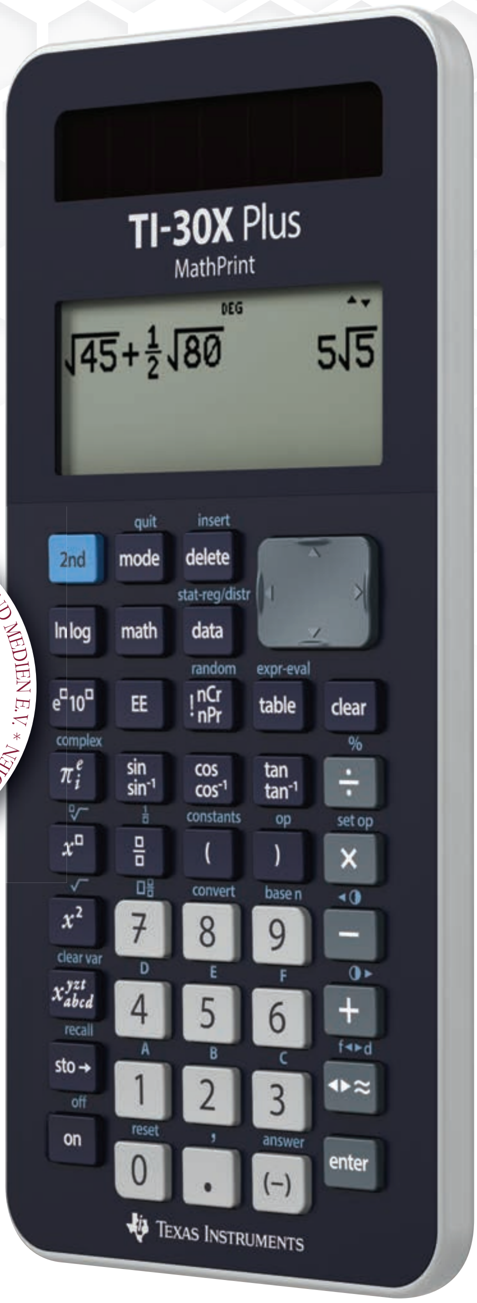
Heinz Klaus Strick

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik



Comenius EduMedia Siegel 2018
Gesellschaft für Pädagogik, Information und Medien e.V. * Für exemplarische Bildungsmedien *

- Analysis
- Analytische Geometrie
- Lineare Algebra
- Stochastik

Texas Instruments

Dieses und weiteres Material steht Ihnen auf der TI Materialdatenbank zum Download bereit:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Inhaltsverzeichnis

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie, Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben.
Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für die als Hilfsmittel u. a. wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) zugelassen sind.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel)	Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln)
Analysis	25	35
Stochastik		20
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		20

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 60 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 165 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel)	Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln)
Analysis	30	40
Stochastik		25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		25

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 70 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 200 Minuten vorgesehen.

In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität der zugelassenen Taschenrechner (WTR) eingeschränkt. Die WTR dürfen folgende Möglichkeiten *nicht* enthalten:

Analysis

- Umformen von Termen mit Variablen, Lösen von Gleichungen oder Gleichungssystemen, Differenzieren oder Integrieren, Berechnen von Werten einer Ableitungsfunktion oder eines Integrals, Darstellen von Graphen

Analytische Geometrie

- Rechnen mit Koordinaten (z. B. zum Aufstellen der Gleichung einer Ebene aus den Koordinaten dreier gegebener Punkte), Rechnen mit Vektoren (z. B. Bestimmen des Werts eines Skalarprodukts oder der Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren), Bestimmen der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen, grafische Darstellungen geometrischer Objekte (z. B. Geraden oder Ebenen)

Lineare Algebra

- Rechnen mit Matrizen, Umformen von Matrizen (z. B. durch Zeilenoperationen)

Stochastik

- Berechnen von Werten eines Parameters einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus einem Wert dieser Verteilung und gegebenen Werten der weiteren zugehörigen Parameter

Es wird jedoch vorausgesetzt, dass der WTR über Funktionen eigens zum Berechnen von Werten der Binomialverteilung, der kumulativen Binomialverteilung und der Normalverteilung verfügt.

Der wissenschaftlicher Taschenrechner

TI-30X Plus MathPrint™

erfüllt alle diese Bedingungen.

In den folgenden Lösungen der Musteraufgaben für den Prüfungsteil B ist angegeben, wie die verschiedenen Funktionalitäten des WTR aufgerufen werden können.

Analysis – Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

1

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion k mit
$k(x) = \frac{1}{40} \cdot \left(x^3 - 30x^2 + 288x - 815\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.

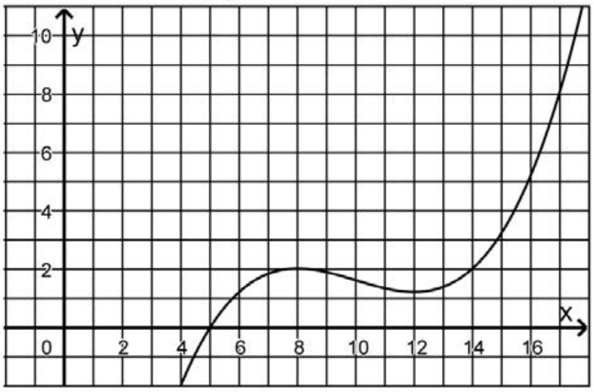


Abb. 1

1 Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei ansteigender Geschwindigkeit jeweils die Konzentration sogenannter Laktate im Blut gemessen. Die Abhängigkeit der Laktatkonzentration von der Geschwindigkeit kann für $8{,}5 \leq x \leq 17{,}5$ modellhaft durch die Funktion k beschrieben werden. Dabei ist x die Geschwindigkeit des Sportlers in Kilometer pro Stunde und $k(x)$ die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter ($\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$).

a
(2 BE)

Der Tabelle können einzelne Werte entnommen werden, die während des Tests gemessen wurden.

