8	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>3.4</td><td>-0.896</td></tr> <tr><td>3.5</td><td>-3/8</td></tr> <tr><td>3.6</td><td>0.256</td></tr> </table> <p>X=3.6</p>	X	f(X)	3.4	-0.896	3.5	-3/8	3.6	0.256	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>-0.58</td><td>-0.197112</td></tr> <tr><td>-0.57</td><td>-0.089693</td></tr> <tr><td>-0.56</td><td>0.016384</td></tr> </table> <p>X=-0.56</p>	X	f(X)	-0.58	-0.197112	-0.57	-0.089693	-0.56	0.016384	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>3.55</td><td>-0.073625</td></tr> <tr><td>3.56</td><td>-0.009984</td></tr> <tr><td>3.57</td><td>0.054793</td></tr> </table> <p>X=3.57</p>	X	f(X)	3.55	-0.073625	3.56	-0.009984	3.57	0.054793
X	f(X)																																		
-0.7	-1.593																																		
-0.6	-0.416																																		
-0.5	5/8																																		
X	f(X)																																		
3.4	-0.896																																		
3.5	-3/8																																		
3.6	0.256																																		
X	f(X)																																		
-0.58	-0.197112																																		
-0.57	-0.089693																																		
-0.56	0.016384																																		
X	f(X)																																		
3.55	-0.073625																																		
3.56	-0.009984																																		
3.57	0.054793																																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>-0.563</td><td>-0.0152985..</td></tr> <tr><td>-0.562</td><td>-0.0047243..</td></tr> <tr><td>-0.561</td><td>0.005836519</td></tr> </table> <p>X=-0.561</p>	X	f(X)	-0.563	-0.0152985..	-0.562	-0.0047243..	-0.561	0.005836519	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>3.56</td><td>-0.009984</td></tr> <tr><td>3.561</td><td>-0.0035575..</td></tr> <tr><td>3.562</td><td>0.002880328</td></tr> </table> <p>X=3.562</p>	X	f(X)	3.56	-0.009984	3.561	-0.0035575..	3.562	0.002880328																		
X	f(X)																																		
-0.563	-0.0152985..																																		
-0.562	-0.0047243..																																		
-0.561	0.005836519																																		
X	f(X)																																		
3.56	-0.009984																																		
3.561	-0.0035575..																																		
3.562	0.002880328																																		

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 8$.

Anleitung: Mithilfe der Wertetabelle kann man den ungefähren Verlauf des Graphen ablesen.

Wenn man die Schrittweite 1 wählt, findet man nur *einen* Vorzeichenwechsel – die Funktion scheint nur eine reelle Nullstelle zu haben. Warum ist eine genauere Untersuchung des Graphenverlaufs notwendig?

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table> <p>X=0</p>	X	f(X)	-1	0	0	8	1	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td></tr> </table> <p>X=4</p>	X	f(X)	1	0	2	0	3	0	4	0
X	f(X)																		
-1	0																		
0	8																		
1	0																		
X	f(X)																		
1	0																		
2	0																		
3	0																		
4	0																		

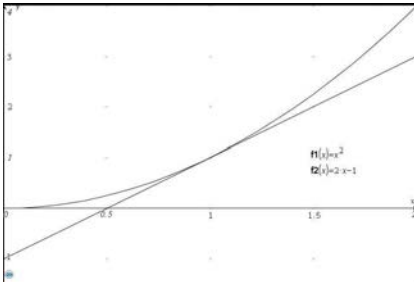
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

Einführung in die Differenzialrechnung: Untersuchung von Sekantensteigungen


Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Untersuchen Sie die Steigung der Sekanten durch den festen Punkt $P(1 | 1)$ und durch variable Punkte Q , die auf dem Graphen von f liegen und auf P zulaufen.

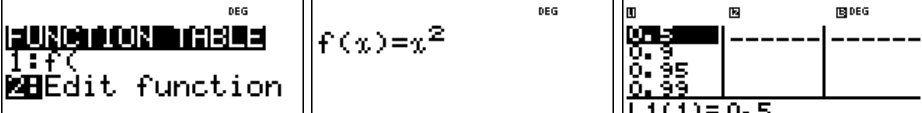


Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:
Umgang mit Listenformeln im `data`-Menü



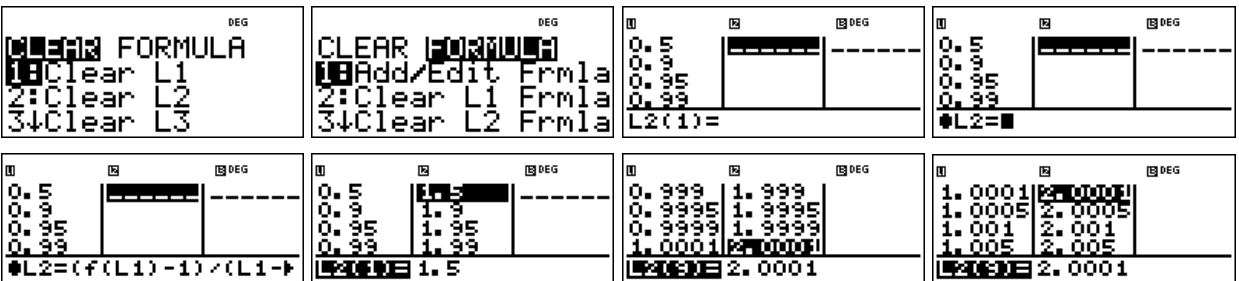
Erläuterung der Lösung

Die zu untersuchende Funktion definieren wir mithilfe von „Edit function“ im `table`-Menü. Die x -Werte des sich auf P zu bewegendes Punktes Q tragen wir in Liste $L1$ im `data`-Menü ein. Hier wurden gewählt: $x = 0,5 ; 0,9 ; 0,95 ; 0,99 ; 0,995 ; 0,999 ; \dots ; 0,9999$ und dann die „gespiegelten“ Werte $1,0001 ; 1,0005 ; 1,001 ; \dots ; 1,5$.



Die Steigung m der Sekanten durch die Punkte P und Q berechnet man mithilfe von $m = \frac{f(x_Q) - f(1)}{x_Q - 1}$. Auf dem TI-30X Plus MultiView™ realisieren wir dies mithilfe von Listenformeln

wie folgt: Drückt man einmal auf die `data`-Taste sind die Listen sichtbar, wenn man ein zweites Mal drückt, erscheint das Menü zur Bearbeitung der Listen (Löschen von Listen und Eingabe und Löschen von Formeln). Wir markieren ein Feld in Liste $L2$; jetzt erwartet der Rechner die Eingabe einer Berechnungsvorschrift für die Liste $L2$. Bei der Eingabe der Formel verwenden wir Option 1 des `table`-Menüs „f(“) sowie das Symbol „L1“, das wir durch erneutes Drücken der `data`-Taste erhalten. Nach Drücken der `enter`-Taste werden die Sekantensteigungen berechnet.



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Steigung der Sekanten für eine Folge von Punkten Q , die auf P zulaufen,

- für $f(x) = x^2$ und $P(2 | 4)$ [$P(0,5 | 0,25)$]
- für $f(x) = x^3$ und $P(1 | 1)$ [$P(2 | 8)$, $P(0,5 | 0,125)$]
- für $f(x) = \sqrt{x}$ und $P(1 | 1)$ [$P(4 | 2)$, $P(9 | 3)$]

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

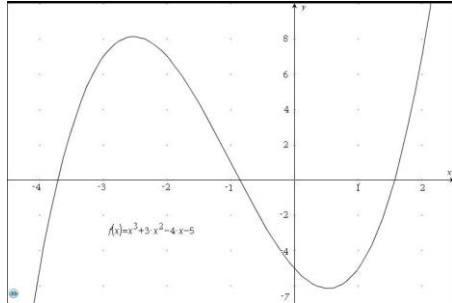
Untersuchung des Monotonieverhaltens und der Krümmung des Graphen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 5.$$

Untersuchen Sie die Steigung des Graphen im Intervall $[-4 ; +3]$. Beschreiben Sie hiermit das Monotonieverhalten und die Art der Krümmung des Graphen.



Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Wertetabelle einer Funktion (`table`)

Listenformeln im `data`-Menü

DEG

FUNCTION TABLE

1: f(x)

2: Edit function

DEG

CLEAR [FUNCTION]

1: Add/Edit Frmla

2: Clear L1 Frmla

3: Clear L2 Frmla

Erläuterung der Lösung

Die Bestimmung der Sekantensteigungen kann systematisch erfolgen: Gibt man den Funktions-term im `table`-Menü ein und definiert für Liste L2 den symmetrischen Differenzenquotient $\frac{f(x+0.01) - f(x-0.01)}{0,02}$, dann gibt dieser die Steigung der Sekante von zwei Punkten an, die gleichzeitig symmetrisch zu einer Stelle x und außerdem ziemlich nahe bei x liegen.

Zunächst gibt man in Liste L1 gewünschte x-Werte ein (hier von -4 bis +3 mit Schrittweite 0.5). Dann definiert man die o. a. Listenformel für L2 und erhält automatisch die Sekantensteigungen. An der Entwicklung der Werte erkennt man, dass die Steigungen zunächst positiv sind, aber abnehmen, zwischen -3 und -2,5 in den negativen Bereich übergehen, weiter abnehmen bis zur Stelle -1, dann wieder zunehmen und zwischen 0.5 und 1 wieder in den positiven Bereich übergehen, dann weiter zunehmen. Die relevanten Stellen kann man durch schrittweise Verfeinerung genauer ermitteln.

- Monotonie: Der Graph von f ist für $x < -2.527$ streng monoton steigend, für $-2.528 < x < 0.527$ streng monoton fallend, für $x > 0.528$ streng monoton steigend.
- Krümmung: Der Graph von f ist für $x < -1$ rechtsgekrümmt, für $x > -1$ linksgekrümmt.

<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$	<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">-4</td><td style="width: 50%;"></td></tr> <tr><td>-3.5</td><td></td></tr> <tr><td>-3</td><td></td></tr> <tr><td>-2.5</td><td></td></tr> </table> <p>L2(1) =</p>	-4		-3.5		-3		-2.5		<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">-4</td><td style="width: 50%;"></td></tr> <tr><td>-3.5</td><td></td></tr> <tr><td>-3</td><td></td></tr> <tr><td>-2.5</td><td></td></tr> </table> <p>L2 = (f(L1+0.01) - f(L1-0.01)) / 0.02</p>	-4		-3.5		-3		-2.5		<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">-4</td><td style="width: 50%;">200.00</td></tr> <tr><td>-3.5</td><td>117.50</td></tr> <tr><td>-3</td><td>50.001</td></tr> <tr><td>-2.5</td><td>-2.499</td></tr> </table> <p>L1(1) = -4</p>	-4	200.00	-3.5	117.50	-3	50.001	-2.5	-2.499
-4																											
-3.5																											
-3																											
-2.5																											
-4																											
-3.5																											
-3																											
-2.5																											
-4	200.00																										
-3.5	117.50																										
-3	50.001																										
-2.5	-2.499																										
<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">-2</td><td style="width: 50%;">-40.00</td></tr> <tr><td>-1.5</td><td>-62.50</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-70.00</td></tr> <tr><td>-0.5</td><td>-62.50</td></tr> </table> <p>L1(8) = -0.5</p>	-2	-40.00	-1.5	-62.50	-1	-70.00	-0.5	-62.50	<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">0</td><td style="width: 50%;">-40.00</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>-2.499</td></tr> <tr><td>1</td><td>50.001</td></tr> <tr><td>1.5</td><td>117.50</td></tr> </table> <p>L1(12) = 1.5</p>	0	-40.00	0.5	-2.499	1	50.001	1.5	117.50	<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">1.5</td><td style="width: 50%;">117.50</td></tr> <tr><td>2</td><td>200.00</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>297.50</td></tr> <tr><td>3</td><td>410.00</td></tr> </table> <p>L1(15) = 3</p>	1.5	117.50	2	200.00	2.5	297.50	3	410.00	
-2	-40.00																										
-1.5	-62.50																										
-1	-70.00																										
-0.5	-62.50																										
0	-40.00																										
0.5	-2.499																										
1	50.001																										
1.5	117.50																										
1.5	117.50																										
2	200.00																										
2.5	297.50																										
3	410.00																										
<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">-2.526</td><td style="width: 50%;">-0.139</td></tr> <tr><td>-2.527</td><td>-0.047</td></tr> <tr><td>-2.528</td><td>0.0445</td></tr> </table> <p>L1(25) =</p>	-2.526	-0.139	-2.527	-0.047	-2.528	0.0445	<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">0.52</td><td style="width: 50%;">-0.687</td></tr> <tr><td>0.528</td><td>0.0445</td></tr> <tr><td>0.527</td><td>-0.047</td></tr> </table> <p>L1(30) =</p>	0.52	-0.687	0.528	0.0445	0.527	-0.047	<p style="font-size: small; text-align: right;">DEG</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 50%;">-0.9</td><td style="width: 50%;">-69.70</td></tr> <tr><td>-0.99</td><td>-70.00</td></tr> <tr><td>-1.01</td><td>-70.00</td></tr> <tr><td>-1.1</td><td>-69.70</td></tr> </table> <p>L1(33) = -1.1</p>	-0.9	-69.70	-0.99	-70.00	-1.01	-70.00	-1.1	-69.70					
-2.526	-0.139																										
-2.527	-0.047																										
-2.528	0.0445																										
0.52	-0.687																										
0.528	0.0445																										
0.527	-0.047																										
-0.9	-69.70																										
-0.99	-70.00																										
-1.01	-70.00																										
-1.1	-69.70																										

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen.