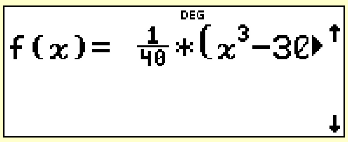
Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	9	13	17
Laktatkonzentration in $\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$	1,92	1,44	8,09

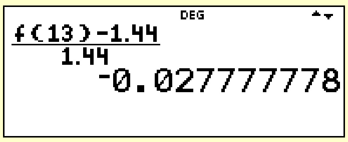
Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung der Laktatkonzentration, die das Modell für eine Geschwindigkeit von 13 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ liefert, vom zugehörigen Messwert.

Lösung

Da nach der *prozentualen* Abweichung des Modellwerts k(13) vom Messwert 1,44 gefragt ist, muss die Differenz zwischen Modellwert und Messwert gebildet werden und diese im Verhältnis zum Messwert gesetzt werden. Die Rechnung zeigt, dass der Modellwert um ca. 2,8 % nach unten vom Messwert abweicht.

table





((Hinweis: Bei der GTR-Berechnung wurde die Funktion k mit f bezeichnet.))

b
(2 BE)

Bestimmen Sie im Modell mithilfe von Abbildung 1 die Geschwindigkeit, ab der die Laktatkonzentration ansteigt, sowie die Geschwindigkeit, bei der die Laktatkonzentration 3,25 $\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$ überschreitet.

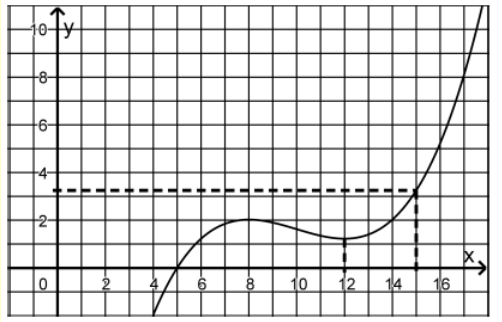
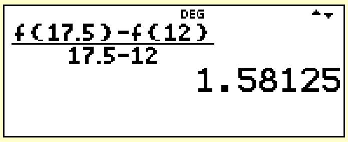
Lösung

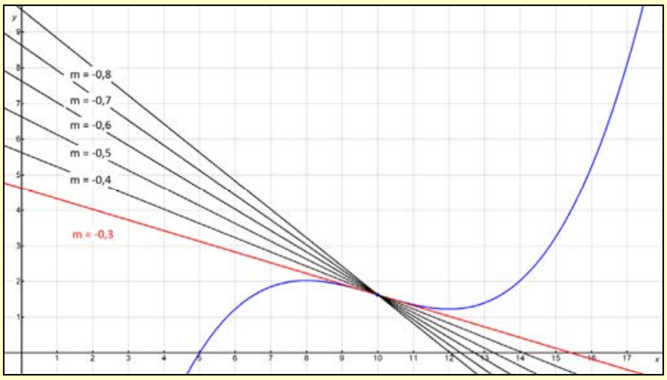
Die Aufgabe besteht darin, Daten aus der Grafik abzulesen:

Das lokale Minimum liegt bei $x = 12$,

d. h., von einer Laufgeschwindigkeit von 12 km/h steigt die Laktatkonzentration an.

Achtung: Die Modellierung gilt nur für das Intervall $8{,}5 \leq x \leq 17{,}5$
(= Definitionsbereich)!

	Zu einer Laktatkonzentration von $y = 3{,}25$ gehört $x = 15$; d. h., bei einer Geschwindigkeit von 15 km/h überschreitet die Laktatkonzentration von 3,25 mmol/l. 
c (4 BE)	Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Geschwindigkeit die Laktatkonzentration im Modell am stärksten abnimmt.
Lösung	Gesucht ist die Stelle, an der die Steigung des Graphen minimal ist, d. h., gesucht ist ein Wendepunkt des Graphen, in dem der Graph von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht. Ableitungen (gemäß Summen- und Potenzregel): $k'(x) = \frac{1}{40} \cdot (3x^2 - 60x + 288)$; $k''(x) = \frac{1}{40} \cdot (6x - 60)$ *Notwendige Bedingung*: $k''(x) = \frac{1}{40} \cdot (6x - 60) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ *Hinreichende Bedingung*: An der Stelle $x = 10$ liegt ein Vorzeichenwechsel von $k''(x)$ von – nach + vor, also ein Krümmungswechsel von einer Links- zu Rechtskrümmung. Somit ergibt sich aus dem Graphen von k, dass die Laktatkonzentration bei einer Laufgeschwindigkeit von 10 km/h am stärksten abnimmt.
d (3 BE)	Berechnen Sie im Modell für den Geschwindigkeitsbereich von $12{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bis $17{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die mittlere Änderungsrate der Laktatkonzentration.
Lösung table	Die mittlere Änderungsrate ist gleich dem Differenzenquotienten $\frac{k(17{,}5) - k(12)}{17{,}5 - 12}$. Die Rechnung zeigt, dass die mittlere Änderungsrate etwa 1,6 mmol/l pro km/h beträgt. 
2	Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $W\left(10 \mid \frac{13}{8}\right)$. Betrachtet werden die Geraden, die durch W verlaufen.
a (3 BE)	Eine Gerade durch W mit negativer Steigung hat mit dem Graphen von k keinen weiteren Punkt gemeinsam. Ermitteln Sie alle Steigungen, die diese Gerade haben könnte.
Lösung	Die Steigung der Wendetangente beträgt $k'(10) = \frac{1}{40} \cdot (300 - 600 + 288) = -0{,}3$. Eine Wendetangente berührt im Wendepunkt den Graphen der Funktion, d. h., es liegt eine doppelte Schnittstelle mit dem Graphen vor: Ein Halbstrahl der Tangente liegt oberhalb, der andere Halbstrahl unterhalb des Graphen. Alle Geraden durch den Wendepunkt, die eine betraglich größere negative Steigung haben als m = -0,3 schneiden den Graphen der Funktion ebenfalls nicht ein weiteres Mal; die gesuchte Eigenschaft gilt also für alle m ≤ -0,3, vgl. auch die folgende Skizze.