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ (2) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ (3) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

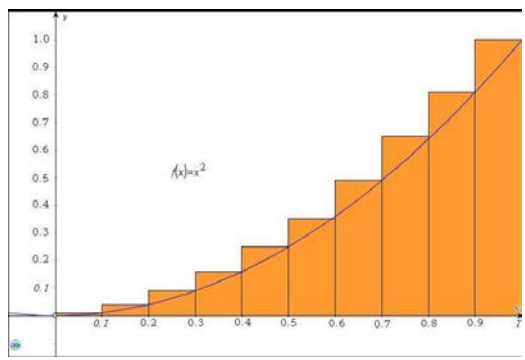
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (2)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion f , die auf dem Intervall $[0 ; b]$ streng monoton steigend ist, beispielsweise $f(x) = x^2$ und $b = 1$ (siehe Abbildung rechts).

Die Maßzahl der Fläche des Flächenstücks zwischen Graph und x -Achse soll für das Intervall bestimmt werden.

Dazu betrachtet man Rechtecke mit der Breite Δx , deren Höhe bestimmt wird durch den Funktionswert von f am rechten Eckpunkt des jeweiligen Teilintervalls und bestimmt deren Gesamtgröße.

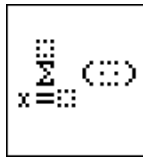
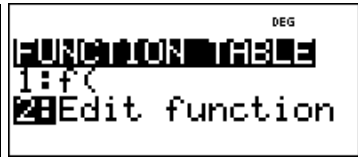


Bestimmen Sie die Flächenmaße für eine Unterteilung des Intervalls in $n = 10, 100, 1000$ Teile für (1) $f(x) = e^x - 1$ über dem Intervall $[0 ; 1]$ (2) $f(x) = \sin(x)$ über dem Intervall $[0 ; \pi/2]$

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:

Summen-Funktion des Math-Menüs

Eingabe eines Funktionsterms (`table`)

Erläuterung der Lösung

Da der Graph der Funktion f streng monoton steigend auf dem Intervall ist, ergibt sich die Gesamtfläche der Treppenfigur (Obersumme O_n) aus dem Produkt der Funktionswerte am rechten Eckpunkt des Teilintervalls und der Rechteckbreite $\Delta x = b/n$: $O_n = \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b \cdot k}{n}\right) = \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{b \cdot k}{n}\right)$

Zunächst geben wir den Funktionsterm $f(x)$ über das `table`-Menü ein; den Summenterm bestimmen wir mithilfe der Summen-Funktion des Math-Menüs: Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für k (auf dem Rechner heißen alle Variablen x) am Summenzeichen Σ sowie den Term $f(x_k)$, den man über die Option 1 des `table`-Befehls aktiviert. Die Anzahl der Unterteilungen kann erhöht werden, indem man zurückscrollt und korrigiert. Für Teilaufgabe (2) muss nur der Funktionsterm im `table`-Menü ausgetauscht sowie b korrigiert werden (`mode`: RAD beachten).

$f(x) = e^x - 1$	$\frac{1}{10} \sum_{x=1}^{10} \left(f\left(\frac{x}{10}\right) \right)$ 0.805627583	$\frac{1}{100} \sum_{x=1}^{100} \left(f\left(\frac{x}{100}\right) \right)$ 0.726887557	$\frac{1}{1000} \sum_{x=1}^{1000} \left(f\left(\frac{x}{1000}\right) \right)$ 0.719141113
$f(x) = \sin(x)$	$\frac{\pi}{20} \sum_{x=1}^{10} \left(f\left(\frac{\pi x}{20}\right) \right)$ 1.076482803	$\frac{\pi}{200} \sum_{x=1}^{100} \left(f\left(\frac{\pi x}{200}\right) \right)$ 1.00783342	$\frac{\pi}{2000} \sum_{x=1}^{1000} \left(f\left(\frac{\pi x}{2000}\right) \right)$ 1.000785192

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Obersummen $O_{10}, O_{100}, O_{1000}$ für

(1) $f(x) = \sin^2(x)$ auf dem Intervall $[0 ; \pi/2]$

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ auf dem Intervall $[1 ; 2]$

Gebiet: Analysis

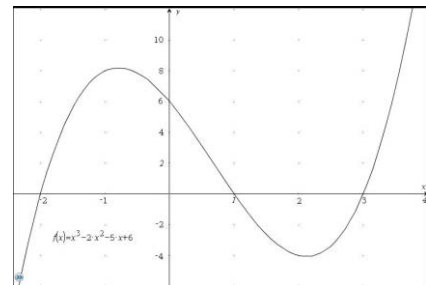
Einsatz ab Stufe 11

Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (1)**Beispiel-Aufgabe**

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

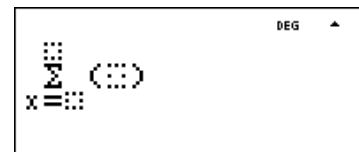
Hinweis: Die Nullstellen von $f(x)$ sind ganzzahlig.



Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Speichern eines Funktionsterms

Summenfunktion des Math-Menüs

**Erläuterung der Lösung**

Mithilfe der Wertetabelle der Funktion findet man die drei ganzzahligen Nullstellen -2 ; $+1$ und $+3$.

Das erste Flächenstück liegt oberhalb der x-Achse und erstreckt sich über ein Intervall der Breite 3, das zweite liegt unterhalb der x-Achse und erstreckt sich über ein Intervall der Breite 2.

Näherungsweise können die Flächenstücke durch Trapeze ausgeschöpft bzw. überdeckt werden. Wählt man als Breite der Trapeze 0,01, dann werden beim links liegenden Flächenstück 300 Trapeze betrachtet, beim rechts liegenden 200. Die schrägen Seiten der Trapeze bilden einen Streckenzug längs des Graphen.

Der Flächeninhalt *eines* Trapezes mit linker Ecke a : $\frac{1}{2} \cdot [f(a) + f(a+0,01)] \cdot 0,01$
 $=$ (Mittelwert der Funktionswerte an der Stelle a und an der Stelle $a+0,01$) \cdot Breite

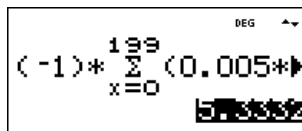
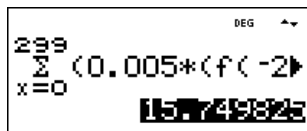
Für $x = -2$ ergibt sich für die Summe der Flächeninhalte der 300 Trapeze \approx Flächeninhalt des

Flächenstücks links: $\sum_{k=0}^{299} 0,005 \cdot (f(-2 + 0,01k) + f(-2 + 0,01k + 0,01)) \approx 15,75$ FE.

Für $x = +1$ ergibt sich für die Summe der Flächeninhalte der 200 Trapeze \approx Flächeninhalt des

Flächenstücks rechts: $(-1) \cdot \sum_{k=0}^{199} 0,005 \cdot (f(1 + 0,01k) + f(1 + 0,01k + 0,01)) \approx 5,33$ FE.

Da der Graph im Intervall rechts unterhalb der x-Achse verläuft, muss der Term mit (-1) multipliziert werden.

**Übungsaufgaben**

Bestimmen Sie die ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion f . Fertigen Sie eine Skizze des Graphen an, um vorherzusagen, welche der einzelnen Flächenstücke unterhalb bzw. oberhalb der x-Achse liegen. Bestimmen Sie näherungsweise die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ (2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$ (3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

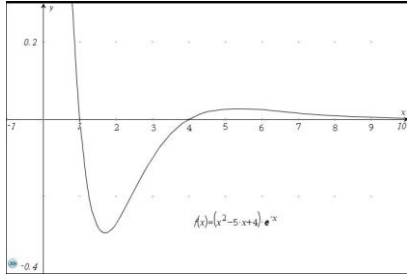
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (2)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}$$

Gesucht sind die Maßzahlen der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden.



Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Speichern eines Funktionsterms

Summenfunktion des Math-Menüs




Erläuterung der Lösung

Über die **table**-Option gibt man den Funktionsterm ein. Der Rechner erzeugt eine Wertetabelle, die für das Anfertigen einer Skizze des Graphen verwendet werden kann.

Auf dem Intervall [1 ; 4] werden 300 Trapeze der Breite 0,01 betrachtet.

$$(-1) \cdot \sum_{k=0}^{299} 0,005 \cdot (f(1 + 0,01k) + f(1 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,459 \text{ FE.}$$

Für das rechts liegende Flächenstück, das bis ins Unendliche reicht, werden zunächst 1000 Trapeze der Breite 0,01 für das Intervall [4 ; 14] betrachtet:

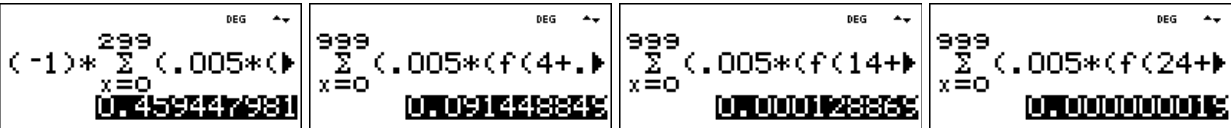
$$\sum_{k=0}^{999} 0,005 \cdot (f(4 + 0,01k) + f(4 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,09145$$

dann jeweils 1000 Trapeze für das Intervall [14 ; 24] bzw. [24 ; 34]:

$$\sum_{k=0}^{999} 0,005 \cdot (f(14 + 0,01k) + f(14 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,00013$$

$$\sum_{k=0}^{999} 0,005 \cdot (f(24 + 0,01k) + f(24 + 0,01k + 0,01)) \approx 0,00000019$$

Da der Zuwachs minimal ist, kann abschätzen, dass der Graph so dicht an der x-Achse liegt, dass das Flächenstück für den Gesamt-Flächeninhalt keine Rolle spielt, d. h. das Flächenstück mit unendlich großem Umfang hat einen endlich großen Flächeninhalt von ca. 0,0916 FE.



Übungsaufgaben

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie die Maßzahl der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

- (1) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ (2) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x \cdot e^{-x}$ (3) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) \cdot e^{-x}$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
--------------------------------------	---------------------

Untersuchung des möglichen Schnittwinkels einer Geraden mit einer Geradenschar

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die Parameterdarstellungen einer Geraden g sowie eine Geradenschar h_t , die mit der Geraden einen Punkt gemeinsam haben. Welche Winkel können zwischen g und h_t auftreten?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion (**table**)

Erläuterung der Lösung

Für den Schnittwinkel α zwischen zwei sich schneidenden Geraden, d. h. zwischen den beiden Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} , gilt: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} * \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, also: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u} * \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$.

Hier ist: $\vec{u} * \vec{v} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot t = 6 + 2 + t = 8 + t$ und $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + t^2} = 3 \cdot \sqrt{10 + t^2}$

Die Untersuchung der möglichen Schnittwinkel lässt sich also auf die Untersuchung einer Funktion f mit $f(t) = \cos^{-1}\left(\frac{8+t}{3 \cdot \sqrt{10+t^2}}\right)$ zurückführen (Mode: DEG).

Mithilfe der **table**-Option kann zunächst grob, dann in kleinen Schritten der Verlauf des Graphen untersucht werden. Dabei nutzt man zunächst die Option „x = ?“ im TABLE SETUP, um gezielt einzelne x-Werte einzugeben, dann die Option „Auto“, um mit einer kleineren Schrittweite das Intervall zwischen -8 (90°) und +6 näher zu untersuchen.