b
(2 BE)

Die y-Koordinate des Schnittpunkts einer der durch W verlaufenden Geraden mit der y-Achse wird mit n bezeichnet. Stellen Sie einen Term auf, der n in Abhängigkeit von der Steigung m dieser Gerade angibt.

Lösung

Die Gleichung einer Gerade mit Steigung m und Ordinatenabschnitt *n* hat allgemein die Form $y = mx + n$. Einsetzen der Koordinaten des Wendepunkts ergibt dann

$\frac{13}{8} = m \cdot 10 + n \;\Leftrightarrow\; n = \frac{13}{8} - m \cdot 10$

c
(3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der in IR definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{13}{40} \cdot (x-5)$ durch W verläuft. Zeichnen Sie diese Gerade in die Abbildung 1 ein.

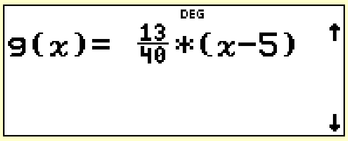
Lösung

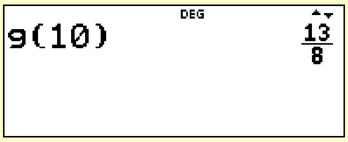
Nachzuweisen ist $g(10) = \frac{13}{8}$:

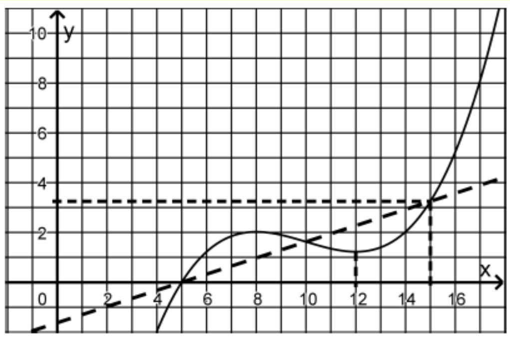
$g(10) = \frac{13}{40} \cdot (10-5) = \frac{13}{40} \cdot 5 = \frac{13}{8}$

Kontrolle mit dem WTR:

table







Am Funktionsterm von g(x) kann man ablesen, dass der Graph von g eine Nullstelle an der Stelle x = 5 hat; daher kann g mithilfe der Punkte (5 I 0) und W gezeichnet werden.

d
(3 BE)

Beschreiben Sie, wie man die Lösungen der Gleichung $k(x) - g(x) = 0$ grafisch ermitteln kann. Geben Sie die Lösungen der Gleichung an.

Lösung

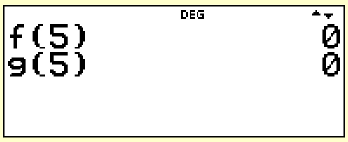
Die Nullstellen einer Differenzfunktion *k* – *g* zweier Funktionen *k* und *g* sind die Schnittstellen der Graphen der beiden betrachteten Funktionen *k* und *g.* Diese kann man an der Grafik ablesen. Die Schnittstellen liegen bei $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$.

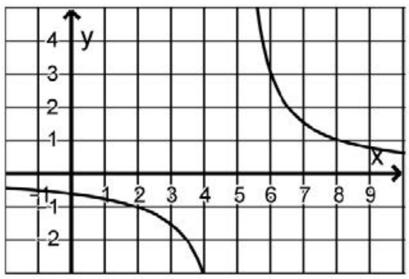
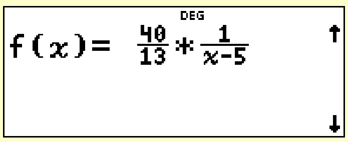
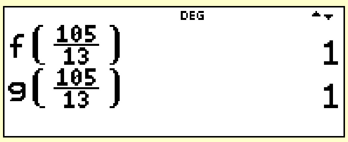
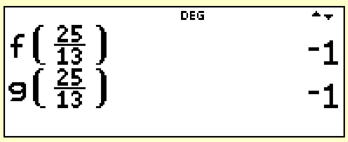
Eine *Berechnung* dieser Stellen, also die Lösung der Gleichung

$\frac{1}{40} \cdot (x^3 - 30x^2 + 288x - 815) = \frac{13}{40} \cdot (x-5)$, ist nicht verlangt.