Man findet heraus, dass die Größe des Schnittwinkels α zwischen ca. 109,47° (für $t = -10^6$) und ca. 24,94° (für $t \approx 1,25$) liegen kann. (Hinweis: $\alpha \approx 70,53^\circ = 180^\circ - 109,47^\circ$ für $t = +10^6$)

	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>-1000</td><td>109.3091441</td></tr> <tr><td>-100</td><td>107.9492398</td></tr> <tr><td>-50</td><td>106.2268849</td></tr> </table>	x	f(x)	-1000	109.3091441	-100	107.9492398	-50	106.2268849	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>-20</td><td>101.3934876</td></tr> <tr><td>-10</td><td>93.64441579</td></tr> <tr><td>-5</td><td>80.26852453</td></tr> </table>	x	f(x)	-20	101.3934876	-10	93.64441579	-5	80.26852453	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0</td><td>32.51251732</td></tr> <tr><td>5</td><td>42.90638621</td></tr> <tr><td>10</td><td>55.10477269</td></tr> </table>	x	f(x)	0	32.51251732	5	42.90638621	10	55.10477269								
x	f(x)																																		
-1000	109.3091441																																		
-100	107.9492398																																		
-50	106.2268849																																		
x	f(x)																																		
-20	101.3934876																																		
-10	93.64441579																																		
-5	80.26852453																																		
x	f(x)																																		
0	32.51251732																																		
5	42.90638621																																		
10	55.10477269																																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>20</td><td>62.55218848</td></tr> <tr><td>50</td><td>67.3006457</td></tr> <tr><td>100</td><td>68.91084969</td></tr> </table>	x	f(x)	20	62.55218848	50	67.3006457	100	68.91084969	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>-8</td><td>90</td></tr> <tr><td>-7</td><td>87.51279387</td></tr> <tr><td>-6</td><td>84.35902344</td></tr> </table>	x	f(x)	-8	90	-7	87.51279387	-6	84.35902344	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>-5</td><td>80.26852453</td></tr> <tr><td>-4</td><td>74.84161617</td></tr> <tr><td>-3</td><td>67.52008419</td></tr> </table>	x	f(x)	-5	80.26852453	-4	74.84161617	-3	67.52008419	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>-2</td><td>57.68846676</td></tr> <tr><td>-1</td><td>45.28937254</td></tr> <tr><td>0</td><td>32.51251732</td></tr> </table>	x	f(x)	-2	57.68846676	-1	45.28937254	0	32.51251732
x	f(x)																																		
20	62.55218848																																		
50	67.3006457																																		
100	68.91084969																																		
x	f(x)																																		
-8	90																																		
-7	87.51279387																																		
-6	84.35902344																																		
x	f(x)																																		
-5	80.26852453																																		
-4	74.84161617																																		
-3	67.52008419																																		
x	f(x)																																		
-2	57.68846676																																		
-1	45.28937254																																		
0	32.51251732																																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>1</td><td>25.23940182</td></tr> <tr><td>2</td><td>27.01712322</td></tr> <tr><td>3</td><td>32.73389664</td></tr> </table>	x	f(x)	1	25.23940182	2	27.01712322	3	32.73389664	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>4</td><td>38.3288181</td></tr> <tr><td>5</td><td>42.90638621</td></tr> <tr><td>6</td><td>46.52308903</td></tr> </table>	x	f(x)	4	38.3288181	5	42.90638621	6	46.52308903	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>1.2</td><td>24.94962494</td></tr> <tr><td>1.3</td><td>24.949376</td></tr> <tr><td>1.4</td><td>25.03807716</td></tr> </table>	x	f(x)	1.2	24.94962494	1.3	24.949376	1.4	25.03807716	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>1.24</td><td>24.93844453</td></tr> <tr><td>1.25</td><td>24.9379827</td></tr> <tr><td>1.26</td><td>24.93844254</td></tr> </table>	x	f(x)	1.24	24.93844453	1.25	24.9379827	1.26	24.93844254
x	f(x)																																		
1	25.23940182																																		
2	27.01712322																																		
3	32.73389664																																		
x	f(x)																																		
4	38.3288181																																		
5	42.90638621																																		
6	46.52308903																																		
x	f(x)																																		
1.2	24.94962494																																		
1.3	24.949376																																		
1.4	25.03807716																																		
x	f(x)																																		
1.24	24.93844453																																		
1.25	24.9379827																																		
1.26	24.93844254																																		

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie die möglichen Schnittwinkel, wenn in der Beispiel-Aufgabe der Richtungsvektor \vec{v} der Geradenschar gegeben ist durch (vgl. rechts).

$(1) \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(2) \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
--------------------------------------	---------------------

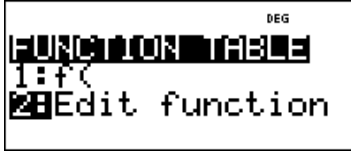
Ermittlung des Abstands eines Punktes von einer Geraden

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist der Punkt P (1 | 2 | 3) und die Gerade g, die gegeben ist durch eine Parameterdarstellung.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Welchen Abstand hat der Punkt P von der Geraden g?

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Bestimmen einer Wertetabelle einer Funktion (**table**)



Erläuterung der Lösung

Wir bilden den Differenzvektor $\vec{p} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1+r \\ -1-r \\ 2-2r \end{pmatrix}$ und untersuchen, für welche Einsetzung des Parameters r dieser Vektor einen möglichst kleinen Betrag hat.

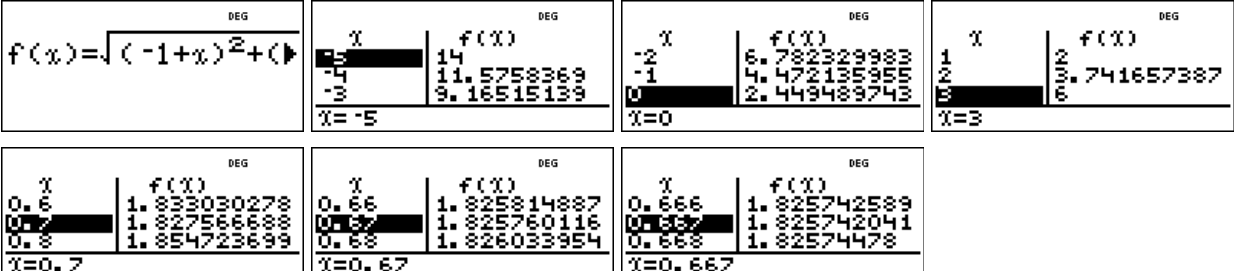
Mithilfe des TI-Schulrechners kann dies realisiert werden, indem eine Funktion f definiert wird, die in Abhängigkeit vom Parameter x (statt r) den Betrag des Differenzvektors berechnet:

$$f(x) = \sqrt{(-1+x)^2 + (-1-x)^2 + (2-2x)^2} \text{ (der Term muss nicht umgeformt werden)}$$

Mithilfe der **table**-Option kann zunächst grob, dann in kleinen Schritten der Verlauf des Graphen untersucht werden. Dabei kann man zunächst die Option „x = ?“ im TABLE SETUP nutzen, um gezielt einzelne x-Werte einzugeben, dann die Option „Auto“, um mit einer kleineren Schrittweite ein geeignet erscheinendes Intervall näher zu untersuchen.

Man findet heraus, dass der Abstand am kleinsten ist, wenn der Parameter den Wert $r \approx 0.667$ hat. Der Abstand beträgt dann ungefähr $f(0.667) \approx 1.826$ LE.

Durch Einsetzen von $r \approx 0.667$ in die Parameterdarstellung der Geraden erhält man den zugehörigen Fußpunkt des Lots F (1.333 | 3.667 | 2.334), für den dieser minimale Abstand zutrifft.



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P (1 | -1 | 1) von den Geraden g_1, g_2, g_3 :

(1) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 8
--	--------------------

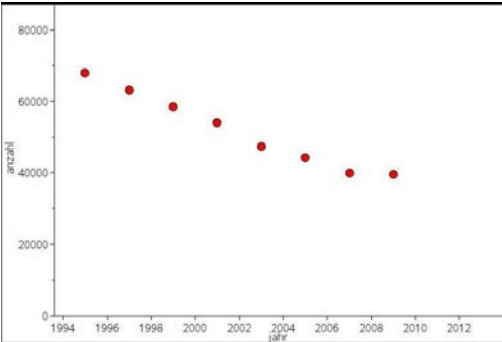
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine lineare Funktion

Beispiel-Aufgabe

Nach Angaben der Deutschen Bundesbank nahm die Anzahl der Bankfilialen in Deutschland in den letzten Jahren kontinuierlich ab.


Geben Sie aufgrund der Entwicklung eine Prognose an für die Anzahl der Bankfilialen im Jahr 2012.

(Hinweis: Wählen Sie statt der tatsächlichen Jahreszahlen die Zahlen 0, 2, 4, ..., 14.)



	Jahr	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009	
	Anzahl	67930	63186	58546	54089	47244	44100	39833	39441	

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:
 LinReg (**2nd** **data**)



Erläuterung der Lösung

Die Daten werden nach Drücken der **data**-Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über das STAT-REG-Menü die Option LinReg aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt. Außerdem wird die Option aktiviert, dass der berechnete lineare Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man anschließend über die Wertetabelle die Prognosewerte für kommende Jahre ablesen kann. Die am besten zu den Daten passende lineare Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) \approx -2181x + 67062$. Die gute Qualität der Anpassung lässt sich am Bestimmtheitsmaß r^2 ablesen, das nahe bei 1 liegt.



Um die Prognose vornehmen zu können, wird über die **table**-Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax + b$ gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben werden. Für das Jahr 2013 ergibt sich im linearen Modell die Prognose $f(18) \approx 27808$.



Übungsaufgabe

Der Bierabsatz in Deutschland (gemessen in Millionen Hektoliter) war in den letzten Jahren leicht rückläufig. Welche Prognose (gemäß linearem Modell) ergibt sich für das Jahr 2012?

Lineare Funktion: $f(x) =$

	Jahr	1994	1998	2002	2006	2008	2012	
	Volumen	115,7	109,4	107,8	106,8	102,9		← Prognose

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 9
--	--------------------


Regressionsrechnung: Modellieren durch eine quadratische Funktion

Beispiel-Aufgabe

Ein Basketballspieler wird beim Freiwurf-Training fotografiert. Legt man ein Koordinatensystem über die Bilder, dann stellt man fest: Der Ball wird in A (0 | 225) abgeworfen; die Mitte des Korbes ist in B (430 | 305). Aus den Fotos sind ungefähr die Punkte C (100 | 310), D (200 | 395), E (300 | 375) zu entnehmen (Angaben in cm).


Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, durch welche die Wurfparabel am besten beschrieben werden kann.

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:
 QuadraticReg des STAT-Reg-Menüs (2nd data)



Erläuterung der Lösung

Die Daten werden nach Drücken der data -Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über das STAT-REG-Menü die Option QuadraticReg aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt. Außerdem wird die Option aktiviert, dass der berechnete quadratische Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man auch Zwischenwerte ablesen kann. Die am besten zu den Daten passende quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) \approx -0,0026x^2 + 1,316 x + 219,9$. Die gute Qualität der Anpassung lässt sich am Bestimmtheitsmaß R^2 ablesen, das nahe bei 1 liegt.



Um weitere Punkte der Flugkurve ablesen zu können, wird über die table -Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben werden.



Übungsaufgabe

1. Durch drei Punkte ist eine quadratische Parabel eindeutig bestimmt. Bestimmen Sie die Gleichung mithilfe einer quadratischen Regression.

(1) $P_1 (-2 | 5)$; $P_2 (0 | -1)$; $P_3 (3 | 8)$

(2) $P_1 (-2 | -3)$; $P_2 (1 | 1)$; $P_3 (5 | 0)$

2. Ein Ball wird aus einer Höhe von 8 m über der Straßenebene waagrecht aus einem Fenster geworfen. Er trifft in 10 m Entfernung von der Hauswand auf dem Boden auf.

Bestimmen Sie die Gleichung der Wurfparabel mithilfe einer quadratischen Regression.

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 10
--	---------------------

Regressionsrechnung: Optimierung einer exponentiellen Modellierung

Beispiel-Aufgabe

Nach Angaben der Deutschen Bundesbank nahm die Anzahl der Bankfilialen in Deutschland in den letzten Jahren kontinuierlich ab.

Suchen Sie eine Modellierung, die am besten zur Entwicklung passt und geben Sie eine Prognose an für die Anzahl der Bankfilialen im Jahr 2012.

(Hinweis: Wählen Sie statt der tatsächlichen Jahreszahlen die Zahlen 0, 2, 4, ..., 14.)

	Jahr	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009
	Anzahl	67930	63186	58546	54089	47244	44100	39833	39441

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:

STAT-REG: ExpReg (**2nd** **data**)

```

DEG
STAT REG DISTR
7:LnReg a+b*lnx
8:PwrReg ax^b
9:EXPReg ab^x
        
```

Erläuterung der Lösung (Modellieren mit einer linearen Funktion wird als bekannt vorausgesetzt)

Die Anpassung durch eine exponentielle Funktion mit $y = 68309 \cdot b^{0,9586}$ hat das Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0,9846$ und ermöglicht die Prognose $f(18) \approx 31930$.

10	44100	DEG
12	39833	
14	39441	
L2(9)=		

DEG
1:a=68308.6565
2:b=0.9586300788
3:r^2=0.984572808

DEG	
x	f(x)
16	34745.02034
18	31929.68791
20	29342.47727
x=18	

Aus der Sachsituation ist nicht zu vermuten, dass die Anzahl der Bankfilialen gegen null geht (wie bei einer Exponentialfunktion). Vielmehr ist anzunehmen, dass die Anzahl zwar weiter abnimmt, aber nicht unter einen Sockelbetrag fallen wird, d. h. optimal scheint eine Modellierung mithilfe einer Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = c + a \cdot b^x$. Gesucht ist dasjenige c, das optimal zu den gegebenen Daten passt. In Liste L3 werden die um c verminderten Daten gespeichert.

Für $c = 20000$ ergibt sich für 2013 die Prognose $f(18) \approx 13901$ (+20000) mit $r^2 \approx 0,9843$ und für $c = 30000$ erhalten wir $f(18) \approx 5847$ (+30000) – wobei $r^2 \approx 0,9785$ schlechter ist als oben.

Die Variation von c ergibt: $c = 11000$ ist optimal mit $r^2 \approx 0,9849$ und $f(18) = 21820$ (+11000).

10	44100	DEG	24100
12	39833		19833
14	39441		19441
L3(9)=			

DEG
YDATA: L2 L3
XDATA: L1 L2 L3
FRQ: NONE L1 L2 L3
Regress: NO YES
y=ab^x
DEG
1:a=49431.26598
2:b=0.9319476525
3:r^2=0.984270288

DEG	
x	f(x)
16	16005.38159
18	13901.09638
20	12073.47
x=18	

10	44100	DEG	33100
12	39833		28833
14	39441		28441
L3(9)=			

DEG
1:a=57748.11013
2:b=0.9473650541
3:r^2=0.984860217

DEG	
x	f(x)
16	24311.71223
18	21819.77499
20	19583.25996
x=18	

Übungsaufgabe

- a) Berechnen Sie für die o. a. Modellierung die Qualität der Anpassung für unterschiedliche Werte von c.
- b) Begründen Sie, warum andere Modellierungen nicht sachgerecht wären.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 9
---------------------------	--------------------

Binomialkoeffizienten – Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lottospiel 6 aus 49

Beispiel-Aufgabe
 Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der geraden Glückszahlen beim Lottospiel ,6 aus 49'*

Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:
 Binomialkoeffizienten ($\frac{nCr}{nPr}$)
 $\frac{table}{table}$ -Funktion

$$\frac{24 \text{ nCr } 6 * 25 \text{ nCr } 6}{49 \text{ nCr } 6}$$

Erläuterung der Lösung

Da es 24 gerade und 25 ungerade Zahlen in der Menge {1, 2, ..., 49} gibt, berechnen sich die Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Terms

$$P(X = k) = \frac{\binom{24}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Dieser Term kann als Funktionsterm f(x) mithilfe der $\frac{table}{table}$ -Funktion eingegeben werden (Achtung: $\frac{table}{table}$ verwenden und 6-k als (6-x) in Klammern setzen). Die in der Wertetabelle auftretenden Brüche können durch Drücken der $\frac{table}{table}$ -Taste als Dezimalzahlen angezeigt werden (dies ist im Display nur unten sichtbar).

$f(x) = \frac{24 \text{ nCr } x *}{49 \text{ nCr } 6}$

x	f(x)
-1	Error
0	0,0126464
1	0,0918541

x	f(x)
2	0,249674338
3	0,332899117
4	0,227963525835

x	f(x)
5	0,075987842
6	Error

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,0127	0,0912	0,2497	0,3329	0,2280	0,0760	0,0096

Übungsaufgaben

1 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Richtigen beim Lottospiel ,6 aus 49'* (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl)

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)							

1 b) Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnränge mit Zusatzzahl.

3 Richtige mit Z.	4 Richtige mit Z.	5 Richtige mit Z.
-------------------	-------------------	-------------------

2. In einer Klasse sind 13 Jungen und 16 Mädchen; 5 hiervon erhalten durch Auslosung eine Freikarte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten k Mädchen eine Freikarte?

k	0	1	2	3	4	5	
P(X = k)							

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen einer Binomialverteilung (vollständige Verteilung)

Beispiel-Aufgabe
 Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Sechsen beim 10-fachen Würfeln*

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Binomialpdf im DISTR-Menü (2^{nd} | data)
 Definition von Funktionstermen in der $\boxed{\text{table}}$ -Option

```

DEG
STAT-REG 0.913
3↑InvNormal
4⇐Binomialpdf
5↓Binomialcdf
                
```

Erläuterung der Lösung

Der TI-Schulrechner bietet zwei Möglichkeiten, die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und anzuzeigen: Die Verteilung ist im DISTR-Menü aufrufbar (dort hat man die Optionen SINGLE-LIST-ALL); wählt man die gesamte Verteilung, dann wird diese in einer Liste abgespeichert, die jedoch maximal 42 Elemente enthalten darf (also $k = 0, 1, \dots, n; n \leq 41$). Hier wurde L2 als Liste gewählt; zuvor wurden über den $\boxed{\text{data}}$ -Befehl die Werte der Zufallsgröße ($X = 0, 1, 2, \dots, 10$) einzeln in Liste L1 eingegeben, um die Zuordnung zu erleichtern. Die Wahrscheinlichkeiten werden in der Liste 4-stellig angezeigt; in der Anzeige im Display unten sind jeweils 9 Stellen ablesbar.

Die andere Möglichkeit ist, den Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit (gemäß der BERNOULLI-Formel) über die $\boxed{\text{table}}$ -Option als $f(x)$ einzugeben: $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$ und dann in der Wertetabelle nachzuschauen (die Funktionsvariable heißt grundsätzlich x).

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialpdf X: SINGLE LIST ALL </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialpdf TRIALS=n=10 P(SUCCESS)=1/6 </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialpdf SAVE FOR 0: X in SAVE TO: L1 L3 </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 0 0.161505582 1 0.323011166 2 0.290780189 3 0.155008227 L2(1)=0.161505582.. </pre>
<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG L1 0 0.0543 1 0.0130 2 0.0022 3 0.0003 L2(8)=0.000248072.. </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 8 8.3E-7 9 1.7E-8 L2(9)=0.000018605.. </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG f(x)=10 nCr x*(</pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG TABLE SETUP Start=0 Step=1 X=? CALC </pre>
<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG X f(X) -1 Error 0 0.161505582 1 0.323011166 X=-1 </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG X f(X) 9 0.000000827 10 0.000000017 11 0 f(X)=0 </pre>		

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Wappen beim 20-fachen Münzwurf*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X = k)											
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
P(X = k)											

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge beim 12-stufigen BERNOULLI-Versuch mit $p = 0,3$*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = k)													

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

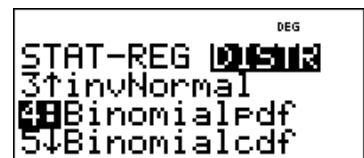
Bestimmen einer Binomialverteilung (einzelne Werte)

Beispiel-Aufgabe

200 Rosinen werden zufällig in den Teig von 100 Rosinenbrötchen verteilt. Ein Rosinenbrötchen wird zufällig ausgewählt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in diesem Brötchen keine Rosine, genau eine Rosine, zwei Rosinen, drei, vier, mehr als vier Rosinen?

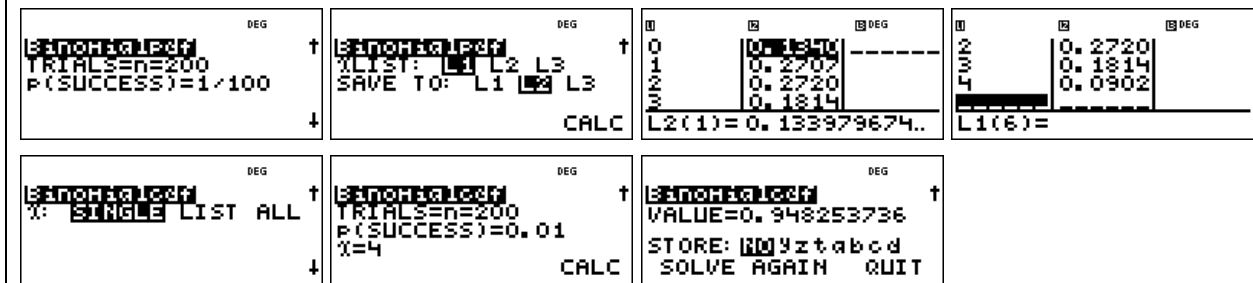
Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
Binomialpdf im DISTR-Menü ($\boxed{2nd}$ \boxed{data})



Erläuterung der Lösung

Die Berechnung von einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung ist über das DISTR-Menü aufrufbar; dort kann man die Option SINGLE oder LIST aufrufen. Wählt man LIST, dann muss man zunächst eine Liste von interessierenden Werten anlegen. Dies geschieht hier in Liste L1 über den \boxed{data} -Befehl. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten werden in der Liste 4-stellig angezeigt; in der Anzeige im Display unten sind jeweils 9 Stellen ablesbar.

Wir modellieren den Vorgang als 500-stufigen BERNOULLI-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/100$. Wir entnehmen die Einzelwahrscheinlichkeiten der Liste L2. Statt die berechneten 5 Wahrscheinlichkeiten zu addieren, benutzen wir die kumulierte Binomialverteilung, um den Wert $P(X \leq 4)$ zu berechnen und hieraus $P(X > 4) = 1 - 0,9483 = 0,0517$ zu bestimmen



Lösung:	k	0	1	2	3	4	> 4
	$P(X = k)$	0,1340	0,2707	0,2720	0,1814	0,0902	0,0517

Übungsaufgaben

1. Eine Schule wird von 800 Schülern/innen besucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat keine Person, eine, zwei, drei, mehr als drei Schüler/innen an einem bestimmten Tag, z. B. am 25. Februar Geburtstag? (Modellierungsannahme: Die Wahrscheinlichkeit ist für alle Tage des Jahres gleich groß: $p = 1/365$; Schaltjahre werden nicht berücksichtigt.)

Lösung:	k	0	1	2	3	> 3	
	$P(X = k)$						

2. Ein Rouletterad (bestehend aus 37 gleich großen Sektoren) wird 50-mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Kugel auf einem bestimmten Feld, z. B. auf dem Feld mit der Nummer 0, keinmal, einmal, zweimal, mehr als zweimal liegen bleiben?

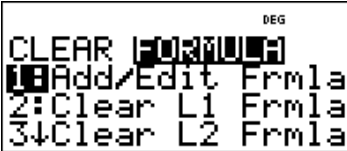

Lösung:	k	0	1	2	> 2		
	$P(X = k)$						

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz von Binomialverteilungen

Beispiel-Aufgabe
 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilungen mit $n = 100$ und $p = 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; \dots ; 0,9$ gemäß Definiton.

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Listen-Formeln (im **[data]**-Menü)
 Summen-Funktion im **[math]**-Menü

	
--	---

Erläuterung der Lösung


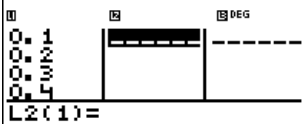
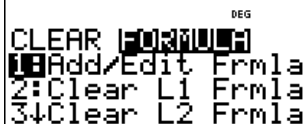
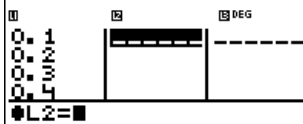
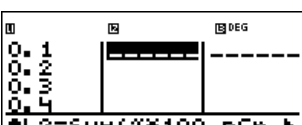
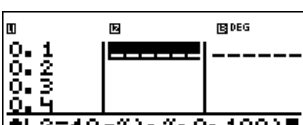
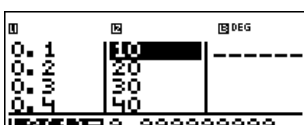
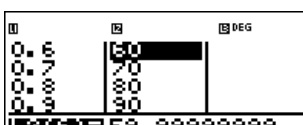
Gemäß Definition des Erwartungswerts $\mu = E(X)$ bzw. der Varianz $V(X) = \sigma^2$ gilt:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) \quad \text{und} \quad V(X) = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 \cdot P(X = k) \quad \text{wobei} \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Summenfunktion des TI-30X Plus MultiView™ bietet die Möglichkeit, auch Summen mit vielen Summanden zu berechnen. Wählt man Option 5 im **[math]**-Menü, dann erscheint das Summensymbol Σ ; im Zusammenhang mit den Listenformeln (die in eine Zeile passen müssen) muss eine bestimmte Reihenfolge der Eingabe (Komma als Trennzeichen) beachtet werden:

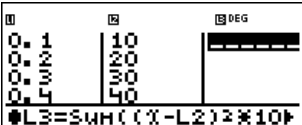
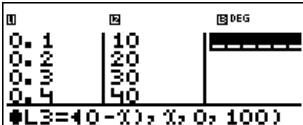
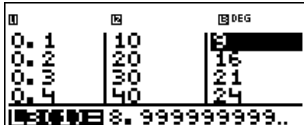
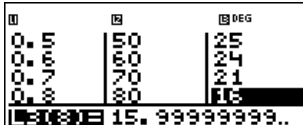
Sum(Term mit der Variablen x, Variablenname x, kleinster Wert für x, größter Wert für x)

Zur konkreten Aufgabe: In Liste L1 (**[data]**-Menü) geben wir die gewünschten Werte für die Erfolgswahrscheinlichkeit p ein. Dann erfolgt die Eingabe der Listenformel: Drückt man ein zweites Mal auf die **[data]**-Taste, erscheint das Menü zur Bearbeitung der Listen. Wir markieren ein Feld in Liste L2; jetzt erwartet der Rechner die Eingabe einer Berechnungsvorschrift für die Liste L2. Diese lautet für E(X): $L2 = \text{Sum}(x * 100 nCr x * L1^x * (1 - L1)^{(100 - x)}, x, 0, 100)$

Nach einiger Rechenzeit erscheinen dann die Erwartungswerte in der Spalte für Liste L2. Offensichtlich gilt: $E(X) = \mu = n \cdot p$.