Auch der Nachweis, dass die abgelesenen Schnittpunkte tatsächlich auf beiden Graphen liegen, ist nicht erforderlich, aber als Kontrolle sinnvoll:

table

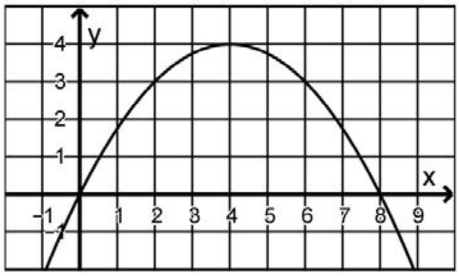
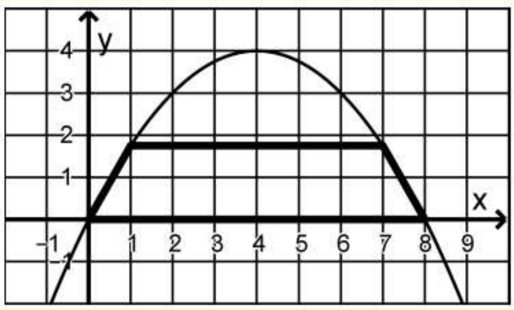


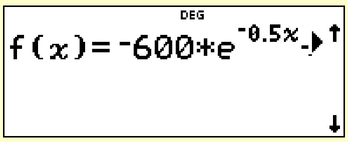
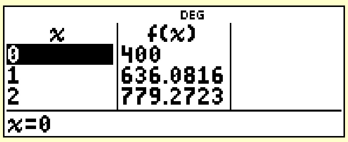
e (4 BE)	Begründen Sie ohne zu rechnen, dass $\int_5^{15} k(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot(15-5)\cdot k(15)$ gilt.
Lösung	Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt; daher sind die beiden Flächenstücke, die der Graph von k mit der Geraden g einschließt, gleich groß. Deshalb genügt es, den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, das durch die drei Punkte (5 I 0), (15 I 0) und (15 I k(15)) begrenzt wird. Die Katheten des Dreiecks haben die Seitenlängen 15 – 5 = 10 LE und k(15) = g(15) = $\frac{13}{4}$.
f (3 BE)	Begründen Sie mithilfe der Abbildung 1, dass es eine reelle Zahl z mit $4 < z < 5$ gibt, für die $\int_z^{z+1} k(x)\,dx = 0$ gilt.
Lösung	Betrachtet wird die Funktion $K(z) = \int_z^{z+1} k(x)\,dx$. Der Graph von k schneidet in x = 5 die x-Achse. Daher gilt für die Integrale $K(4) = \int_4^5 k(x)\,dx < 0$ und $K(5) = \int_5^6 k(x)\,dx > 0$. Innerhalb des Intervalls [4 ; 5] muss es daher eine Nullstelle der Funktion $K(z) = \int_z^{z+1} k(x)\,dx$ geben.
3	Neben der Funktion g aus Aufgabe 2 wird im Folgenden die Funktion h mit $h(x) = \frac{40}{13}\cdot\frac{1}{(x-5)}$ und $x \in \mathrm{IR}\setminus\{5\}$ betrachtet. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von h.  Abb. 2
a (2 BE)	Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen der Funktion i mit $i(x) = \frac{1}{x}$ und $x \in \mathrm{IR}\setminus\{0\}$ hervorgeht.
Lösung	Aus dem Funktionsterm h(x) kann man ablesen, dass der Graph von i(x) um 5 Einheiten nach links verschoben und mit dem Faktor $\frac{40}{13}$ gestreckt wurde.
b (4 BE)	Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die die Graphen von g und h gemeinsam haben.
Lösung table	$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{13}{40}\cdot(x-5) = \frac{40}{13}\cdot\frac{1}{x-5} \Leftrightarrow (x-5)^2 = (\frac{40}{13})^2 \Leftrightarrow x = \frac{105}{13} \vee x = \frac{25}{13}$. Für die Funktionswerte gilt: $g(\frac{105}{13}) = h(\frac{105}{13}) = 1$ und $g(\frac{25}{13}) = h(\frac{25}{13}) = -1$. Da der WTR nur die Funktionsnamen f und g kennt, muss in der Kontrollrechnung die Bezeichnung h durch f ersetzt werden, vgl. rechts.    ((Hinweis: Bei der GTR-Berechnung wurde die Funktion h mit f bezeichnet.))