Analog berechnen wir die Varianzen in Liste L3, wobei auch die gerade bestimmten Erwartungswerte aus Liste L2 verwendet werden. Auffallend an den Rechenergebnissen ist, dass die Varianzen gleich sind für p und 1 - p, und weiter, dass für alle Beispiele gilt: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

			
---	---	--	---

Übungsaufgaben

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Formeln $E(X) = n \cdot p$ und $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ für $n = 50$ [$n = 80$] und für $p = 1/4 ; p = 3/4 ; p = 1/3 ; p = 2/3 ; p = 1/6 ; p = 5/6$.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Optimierung der Annahme von Flugbuchungen

Beispiel-Aufgabe

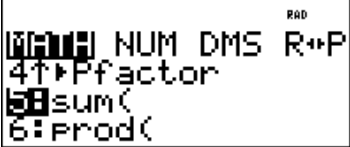
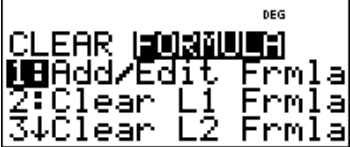
Wegen der Kapazität der eingesetzten Flugzeuge können für eine bestimmte Flugverbindung im Inland maximal 150 Plätze gebucht werden. Dennoch nimmt die Fluggesellschaft mehr Buchungen an, da im Mittel 10 % der Buchungen nicht wahrgenommen werden. An jeder Buchung verdient die Fluggesellschaft 30 € (auch bei den Fluggästen, die nicht erscheinen, denn diese müssen eine *No-Show*-Gebühr zahlen). Falls eine Buchung angenommen wurde, aber der Passagier nicht mitfliegen kann, muss nach EU-Recht eine Entschädigung von 250 € gezahlt werden.

- a) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn bei Annahme von 160 Buchungen.
- b) Bei welcher Anzahl von Buchungen ist der Gewinn die Fluggesellschaft maximal?

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Summenfunktion im **math**-Menü

Listenformeln in **data**-Menü

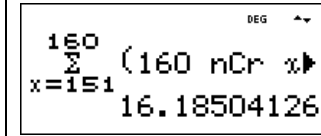



Erläuterung der Lösung

a) Wenn 160 Buchungen angenommen werden, muss mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 151)$ ein Betrag von 100 € als Entschädigung gezahlt werden, mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 152)$ ein Betrag von 200 €, ... und mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 160)$ ein Betrag von 1000 €, insgesamt

$$\sum_{k=151}^{160} \binom{160}{k} \cdot 0,9^k \cdot 0,1^{160-k} \cdot (k - 150) \cdot 250 \approx 16,19$$

Im Mittel müsste also bei Annahme von 160 Buchungen ein Betrag von 16,19 € an Entschädigungen gezahlt werden, d. h. der Gewinn beträgt $160 \cdot 30 \text{ €} - 16,19 \text{ €} = 4783,81 \text{ €}$.

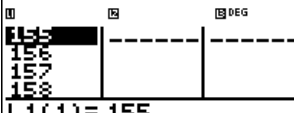

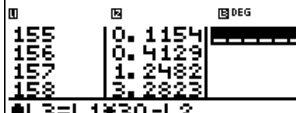
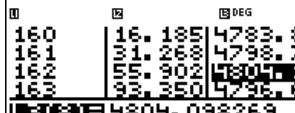


b) Es wäre nun lästig, alle interessierenden Werte von n in den Summenterm einzutippen und die so berechneten Daten in einer Tabelle zu erfassen. Hierzu kann man die Option der Listenformeln benutzen, die man über das **data**-Menü ansteuern kann (**data** doppelt anklicken):

Man gibt interessierende Werte für n in die Liste L1 ein und definiert dann für L2 eine Formel; dabei erscheint das Summenzeichen als „sum“-Befehl, bei dem nacheinander der Summenterm, der Name der Variablen, der kleinste und der größte Wert von x eingegeben werden müssen:

L2 = Sum(L1 nCr x * 0.9^x * 0.1^(L1-x)*(x - 150)*250 , x , 151 , L1)

Nachdem wir so die zu erwartenden Entschädigungsbeträge berechnet haben, können wir zur Berechnung des Gewinns kommen; dazu definieren wir die Listenformel $L3 = L1 \cdot 30 - L2$

Wir lesen ab: Bei der Annahme von 162 Buchungen ist der Gewinn am größten (4804,10 €).

Übungsaufgaben

- Welche Anzahl von Buchungen wäre optimal, wenn als Entschädigung auf 300 € erhöht würde [nur 150 € gezahlt werden müssen]?
- Wie verändert sich die Rechnung, wenn der Gewinn pro Buchung 25 € beträgt?

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (1)

Beispiel-Aufgabe

64 % der Haushalte in Deutschland verfügen über einen digitalen Fotoapparat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde man bei einer Zufallsstichprobe in 500 Haushalten in

(1) höchstens 320 (2) weniger als 310 (3) mindestens 315

(4) mehr als 330 (5) mindestens 312, höchstens 325

Haushalten einen solchen Fotoapparat finden?

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Binomialcdf im DISTR-Menü (2nd data)

```

DEG
STAT-REG 0.5168
4↑BinomialPdf
5↑Binomialcdf
6↓PoissonPdf
                    
```

Erläuterung der Lösung

Die Berechnung von Intervall-Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung ist über das DISTR-Menü aufrufbar. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können abgespeichert werden, was für die Lösung von Aufgabe (3) – (5) wichtig ist:

(1) $P(X \leq 320) = 0,5168$; (2) $P(X < 310) = P(X \leq 309) = 0,1639$

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=320 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.516843624 STORE: [0]yztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=309 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.163916815 STORE: [0]yztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>
--	---	--	---

(3) $P(X \geq 315) = 1 - P(X \leq 314) = 0,6969$; (4) $P(X > 330) = 1 - P(X \leq 329) = 0,1640$

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=314 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.303075165 STORE: NOyztabcd QUIT </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1-0.30307516534 1: x=314 2: y=0.3030751653 3: z=0 </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1-0.835989830889 0.164010169 </pre>
--	--	--	---

(5) $P(312 \leq X \leq 325) = P(X \leq 325) - P(X \leq 311) = 0,6947 - 0,2137 = 0,4809$ (wegen Rundung)

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=325 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.694678163 STORE: NOyztabcd QUIT </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=311 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.213736195 STORE: NOyztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>
<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1-0.2137361954 0.480941967 </pre>			

Übungsaufgaben

Eine Münze wird 400-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Wappen

(1) größer als 200 (5) höchstens gleich 190

(2) mindestens gleich 205 (6) kleiner als 215

(3) mindestens gleich 180, höchstens gleich 205

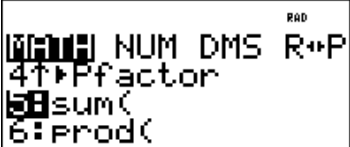
(4) größer als 185, aber kleiner als 207

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (2)

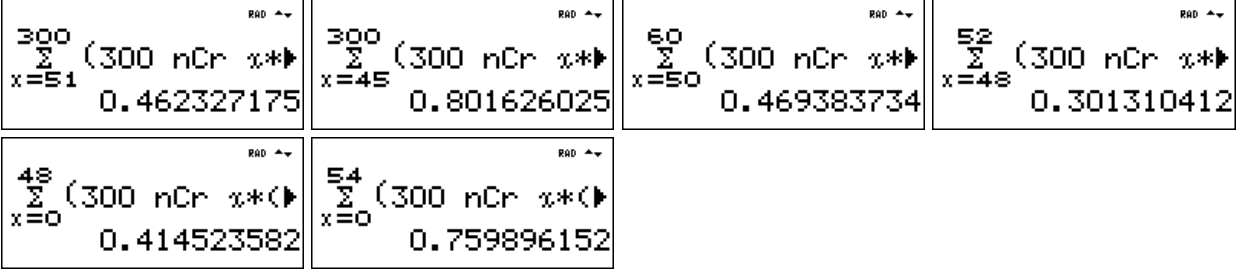
Beispiel-Aufgabe
 Ein Würfel wird 300-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Sechsen
 (1) größer als 50 (5) höchstens gleich 48
 (2) mindestens gleich 45 (6) kleiner als 55
 (3) mindestens gleich 50, höchstens gleich 60
 (4) größer als 47, aber kleiner als 53

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Summenfunktion im **math**-Menü



Erläuterung der Lösung
 Da der größte auftretende Binomialkoeffizient der Wahrscheinlichkeitsverteilung für n = 300 gleich $\binom{300}{150} \approx 9,4 \cdot 10^{88}$ ist, also noch auf dem Rechner darstellbar ist, kann man – wenn auch mit größerem Zeitaufwand – die Intervall-Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Summenfunktion gemäß BERNOULLI-Formel berechnen: $P(X = k) = \binom{300}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{300-k}$

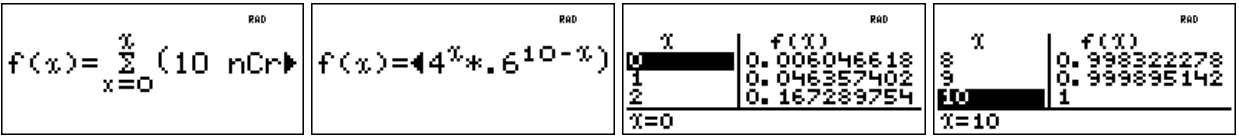
(1) $P(X > 50) = P(51 \leq X \leq 300) \approx 0,462$; (2) $P(X \geq 45) = P(45 \leq X \leq 300) \approx 0,802$;
 (3) $P(50 \leq X \leq 60) \approx 0,469$; (4) $P(47 < X < 53) = P(48 \leq X \leq 52) \approx 0,301$;
 (5) $P(X \leq 48) = P(0 \leq X \leq 48) \approx 0,415$; (6) $P(X < 55) = P(0 \leq X \leq 54) \approx 0,760$



Übungsaufgaben

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Wappen beim 200-fachen Münzwurf
 (1) größer als 100 (5) höchstens gleich 98
 (2) mindestens gleich 95 (6) kleiner als 103
 (3) mindestens gleich 90, höchstens gleich 105
 (4) größer als 92, aber kleiner als 103

2. Mithilfe des **table**-Menüs kann man eine Funktion definieren und deren Werte in der Wertetafel ablesen. Was berechnet der TI-30X Plus MultiView™ (richtig trotz der Variablen-Einfalt)?



Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Bestimmen von 95 %- Umgebungen um den Erwartungswert (sigma-Regel)

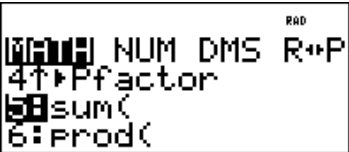
Beispiel-Aufgabe

Bestimmen Sie für (1) $n = 100$ bzw. (2) $n = 200$ und die Erfolgswahrscheinlichkeiten $p = 0,3$ bzw. $p = 0,4$ bzw. $p = 0,5$ symmetrische Umgebungen um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ derart, dass diese eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 95 % haben.

Berechnen Sie auch jeweils die zugehörige Standardabweichung und geben Sie den Radius der Umgebung als Vielfaches der Standardabweichung an. Welche Gesetzmäßigkeit fällt auf?

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Summenfunktion im **math**-Menü



Erläuterung der Lösung

Mithilfe der Summenfunktion kann man Wahrscheinlichkeiten von symmetrischen Umgebungen um den Erwartungswert berechnen. Definiert man für ein konkretes n die Funktion f wie folgt:

$$f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

dann zeigt die Wertetabelle beispielsweise für $p = 0,4$ und $n = 100$:

$f(0) = P(X = 40) \approx 0,081$; $f(1) = P(39 \leq X \leq 41) \approx 0,240$ usw.

(Man beachte, dass der TI-30X Plus MultiView™ auch für den Laufindex k die Bezeichnung x verwendet und nicht verwirrt wird !)

$f(x) = \sum_{x=40-x}^{40+x} (100)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0</td><td>0.081219145</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.240345019</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.389930108</td></tr> </table>	x	f(x)	0	0.081219145	1	0.240345019	2	0.389930108	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>8</td><td>0.917850696</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.948117979</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.968462995</td></tr> </table>	x	f(x)	8	0.917850696	9	0.948117979	10	0.968462995	$f(x) = \sum_{x=50-x}^{50+x} (100)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>8</td><td>0.91137392</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.943112066</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.9647998</td></tr> </table>	x	f(x)	8	0.91137392	9	0.943112066	10	0.9647998	$f(x) = \sum_{x=30-x}^{30+x} (100)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>7</td><td>0.899088676</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.937189749</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.962548571</td></tr> </table>	x	f(x)	7	0.899088676	8	0.937189749	9	0.962548571
x	f(x)																																					
0	0.081219145																																					
1	0.240345019																																					
2	0.389930108																																					
x	f(x)																																					
8	0.917850696																																					
9	0.948117979																																					
10	0.968462995																																					
x	f(x)																																					
8	0.91137392																																					
9	0.943112066																																					
10	0.9647998																																					
x	f(x)																																					
7	0.899088676																																					
8	0.937189749																																					
9	0.962548571																																					
$f(x) = \sum_{x=100-x}^{100+x} (200)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>12</td><td>0.923162368</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.94403426</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.959962808</td></tr> </table>	x	f(x)	12	0.923162368	13	0.94403426	14	0.959962808	$f(x) = \sum_{x=80-x}^{80+x} (200)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>12</td><td>0.929099717</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.948948864</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.963924118</td></tr> </table>	x	f(x)	12	0.929099717	13	0.948948864	14	0.963924118																			
x	f(x)																																					
12	0.923162368																																					
13	0.94403426																																					
14	0.959962808																																					
x	f(x)																																					
12	0.929099717																																					
13	0.948948864																																					
14	0.963924118																																					
$f(x) = \sum_{x=60-x}^{60+x} (200)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>11</td><td>0.924423904</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.94663369</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.963109476</td></tr> </table>	x	f(x)	11	0.924423904	12	0.94663369	13	0.963109476																													
x	f(x)																																					
11	0.924423904																																					
12	0.94663369																																					
13	0.963109476																																					

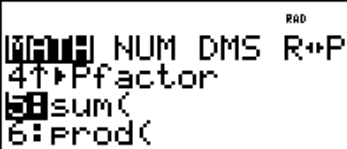
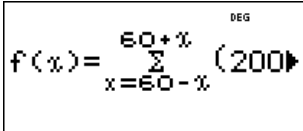
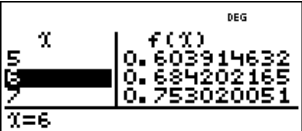
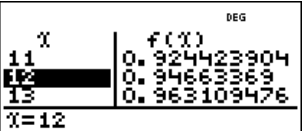

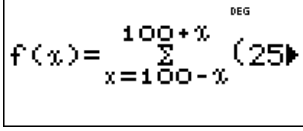
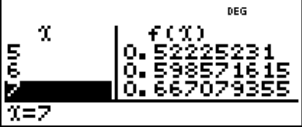
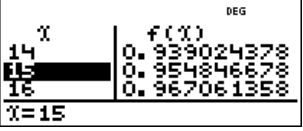
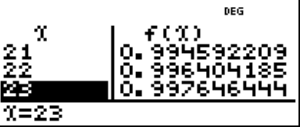
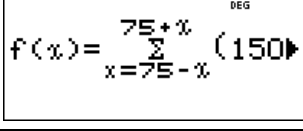
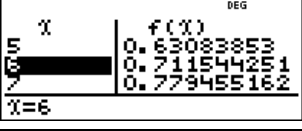
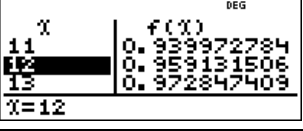

Beispiel: $n = 100$; $p = 0,3$; $P(21 \leq X \leq 39) \approx 0,963 \rightarrow$ Radius = 9,5 (Rechteckbreite berücksichtigen!)

	(1) $p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$	(2) $p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
μ	30	40	50	60	80	100
σ	4,58	4,90	5	6,48	6,93	7,07
Radius	$2,07\sigma$	$1,94\sigma$	$1,90\sigma$	$1,93\sigma$	$1,95\sigma$	$1,91\sigma$

Ergebnis: Man stellt für unterschiedliches n und p fest: $P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie, ob die gefundene Regel auch für $n = 300$ bestätigt wird.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11		
Bestimmen von sigma-Umgebungen um den Erwartungswert			
Beispiel-Aufgabe			
<p>Welche Bedeutung hat die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ einer Binomialverteilung? Bestimmen Sie für (1) $n = 200$; $p = 0,3$ bzw. (2) $n = 250$; $p = 0,4$ bzw. (3) $n = 100$; $p = 0,5$ das zum Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ symmetrische Intervall $[\mu - z \cdot \sigma ; \mu + z \cdot \sigma]$, $z = 1, 2, 3$, sowie die Wahrscheinlichkeit dieses Intervalls. Was fällt auf?</p>			
Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™: Summenfunktion im math -Menü			
Erläuterung der Lösung			
<p>Zunächst werden für die angegebenen Werte von n und p die Erwartungswerte μ und die Standardabweichungen σ berechnet sowie die 1σ-, 2σ-, 3σ-Umgebungen von μ bestimmt. Die Wahrscheinlichkeiten der symmetrischen Umgebungen lassen sich mithilfe der Summenfunktion bestimmen. Für konkrete Werte von n und p kann man folgende Funktion definieren:</p> $f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ <p>(gemäß BERNOULLI-Formel). Die interessierenden Intervall-Wahrscheinlichkeiten können dann der Wertetabelle dieser Funktionen entnommen werden. (Man beachte, dass der TI-30X Plus MultiView™ auch für den Laufindex k die Bezeichnung x verwendet und nicht verwirrt wird !)</p>			
			
			
			
	(1) $n = 200$; $p = 0,3$	(2) $n = 250$; $p = 0,4$	(3) $n = 150$; $p = 0,5$
μ bzw. σ	$\mu = 60$; $\sigma \approx 6,48$	$\mu = 100$; $\sigma \approx 7,75$	$\mu = 75$; $\sigma \approx 6,12$
P($[\mu - 1\sigma ; \mu + 1\sigma]$)	P($54 \leq X \leq 66$) $\approx 0,684$	P($93 \leq X \leq 107$) $\approx 0,667$	P($69 \leq X \leq 81$) $\approx 0,712$
P($[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$)	P($48 \leq X \leq 72$) $\approx 0,947$	P($85 \leq X \leq 115$) $\approx 0,955$	P($63 \leq X \leq 87$) $\approx 0,959$
P($[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$)	P($41 \leq X \leq 79$) $\approx 0,997$	P($77 \leq X \leq 123$) $\approx 0,998$	P($57 \leq X \leq 93$) $\approx 0,998$
<p>Ergebnis: Man stellt für unterschiedliches n und p fest: $P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,68$; $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$; $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$</p>			
Übungsaufgaben			
<p>Untersuchen Sie, ob die gefundenen Regeln auch bestätigt werden für</p> <p>(1) $n = 300$; $p = 1/4$ (2) $n = 240$; $p = 1/3$ (3) $n = 120$; $p = 0,45$</p>			

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe: Punkt- und Intervallschätzung

Beispiel-Aufgabe

39 % der Haushalte in Deutschland verfügen über einen Gefrierschrank. Eine Stichprobe vom Umfang 1200 wird genommen. Machen Sie eine Prognose, wie viele der Haushalte der Stichprobe über einen Gefrierschrank verfügen (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %, 95 %, 99 %). Überprüfen Sie, ob die nach sigma-Regeln bestimmten Intervalle tatsächlich die Vorgaben über die Sicherheitswahrscheinlichkeit erfüllen und korrigieren Sie ggf. die Intervallgrenzen.

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Binomialcdf im DISTR-Menü (2^{nd} $data$)

```

DEG
STAT-REG 0513
4↑BinomialPdf
5↓Binomialcdf
6↓PoissonPdf
                    
```

Erläuterung der Lösung

Eine Punktschätzung für die Anzahl der Haushalte mit Gefrierschrank in der Stichprobe ist der Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 1200 \cdot 0,39 = 468$. Intervallschätzungen werden mithilfe der Standardabweichung σ vorgenommen: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1200 \cdot 0,39 \cdot 0,61} \approx 16,90$. Die 90 %-, 95 %- bzw. 99 %-Umgebungen um den Erwartungswert μ werden gemäß den sigma-Regeln bestimmt. Zur Erleichterung der Kontrollrechnung werden die zugehörigen Intervallgrenzen in Liste L1 ($data$ -Befehl) eingegeben und zu diesen Werten die kumulierten Wahrscheinlichkeiten bestimmt, z. B. $P(441 \leq X \leq 495) = P(X \leq 495) - P(X \leq 440) = 0,9478 - 0,0514 = 0,8964$. Da die sigma-Regeln nur Faustregeln sind, geben sie nur ungefähr die Intervallgrenzen an. Im Falle der 90 %-Umgebung ist die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit (mindestens 90 %) nicht erfüllt; deshalb muss das Intervall um eine Einheit nach unten bzw. oben erweitert werden.

	90 %-Umgebung um μ	95 %-Umgebung um μ	99 %-Umgebung um μ
$z \cdot \sigma$	$1,64 \sigma \approx 27,71$	$1,96 \cdot \sigma \approx 33,12$	$2,58 \cdot \sigma \approx 43,59$
$\mu - z \cdot \sigma$	440,29	434,88	424,41
$\mu + z \cdot \sigma$	495,71	501,12	511,59
Intervall	441, ..., 495	435, ..., 501	425, ..., 511
Kontrollrechnung	$0,9478 - 0,0514 = 0,8964$	$0,9760 - 0,0223 = 0,9537$	$0,9948 - 0,0048 = 0,9900$
Korrektur	$P(440 \leq X \leq 496) = 0,9538 - 0,0454 = 0,9084$		

```

DEG
1200*.39      468
√1200*.39*.61
16.89615341
                    
```

```

DEG
1.64*16.89615341
27.70969159
1.96*16.89615341
33.11646068
                    
```

```

DEG
BINOMIALCDF
TRIALS=n=1200
P(SUCCESS)=0.39
                    
```

```

DEG
BINOMIALCDF
LIST: L1 L2 L3
SAVE TO: L1 L2 L3
                    
```

```

DEG
445 0.9478
440 0.0514
501 0.9760
424 0.0223
L1(1)=495
                    
```

```

DEG
501 0.9760
434 0.0223
511 0.9948
424 0.0048
L1(6)=424
                    
```

```

DEG
496 0.9538
495 0.0454
501 0.9760
424 0.0223
L1(1)=496
                    
```

Übungsaufgabe

Ein Würfel wird 300-mal geworfen. Machen Sie eine Prognose, wie oft Augenzahl 6 fallen wird (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %, 95 %, 99 %). Überprüfen Sie, ob die nach sigma-Regeln bestimmten Intervalle tatsächlich die Vorgaben über die Sicherheitswahrscheinlichkeit erfüllen und korrigieren Sie ggf. die Intervallgrenzen.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Testen von Hypothesen – Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art

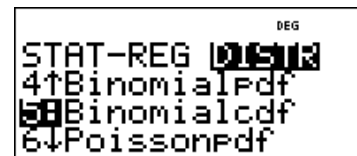
Beispiel-Aufgabe

Wenn man bei einem Würfelspiel einen gewöhnlichen Würfel benutzt, geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten der Augenzahl 6 bei diesem Würfel gleich $1/6$ ist (LAPLACE-Modell). Diese Hypothese soll für einen konkret verwendeten Würfel getestet werden. Dazu soll er 600-mal geworfen und die Anzahl der Sechsen bestimmt werden.

- a) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für $\alpha \leq 0,05$ (α = Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art).
- b) Wie groß ist β (= Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art), wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p für Augenzahl 6 gleich 0,15 ; 0,14 ; 0,13 ; ... ; 0,10 ist?

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:

Binomialcdf im DISTR-Menü (2^{nd} $data$)

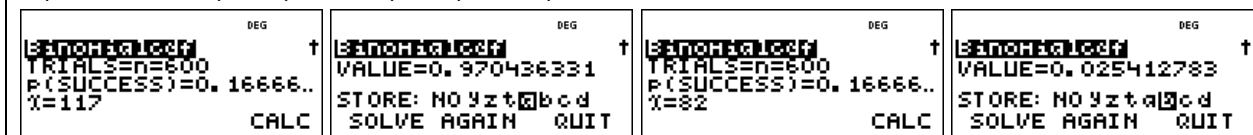


Erläuterung der Lösung

Wenn $p = 1/6$ ist, dann wird die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % in der $1,96\sigma$ -Umgebung des Erwartungswerts μ liegen; hier ist: $\mu = 100$ und $\sigma \approx 9,13$.