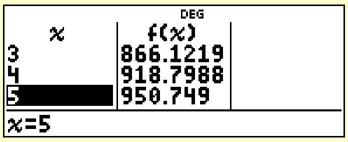
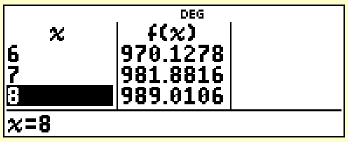
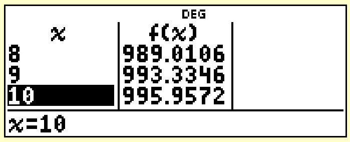
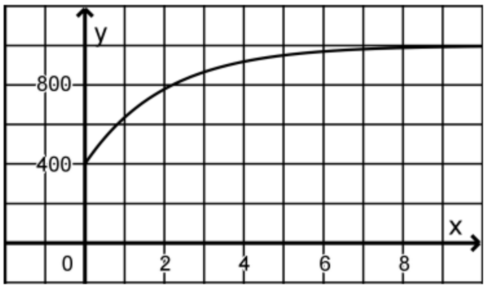
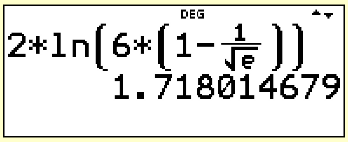
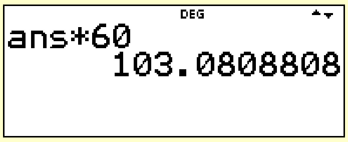
c (2 BE)	Begründen Sie, dass es keine Gerade gibt, die sowohl Tangente des Graphen von g als auch Tangente des Graphen von h ist.
Lösung	Die Gerade g hat die *positive* Steigung $\frac{13}{40}$; die Tangenten einer linearen Funktion stimmen mit der Geraden selbst überein. Die Tangenten an den Graphen der Funktion h haben überall auf der Definitionsmenge D = IR \ {5} eine *negative* Steigung, wie man an der Ableitung von h(x) ablesen kann: $h(x)=\frac{40}{13}\cdot\frac{1}{x-5}=\frac{40}{13}\cdot(x-5)^{-1}$, also $h'(x)=(-1)\cdot\frac{40}{13}\cdot(x-5)^{-2}=-\frac{40}{13}\cdot\frac{1}{(x-5)^2}$. Daher kann keine der Tangenten an den Graphen von h mit der Gerade g übereinstimmen.
d (3 BE)	Geben Sie eine Möglichkeit für Werte von $a,b\in\left]-\infty;5\right[$ und $c,d\in\left]5;+\infty\right[$ an, für die $\int_a^b h(x)\,dx\cdot\int_c^d h(x)\,dx>0$ gilt. Begründen Sie Ihre Angabe.
Lösung	Da der Graph von h links von der Definitionslücke im negativen Bereich verläuft, sind alle Integrale $\int_a^b h(x)\,dx$ mit a < b < -5 negativ, und da der Graph von h rechts von der Definitionslücke im positiven Bereich verläuft, sind alle Integrale $\int_c^d h(x)\,dx$ mit -5 < d < c ebenfalls negativ (obere Integrationsgrenze liegt links von der oberen Integrationsgrenze). Beispiele: a = 1, b = 2, c = 7, d = 6. Entsprechend ist auch das Produkt $\int_a^b h(x)\,dx\cdot\int_c^d h(x)\,dx>0$ für b < a < -5 < c < d erfüllt, da alle Integrale positiv sind.

Analysis – Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

1	Betrachtet werden die in IR definierten Funktionen $f_k: x \mapsto -kx\cdot(x-8)$ mit $k\in IR^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
a (2 BE)	Geben Sie die Nullstellen von f_k an.
Lösung	Da der Funktionsterm aus einem Produkt von Linearfaktoren besteht, kann man die beiden Nullstellen unmittelbar daran ablesen: Die Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$.
b (3 BE)	Begründen Sie, dass der Punkt $(4\,\vert\,16k)$ der Hochpunkt von G_k ist.
Lösung	Da es sich um quadratische Funktionen handelt mit einem negativem Faktor vor der Potenz x^2, sind die Graphen nach unten geöffnete Parabeln, deren Nullstellen symmetrisch zu den Stellen lokaler Maxima liegen, also bei x = 4. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f_k(4)=-k\cdot 4\cdot(4-8)=16k$.
c (2 BE)	Bestimmen Sie den Abstand der Hochpunkte von G_k und G_{k+1}.
Lösung	Alle Hochpunkte liegen bei x = 4. Daher muss nur der senkrechte Abstand berechnet werden: $f_{k+1}(4)-f_k(4)=16\cdot(k+1)-16\cdot k=16$.