Wir schätzen: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % gilt für die Anzahl X der Sechsen: $83 \leq X \leq 117$. Zur Kontrolle des nach den Faustregeln bestimmten Intervalls wird die Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialcdf-Funktion im DISTR-Menü exakt berechnet:

$$P(83 \leq X \leq 117) = P(X \leq 117) - P(X \leq 82) = 0,9704 - 0,0254 = 0,9450$$

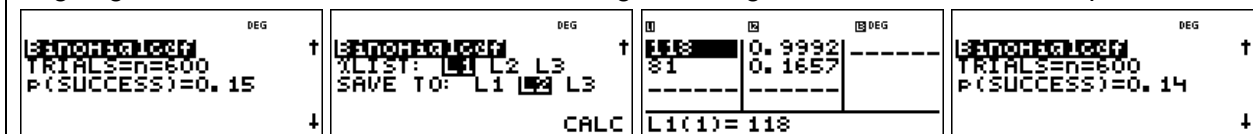


Das Intervall (= Annahmehereich der Hypothese) muss erweitert werden, damit die Bedingung $\alpha \leq 0,05$ erfüllt ist. Durch ähnliche Rechnung wie oben erhält man: $P(82 \leq X \leq 118) = 0,9575$.

Die Entscheidungsregel lautet also: *Verwirf die Hypothese $p = 1/6$, falls in der Stichprobe vom Umfang $n = 600$ weniger als 82 oder mehr als 118 Sechsen auftreten.*

Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn dem Versuch eigentlich ein anderes p zugrunde liegt, das Versuchsergebnis aber im Annahmehereich der Hypothese liegt.

Die Berechnung von $P(82 \leq X \leq 118) = P(X \leq 118) - P(X \leq 81)$ für die angegebenen Wahrscheinlichkeiten kann beispielsweise mithilfe der Option erfolgen, dass die Wahrscheinlichkeiten in einer Liste (L2) abgespeichert werden, wobei man vorher die Werte 118 und 81 in Liste L1 abgelegt hat; man muss dann nur noch die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p variieren.



So ergibt sich: $\beta(0,15) \approx 83,4\%$; $\beta(0,14) \approx 61,1\%$; $\beta(0,13) \approx 33,1\%$; $\beta(0,12) \approx 11,8\%$; $\beta(0,11) \approx 2,4\%$; $\beta(0,10) \approx 0,25\%$.

Übungsaufgabe

Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 2. Art können auch mithilfe von Listenformeln bestimmt werden: L1 für Werte des tatsächlichen p ; L2 für die Wahrscheinlichkeit β . Führen Sie dies aus.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

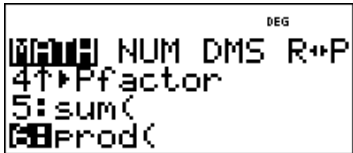
Das klassische Geburtstagsproblem und Variationen

Beispiel-Aufgabe

Beim klassischen Geburtstagsproblem geht es um die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter 23 zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei sind, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Setzt man zur Vereinfachung voraus, dass die Geburts-Wahrscheinlichkeit für alle Tage des Jahres gleich ist, dann ergibt sich für das Gegenereignis

$$P(\text{die 23 Personen haben lauter verschiedene Geburtstage}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}}$$

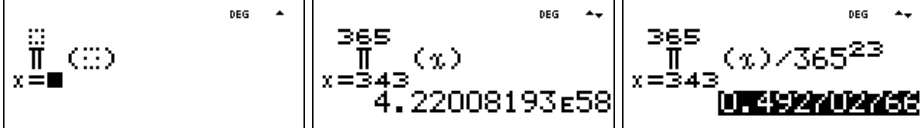
Verwendete Option des TI-30X Plus MultiView™:
 Produkt-Funktion des Π -Menüs



Erläuterung der Lösung

Das Produkt der Faktoren 343, 344, ..., 365 bestimmen wir mithilfe der Produkt-Funktion des Π -Menüs des TI-30X Plus MultiView™. Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für x am Produktzeichen Π sowie den Funktionsterm x (hier werden nur die Zahlen selbst miteinander multipliziert) ein, vgl. 1. und 2. Screenshot. Rechts steht die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses; die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses ist daher gleich

$$P(\text{mindestens zwei von 23 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag})$$

$$= 1 - 0,4927 = 0,5073 = 50,73 \%$$


Übungsaufgaben

1. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage ist bei 23 Personen ungefähr gleich 50 %, d. h., dies wäre eine faire Wette. Jemand möchte bei seiner Wette sicherer sein und mindestens eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von 60 % [75 %] haben. Bei welcher Personenzahl ergibt sich eine solche Gewinn-Wahrscheinlichkeit?

$P(\text{mindestens zwei von } \dots \text{ Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}) \approx 60 \%$

$P(\text{mindestens zwei von } \dots \text{ Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}) \approx 75 \%$

2. Ein Rouletterad ist im Prinzip ein Glücksrad mit 37 gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis 36 beschriftet sind. Auf diesen Sektoren bleibt dann eine Kugel zufällig liegen. Ein solches Glücksrad werde n -mal gedreht.

Von welcher Anzahl n an lohnt es sich darauf zu wetten (d. h. ist die Wahrscheinlichkeit größer als 50 %), dass die Kugel auf irgendeinem Sektor mindestens zweimal liegen geblieben ist?

Bestimmen Sie dazu mithilfe des Taschenrechners die konkreten Wahrscheinlichkeiten für das Gegenereignis E' „die Kugel bleibt in n Spielrunden auf lauter verschiedenen Sektoren liegen“:

n	3	4	5	6	7	8	9
$P(E')$							

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung

Beispiel-Aufgabe

Ein Glücksrad mit 50 gleich großen Sektoren wird 50-mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger des Glücksrads auf einem bestimmten Sektor keinmal, genau einmal, genau zweimal, genau dreimal, mehr als dreimal stehen bleiben wird
 (1) gemäß Binomialansatz (2) mithilfe der Poisson-Näherung.

Verwendete Optionen des TI-30X Plus MultiView™:
 Binomialpdf (-cdf) und Poissonpdf (-cdf) im DISTR-Menü
 ($\boxed{2nd}$ \boxed{data})

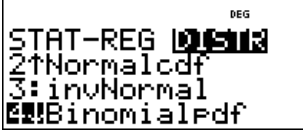

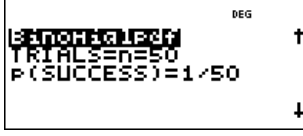
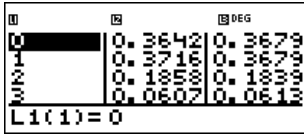

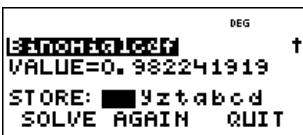

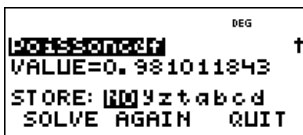
```

DEG
STAT-REG 0.5113
4↑BinomialPdf
5:Binomialcdf
6!PoissonPdf
                    
```

Erläuterung der Lösung

Der Vorgang kann modelliert werden mithilfe eines Binomialansatzes mit $n = 50$ und $p = 1/50$; der Erwartungswert, Parameter für die Poisson-Approximation, ist also gleich $\mu = 50 \cdot 1/50 = 1$.
 Da verschiedene Werte der Verteilung berechnet werden sollen, wird zunächst eine Liste L1 mit den Werten $k = 0, 1, 2, 3$ angelegt. Danach werden die Wahrscheinlichkeiten gemäß Binomialansatz in Liste L2 und die gemäß der Poisson-Näherung in Liste L3 gespeichert. Die Näherungswerte unterscheiden sich nur wenig von den exakt berechneten Wahrscheinlichkeiten des Binomialansatzes. Auch die Wahrscheinlichkeit für „mehr als dreimal“, die mithilfe der jeweiligen kumulierten Wahrscheinlichkeiten berechnet wird, bestätigt dies:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,9822 = 0,0178 \approx 1 - 0,9810 = 0,0190$$

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten zur Beispiel-Aufgabe auch für den Fall, dass das Glücksrad mit 50 Sektoren 100-mal [200-mal] gedreht wird.

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k > 4
Binomial (n = 100)						
Poisson						
Binomial (n = 200)						
Poisson						

2. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Sechsen beim 300-fachen Würfeln gemäß Binomial- und Poisson-Ansatz.

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k > 4
Binomial						
Poisson						

Bei einem **Würfelspiel** hat ein Spieler den Eindruck, dass Augenzahl „1“ sehr oft auftritt, die auf der gegenüberliegenden Würfelfläche stehende „6“ aber nur selten.

Daher vermutet er, dass die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu werfen, nur 10 % beträgt.

Betrachten Sie zunächst die Zufallsvariable

X : Anzahl der Sechsen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,1$

Aufgabenstellung Teilaufgabe a)

- (1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit diesem gezinkten Würfel in 120 Würfungen genau 12-mal Augenzahl 6 zu werfen.
- (2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 120 Würfungen mindestens 20-mal Augenzahl 6 auftritt.
- (3) Berechnen Sie Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für die Zufallsvariable X und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen um höchstens 2σ von μ abweicht.

Anforderungsprofil und Punktwertung für Teilaufgabe a)

(1)	Einzel-Wahrscheinlichkeit berechnen	2/10 Punkte
(2)	Intervall-Wahrscheinlichkeit berechnen	3/10 Punkte
(3)	Erwartungswert und Standardabweichung berechnen und Intervall-Wahrscheinlichkeit bestimmen	5/10 Punkte

Lösung Teilaufgabe a)

Nach Voraussetzung ist die Zufallsvariable binomialverteilt mit $n = 120$ und $p = 0,1$.

$$(1) P(X = 12) = \binom{120}{12} \cdot 0,1^{12} \cdot 0,9^{108} \approx 0,1205$$

$$(2) P(X \geq 20) = \sum_{k=20}^{120} \binom{120}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{120-k}$$

$$= 1 - P(X \leq 19) = 1 - \sum_{k=0}^{19} \binom{120}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{120-k} \approx 0,0158$$

$$(3) \mu = 120 \cdot 0,1 = 12, \quad \sigma = \sqrt{120 \cdot 0,1 \cdot 0,9} \approx 3,286, \quad 2\sigma \approx 6,572$$

$$P(12 - 6,572 \leq X \leq 12 + 6,572) = P(6 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 5)$$

$$= \sum_{k=6}^{18} \binom{120}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{120-k} \approx 0,9542$$

Einsatz des TI-30X Plus MultiView™

Die Berechnung den Wahrscheinlichkeiten kann mithilfe der BERNOULLI-Formel erfolgen oder mithilfe der Optionen im Menü *stat-reg / distr* (**2nd** **data**):

(1)	Eingabe des Terms $\binom{120}{12} \cdot 0,1^{12} \cdot 0,9^{108}$			
	Berechnen der Einzel-Wahrscheinlichkeit durch Eingabe von n, p, k			
(2)	Eingabe Summenterm, Komplementärregel $\sum_{k=0}^{19} \binom{120}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{120-k}$			
			Eingabe Summenterm $\sum_{k=20}^{120} \binom{120}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{120-k}$	
	Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit durch Eingabe von n, p, k			
(3)	Berechnen der Standardabweichung		Eingabe Summenterm $\sum_{x=6}^{18} \binom{120}{x} \cdot 0,1^x \cdot 0,9^{120-x}$	
		Berechnen der kumulierten Wahrscheinlichkeiten und Differenzbildung		
			b-a 0.954246317	

Aufgabenstellung Teilaufgabe b)

Der Würfel wird mehrfach geworfen.

- (1) Wie oft muss der gezinkte Würfel mindestens geworfen werden, sodass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Mindestens einmal Augenzahl 6* mindestens 99 % beträgt?
- (2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Augenzahl 6 erst beim 6. Wurf fällt.

Anforderungsprofil und Punktwertung Teilaufgabe b)

(1)	Lösungsansatz (Ungleichung) erläutern	3/9 Punkte
(1)	Anzahl der Würfe berechnen (Ungleichung auflösen)	3/9 Punkte
(2)	Wahrscheinlichkeit bestimmen	3/9 Punkte

Lösung Teilaufgabe b)

(1) Betrachtete Zufallsvariable X : *Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6*; $p = 0,1$

Das Ereignis *Mindestens einmal Augenzahl 6 in n Würfeln* ($X \geq 1$) ist das Gegenereignis zu *Keinmal Augenzahl 6 in n Würfeln* ($X = 0$).

Für dieses Gegenereignis gilt: $P(X = 0) = 0,9^n$. Daher ist nach Komplementärregel:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^n$$

Hierfür soll gelten: $P(X \geq 1) \geq 0,99$.