d (4 BE)	Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den der Inhalt der Fläche, die G_k mit der x-Achse einschließt, $\frac{64}{3}$ beträgt.
Lösung	Allgemein gilt: $\int_0^8 f_k(x)\,dx = -k\cdot[\frac{1}{3}\cdot x^3 - 4x^2]_0^8 = -k\cdot(\frac{512}{3} - 256) + k\cdot 0 = \frac{256}{3}\cdot k$ Die Bedingung $\frac{256}{3}\cdot k = \frac{64}{3}$ ist erfüllt für $k = \frac{1}{4}$.
e (3 BE)	Geben Sie die Stelle an, an der jede Stammfunktion von $f_{\frac{1}{4}}$ ihr Maximum annimmt. Begründen Sie Ihre Angabe ohne Verwendung eines Terms einer Stammfunktion.
Lösung	Für alle Stammfunktionen $F_k(x)$ von $f_k(x)$ gilt nach Definition des Begriffs „Stammfunktion“ $F_k'(x) = f_k(x)$. Und da für alle x mit $0 < x < 8$ gilt: $F_{\frac{1}{4}}'(x) = f_{\frac{1}{4}}(x) > 0$, ist der Graph aller Stammfunktionen $F_k(x)$ ist streng monoton steigend im Intervall [0 ; 8], d. h. die Stammfunktionen nehmen an der Stelle x = 8 ihr Maximum an.
	Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{4}}$. Betrachtet werden die Trapeze mit den Eckpunkten $A(0\|0)$, $B(8\|0)$, $C_u\left(8-u\|f_{\frac{1}{4}}(u)\right)$ und $D_u\left(u\|f_{\frac{1}{4}}(u)\right)$, wobei u alle Werte des Intervalls $]0;4[$ annimmt. 
f (2 BE)	Zeichnen Sie das Trapez für $u = 1$ in die Abbildung ein.
Lösung	Eingetragen werden die Punkte A (0 I 0), B (8 I 0), C_1 (7 I $\frac{7}{4}$) und C_2 (1 I $\frac{7}{4}$). 
g (2 BE)	Geben Sie einen Term an, mit dem die Länge der beiden gleich langen Schenkel des Trapezes ABC_uD_u berechnet werden kann.
Lösung	Gemäß der Abstandsformel (Satz des Pythagoras) ergibt sich: $\|AD_u\| = \|BC_u\| = \sqrt{(u-0)^2 + (f_{\frac{1}{4}}(u) - 0)^2} = \sqrt{u^2 + f_{\frac{1}{4}}(u)^2}$
h (4 BE)	Der Flächeninhalt des Trapezes ABC_uD_u kann mit dem Term $(8-u)\cdot f_{\frac{1}{4}}(u)$ berechnet werden. Beschreiben Sie eine geometrische Überlegung, mit der sich dieser Term herleiten lässt.
Lösung	Das Trapez hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck der Breite (= Länge der Mittellinie des Trapezes) von $\frac{1}{2}\cdot[(8-0) + ((8-u) - u)] = 8 - u$ sowie der Höhe $f_{\frac{1}{4}}(u)$. Hieraus ergibt sich dann der angegebene Term.

i (5 BE)	Unter den betrachteten Trapezen hat eines den größten Flächeninhalt. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von u.
Lösung	Für die Flächeninhaltsfunktion T gilt: $T(u)=(8-u)\cdot f_{\frac{1}{4}}(u)=(8-u)\cdot(-\frac{1}{4}u)\cdot(u-8)=\frac{1}{4}u\cdot(u-8)^2=\frac{1}{4}u^3-4u^2+16u$, also $T'(u)=\frac{3}{4}u^2-8u+16$; $T''(u)=\frac{3}{2}u-8$ *Notwendige Bedingung*: $T'(u)=\frac{3}{4}u^2-8u+16=0 \Leftrightarrow u^2-\frac{32}{3}u+\frac{64}{3}=0 \Leftrightarrow$ $(u-\frac{16}{3})^2=\frac{256}{9}-\frac{64}{3}=\frac{64}{9} \Leftrightarrow u=\frac{24}{3}=8 \vee u=\frac{8}{3}$ Nach Voraussetzung (0 < u < 4) entfällt die Lösung u = 8. Für $u=\frac{8}{3}$ ergibt sich $T''(\frac{8}{3})=4-8<0$, also liegt für dieses u ein lokales Maximum vor.
j (4 BE)	Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises, auf dem die Punkte A, B und $E(4\,\vert\,8)$ liegen.
Lösung	Da der Punkt E auf der Mittelsenkrechten m_{AB} von A und B liegt, muss auch der Kreismittelpunkt M diese x-Koordinate haben. Die y-Koordinate ergibt sich dann aus der Beziehung $\vert AM\vert^2=\vert ME\vert^2 \Leftrightarrow (4-0)^2+(y-0)^2=(8-y)^2 \Leftrightarrow 16+y^2=64-16y+y^2 \Leftrightarrow$ $16y=48 \Leftrightarrow y=3$, d. h. M(4 I 3).
2	In einem Raum wurde die Wirksamkeit der Lüftungsanlage untersucht. Dazu wurde die Konzentration des Kohlendioxids (CO_2) in der Luft gemessen, während sich eine Personengruppe im Raum befand. Die Messwerte können mithilfe der in IR definierten Funktion $g: x \mapsto -600e^{-0{,}5x}+1000$ beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beginn der Untersuchung vergangene Zeit in Stunden und $g(x)$ die CO_2-Konzentration in „parts per million“ (kurz: ppm).
a (1 BE)	Bestimmen Sie die CO_2-Konzentration zu Beginn der Untersuchung.
Lösung	Zu bestimmen ist der Funktionswert $g(0)=-600\cdot e^0+1000=400$, d.h. die CO_2-Konzentration betrug zu Beginn der Messung 400 ppm.
b (2 BE)	Einer Studie zufolge fühlen sich Personen in Räumen wohl, wenn die CO_2-Konzentration geringer als 1000 ppm ist. Untersuchen Sie, ob diese Bedingung während der Untersuchung erfüllt war.
Lösung	Da der Term $e^{-0{,}5x}$ nur positive Werte annehmen kann, gilt für alle x $g(x)=-600\cdot e^{-0{,}5x}+1000<1000$
c (2 BE)	Stellen Sie die zeitliche Entwicklung der CO_2-Konzentration für die ersten zehn Stunden nach Beginn der Untersuchung grafisch dar.
Lösung table	Der Graph kann mithilfe einer Wertetabelle gezeichnet werden. 

	((Hinweis: Bei der GTR-Berechnung wurde die Funktion g mit f bezeichnet.))
d (4 BE)	Zeigen Sie, dass die mittlere Änderungsrate der CO_2-Konzentration für jede Zeitspanne mit einer Länge von einer Stunde mithilfe des Terms $600\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cdot e^{-0,5x}$ bestimmt werden kann. Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt auf eine Minute genau, für den die beschriebene mittlere Änderungsrate erstmals den Wert $100\,\frac{\text{ppm}}{\text{h}}$ unterschreitet.
Lösung	Die mittlere Änderungsrate für eine Zeitspanne von einer Stunde ist gleich der Sekantensteigung $m=\frac{g(x+1)-g(x)}{1}=(-600\cdot e^{-0,5\cdot(x+1)}+1000)-(-600\cdot e^{-0,5\cdot x}+1000)$ $=600\cdot(e^{-0,5\cdot x}-e^{-0,5\cdot(x+1)})=600\cdot(e^{-0,5\cdot x}-e^{-0,5\cdot x}\cdot e^{-0,5})$ $=600\cdot e^{-0,5\cdot x}\cdot(1-e^{-0,5})=600\cdot e^{-0,5\cdot x}\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{e}})$ Die Gleichung m = 100 ist erfüllt, wenn $600\cdot e^{-0,5\cdot x}\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{e}})=100 \Leftrightarrow e^{-0,5\cdot x}=\frac{1}{6\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{e}})} \Leftrightarrow e^{0,5\cdot x}=6\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{e}}) \Leftrightarrow$ $x=2\cdot\ln(6\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{e}}))\approx 1{,}72$ Die mittlere Änderungsrate unterschreitet den Wert von 100 ppm/h erstmals nach ca. 103 Minuten.

Analysis – Beispiel 3 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1	Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich IR hat den Tiefpunkt $(0\,\vert\,0)$ und den Wendepunkt $\left(-\frac{1}{2}\,\vert\,\frac{5}{4}\right)$.
a (6 BE)	Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. *(zur Kontrolle: $g(x)=\frac{5}{2}x^2\cdot(2x+3)$)*
Lösung	Ansatz: $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $g'(x)=3ax^2+2bx+c$; $g''(x)=6ax+2b$ Die genannten Bedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Variablen:

- (0 I 0) liegt auf dem Graphen: g(0) = 0 ⇔ d = 0.

Dies kann bei der nächsten Gleichung berücksichtigt werden.

- $(-\frac{1}{2} \mid \frac{5}{4})$ liegt auf dem Graphen:

$g(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a - 2b + 4c = -10$

Aus den Eigenschaften Tiefpunkt bzw. Wendepunkt ergeben sich notwendige Bedingungen:

- $g'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ und $g''(-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow -3a + 2b = 0$

Wegen d = c = 0 vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$\begin{vmatrix} a - 2b = -10 \\ -3a + 2b = 0 \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich nach Anwendung des Additionsverfahrens $-2a = -10$, also a = 5, und hieraus wegen $2b = 3a$ die Lösung $b = \frac{15}{2}$.

Der gesuchte Funktionsterm lautet also $g(x) = 5x^3 + \frac{15}{2}x^2$.

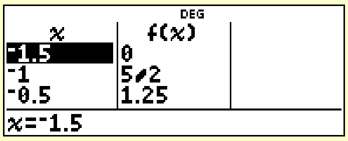
b (2 BE)

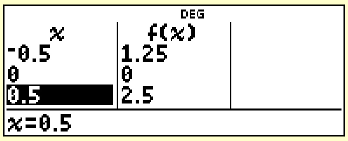
Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1{,}5 \le x \le 0{,}5$ in ein Koordinatensystem ein.

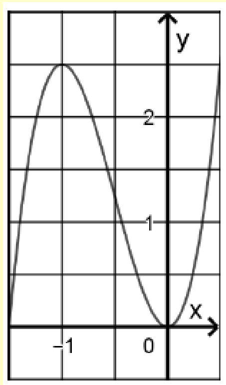
Lösung

table

Mithilfe einer Wertetabelle kann man den rechts stehenden Graphen skizzieren.







((Hinweis: Bei der GTR-Berechnung wurde die Funktion g mit f bezeichnet.))

c (3 BE)

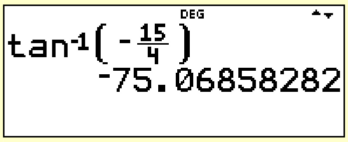
Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

Lösung

Steigung der Wendetangente in $(-\frac{1}{2} \mid \frac{5}{4})$:

$g'(x) = 15x^2 + 15x$; $g'(-\frac{1}{2}) = \frac{15}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{15}{4}$

Steigungswinkel α: $\tan(\alpha) = -\frac{15}{4} \Leftrightarrow \alpha \approx -75°$



Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.