Zu lösen ist also die Ungleichung: $1 - 0,9^n \geq 0,99$

$$\text{d. h. } 0,9^n \leq 0,01$$

Lösung durch Logarithmieren: $n \cdot \log(0,9) \leq \log(0,01) \Leftrightarrow n \geq \log(0,01)/\log(0,9) \approx 43,7$

Hinweis 1: Das Ungleichheitszeichen in der Ungleichung kehrt sich um, weil beide Seiten durch eine negative Zahl dividiert werden.

Hinweis 2: Es spielt keine Rolle, welche Logarithmus-Funktion für das Logarithmieren der Ungleichung gewählt wird, weil die Quotienten immer gleich sind.

- Der gezinkte Würfel muss mindestens 44-mal geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einmal Augenzahl 6 mindestens 99 % beträgt.


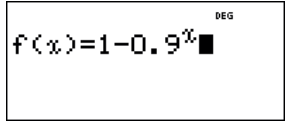
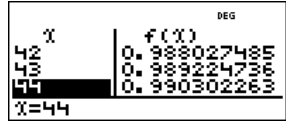
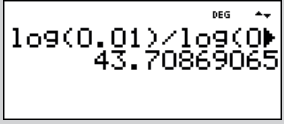
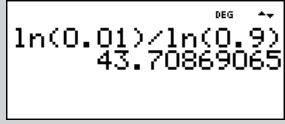
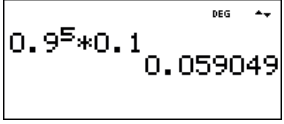
(2) Wenn Augenzahl 6 erst beim 6. Wurf eintritt, bedeutet dies, dass 5-mal eine andere Augenzahl auftritt, bevor die Augenzahl 6 fällt.

Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt

$$P(\text{Augenzahl 6 erst beim 6. Wurf}) = 0,9^5 \cdot 0,1 = 0,059049 \approx 5,9 \%$$

Einsatz des TI-30X Plus MultiView™

- (1) Zur Bestimmung der notwendigen Anzahl n kann man im `table`-Menü eine Funktion f mit $f(n) = P(X \geq 1) = 1 - 0,9^n$ definieren und dann in der Wertetabelle nachschauen, wann die Bedingung $P(X \geq 1) \geq 0,99$ erfüllt ist. Oder man löst die Ungleichung durch Logarithmieren und Umformung.
- (2) Zur Lösung dieser Teilaufgabe müssen die Wahrscheinlichkeiten gemäß Pfadmultiplikationsregel multipliziert werden.

(1)	Funktionsterm definieren, Wertetabelle durchsehen			
	Ungleichung durch Logarithmieren lösen (beliebige Basis)			
(2)	Wahrscheinlichkeiten multiplizieren			

Eine perfekte Ergänzung!

Die TI-SmartView™ Emulator-Software

Die TI-30X Pro MultiView™ Emulator-Software geht über den Funktionsumfang des TI-30X Plus MultiView™ hinaus und bietet Ihnen zusätzliche Möglichkeiten:

- » Anschauliche Erläuterung des Rechners vor der Klasse
- » Anzeige von Tastendruckfolgen
- » Bequeme Unterrichtsvorbereitung zu Hause (Skript-Erstellung)
- » Einsetzbar in Kombination mit Notebook/Beamer oder mit interaktiven Whiteboards.



Probieren Sie es aus. Die kostenlose Test-Version finden Sie auf den TI Webseiten.

Aufgabenstellung Teilaufgabe c)

Durch eine Versuchsreihe von 300 Würfeln soll überprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 6 tatsächlich kleiner ist als $1/6$.

- (1) Erläutern Sie, welche gegensätzlichen einseitigen Hypothesen in der Sachsituation betrachtet werden und welche der beiden möglichen Hypothesen getestet werden soll. Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel zu diesem Test für $\alpha \leq 0,05$.
- (2) Beschreiben Sie die Auswirkungen eines Fehlers 1. und 2. Art in der Sachsituation.
- (3) Erläutern Sie, welche Entscheidung gefällt wird, wenn in der Versuchsreihe 41-mal Augenzahl 6 auftritt.
- (4) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 6 beträgt tatsächlich nur $p = 0,1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Anforderungsprofil und Punktwertung Teilaufgabe c)

(1)	Angabe der beiden Hypothesen	3/17 Punkte
(1)	Bestimmen der Entscheidungsregel	5/17 Punkte
(2)	Beschreibung des Fehlers 1. und 2. Art im Sachzusammenhang	4/17 Punkte
(3)	Erläuterung der Entscheidung	2/17 Punkte
(4)	Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art	3/17 Punkte

Lösung Teilaufgabe c)

- (1) Wenn man die Vermutung $p < 1/6$ „statistisch beweisen“ möchte, muss man zeigen, dass das Versuchsergebnis nicht verträglich ist mit der gegenteiligen Hypothese $p \geq 1/6$.

Betrachtet werden also die beiden Hypothesen $H_1: p < 1/6$ und $H_0: p \geq 1/6$ sowie die Zufallsvariable X : *Anzahl der Sechsen in 300 Würfeln*.

Für $p = \frac{1}{6}$ ist $\mu = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$ und $\sigma = \sqrt{300 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 6,455 > 3$

Da die LAPLACE-Bedingung erfüllt ist, kann eine Entscheidungsregel mithilfe der Sigma-Regeln aufgestellt werden; dabei gilt: $P(X \leq \mu - 1,64\sigma) \approx 0,05$

Für $p = \frac{1}{6}$ ist $\mu - 1,64\sigma \approx 39,4$.

Kontrollrechnung zur Sigma-Regel:

Für $p = \frac{1}{6}$ ist $P(X \leq 39) \approx 0,0486 < 0,05$ und $P(X \leq 40) \approx 0,0675 > 0,05$.

Für $p > \frac{1}{6}$ gilt erst recht: $P(X \leq 39) < 0,05$.

Zu $\alpha \leq 0,05$ gehört der *kritische Wert* $k = 39,5$ und es ergeben sich

Annahmereich $A = \{40, 41, 42, \dots, 300\}$ und *Verwerfungsbereich* $V = \{0, 1, \dots, 38, 39\}$.

- **Entscheidungsregel:** Verwirf die Hypothese $H_0: p \geq 1/6$, falls bei 300 Würfeln weniger als 40-mal Augenzahl 6 fällt.

(2) Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn das Versuchsergebnis im Verwerfungsbereich liegt, obwohl die Hypothese richtig ist. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass für den Würfel gilt, dass $p \geq 1/6$, aber zufällig treten weniger als 40 Sechsen in 300 Würfeln auf. Der Würfel würde also als gezinkt angesehen, obwohl er es nicht ist.

Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn das Versuchsergebnis im Annahmehbereich liegt, obwohl die Hypothese falsch ist. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass für den Würfel gilt, dass $p < 1/6$, aber zufällig fällt in 300 Würfeln mindestens 40-mal Augenzahl 6. Man hätte also keinen Anlass daran zu zweifeln, dass der Würfel in Ordnung ist, obwohl er tatsächlich gezinkt ist.

(3) Da das Ergebnis 41-mal Augenzahl 6 im Annahmehbereich der Hypothese $p \geq 1/6$ liegt, hat man keinen Anlass, an der Richtigkeit der Hypothese zu zweifeln und geht davon aus, dass der Würfel in Ordnung ist.

(4) Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für den Annahmehbereich unter der Voraussetzung, dass dem Versuch $p = 0,1$ zugrunde liegt:

$$P_{p=0,1}(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39) \approx 0,038$$

Einsatz des TI-30X Plus MultiView™

- (1) Mithilfe des Rechners kann der kritische Wert auch ohne Sigma-Regeln bestimmt werden. Dazu definiert man eine Funktion f gemäß der BERNOULLI-Formel mit variablem x-Wert, bis zu dem die Wahrscheinlichkeiten summiert werden sollen. Bei $x = 40$ wird die vorgegebene 5 %-Schranke überschritten, d. h. der kritische Wert liegt zwischen 39 und 40.
- (4) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kann mithilfe der kumulierten Binomialverteilung oder durch Summation mithilfe der BERNOULLI-Formel bestimmt werden.

(1)	Funktionsterm definieren, Wertetabelle durchsehen			
(4)	Wahrscheinlichkeit berechnen mit kumulierter Binomialverteilung			
	Wahrscheinlichkeit berechnen mit Summenterm			

Aufgabenstellung Teilaufgabe d)

d) Zwei Spieler führen ein Glücksspiel mit einem LAPLACE-Würfel durch. Der Würfel wird dreimal geworfen. Was bei den drei Runden des Spiels als *Erfolg* angesehen wird, muss weiter unten geklärt werden.

Wenn 3-mal Erfolg eintritt, zahlt Spieler B an Spieler A 10 Münzen. Bei zwei Erfolgen zahlt Spieler B an Spieler A 3 Münzen; bei einem Erfolg zahlt Spieler A an Spieler B 1 Münze und wenn kein Erfolg eintritt, zahlt Spieler A an Spieler B 2 Münzen.

- (1) Stellen Sie ein Term für den Erwartungswert des Betrags auf, den Spieler A erhält oder zahlen muss.
- (2) Zeigen Sie, dass für die Erfolgswahrscheinlichkeit p gelten muss, dass $p = 1/3$ ist, damit dies eine faire Spielregel ist.
- (3) Geben Sie eine mögliche faire Spielregel an.

Anforderungsprofil und Punktwertung Teilaufgabe d)

(1)	Bestimmen der Wahrscheinlichkeitsverteilung	4/14 Punkte
(1)	Bestimmen eines Terms für den Erwartungswert	5/14 Punkte
(2)	Nachweis für $p = 1/3$	4/14 Punkte
(3)	Beispiel einer fairen Spielregel	1/14 Punkte

Lösung Teilaufgabe d)

(1) Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X : *Anzahl der Erfolge bei einem 3-stufigen BERNOULLI-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p* gilt:

$X = k$	$P(X = k)$
0	$1 \cdot p^3$
1	$3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$
2	$3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$
3	$1 \cdot (1 - p)^3$

Daher ergibt sich aus der Auszahlungsregel der Aufgabenstellung für den Erwartungswert der Zufallsvariablen Y : *Auszahlung aus der Sicht des Spielers A*

$X = k$	$Y = a$	$P(Y = a)$	$a \cdot P(Y = a)$
0	10	$1 \cdot p^3$	$10 \cdot p^3$
1	3	$3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$	$9 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$
2	-1	$3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$	$-3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$
3	-2	$1 \cdot (1 - p)^3$	$-2 \cdot (1 - p)^3$

also: $E(Y) = 10 \cdot p^3 + 9 \cdot p^2 \cdot (1 - p) - 3 \cdot p \cdot (1 - p)^2 - 2 \cdot (1 - p)^3$

(2) Zu zeigen ist, dass sich für $p = 1/3$, also $1 - p = 2/3$ ergibt, dass $E(Y) = 0$.

$$E(Y) = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{10}{27} + \frac{18}{27} - \frac{12}{27} - \frac{16}{27} = 0$$

(3) Ein Beispiel für eine solche faire Spielregel wäre: Ein Erfolg liegt vor, wenn der Würfel Augenzahl 5 oder 6 zeigt.

Einsatz des TI-30X Plus MultiView™


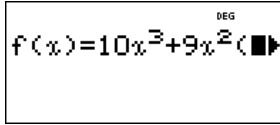
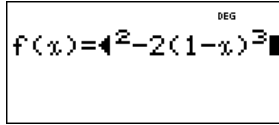
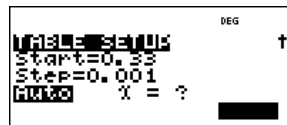
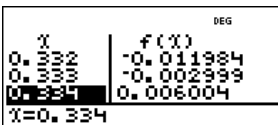
Der Taschenrechner kann bei der Lösung der Aufgabe hilfreich sein. Allerdings wäre ein TR *notwendig*, wenn die Aufgabenstellung (2) wie folgt abgeändert würde:

(2) Für welche Erfolgswahrscheinlichkeit p ist die o. a. Spielregel eine faire Spielregel?

Dann muss eine Funktion f mit der Variablen x definiert werden, mit deren Hilfe man die zu erwartende Auszahlung $f(x)$ berechnet:

$$f(x) = 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 \cdot (1 - x) - 3 \cdot x \cdot (1 - x)^2 - 2 \cdot (1 - x)^3$$

Mithilfe der Wertetabelle findet man heraus, dass die Nullstelle der Funktion bei $p \approx 1/3$ liegt.

(2)	Funktionsterm definieren, in der Wertetabelle nach einer Nullstelle suchen			
				

© 2015 Texas Instruments

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von Texas Instruments hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von Texas Instruments nicht zulässig. Alle Warenzeichen sind Eigentum ihrer Inhaber.



Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS
Tel.: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)
Fax: +49 (0)8161 80 3185
ti-cares@ti.com
education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net