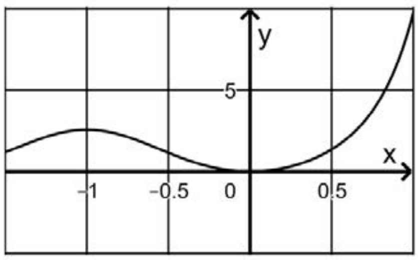
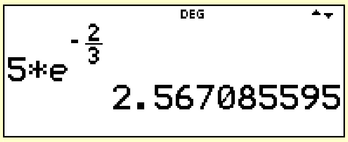
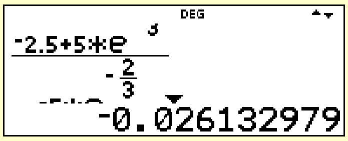
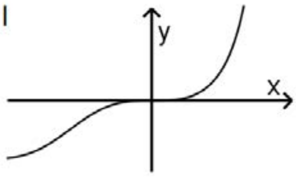
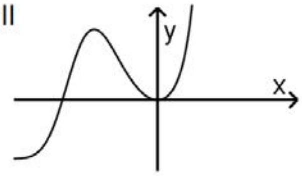
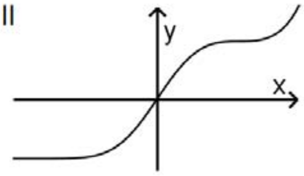
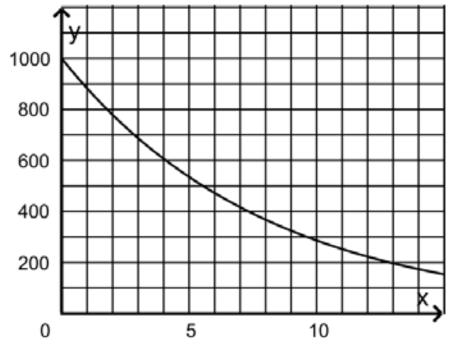
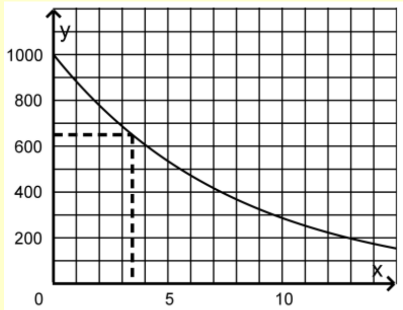


Abb. 1

d (2 BE)

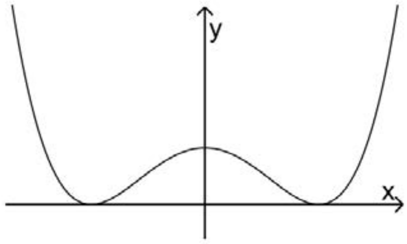
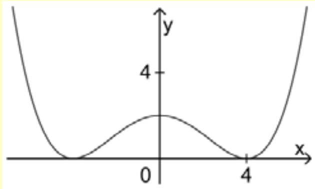
Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

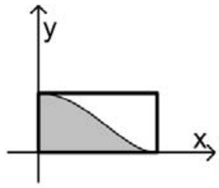
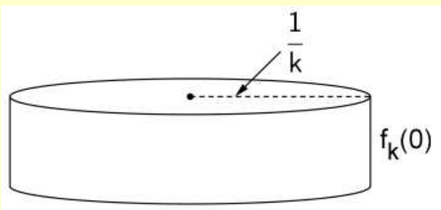
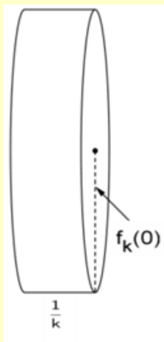
Lösung	Der Faktor $e^{\frac{2}{3}x^3}$ geht für $x \to -\infty$ schneller gegen null als jede Potenz. Da beide Faktoren ($5x^2$ und $e^{\frac{2}{3}x^3}$) auch für $x<0$ nur positive Werte ergeben, verläuft der Graph der Funktion h auch für $x<0$ oberhalb der x-Achse und nähert sich für $x \to -\infty$ der x-Achse von oben.
e (3 BE)	Zeigen Sie, dass $h'(x)=10x\cdot\left(1+x^3\right)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h ist.
Lösung	Die Ableitung von h ergibt sich durch Anwendung von Produkt- und Kettenregel: $h'(x)=10x\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}+5x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}\cdot 2x^2=(10x+10x^4)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}=10x\cdot(1+x^3)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$
f (3 BE)	Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.
Lösung	*Notwendige Bedingung*: $h'(x)=0 \Leftrightarrow 10x\cdot(1+x^3)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}=0$ $\Leftrightarrow x=0 \vee 1+x^3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$ Zur Überprüfung der *hinreichenden Bedingung* werden die Vorzeichen von h' links und rechts von den Nullstellen von h' untersucht: $h'(-2)=10\cdot(-2)\cdot(1-8)\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot(-8)}>0$; $h'(-\frac{1}{2})=10\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{8})\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{8})}<0$ und $h'(1)=10\cdot 1\cdot(1+1)\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot 1}>0$. Aus $h(0)=0$ und $h(-1)=5\cdot e^{-\frac{2}{3}}\approx 2{,}567$ ergeben sich die Koordinaten der Extrempunkte. 
g (3 BE)	Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1\le x\le 0$.
Lösung	Die mittlere Steigung einer Funktion in einem Intervall ist gleich dem Differenzenquotienten der Funktion in diesem Intervall: Aus g(-1) = 2,5 und g(0) = 0 sowie $h(-1)=5\cdot e^{-\frac{2}{3}}\approx 2{,}567$ und h(0) = 0 ergeben sich die Differenzenquotienten $m_g=\frac{g(0)-g(-1)}{1}=-2{,}5$ und $m_h=\frac{h(0)-h(-1)}{1}=-5\cdot e^{-\frac{2}{3}}\approx -2{,}567$. Die prozentuale Abweichung von m_g zu m_h ergibt sich dann aus dem Quotienten, $\frac{m_g-m_h}{m_h}=\frac{-2{,}5+5\cdot e^{-\frac{2}{3}}}{-5\cdot e^{-\frac{2}{3}}}\approx -0{,}026$ d. h., die prozentuale Abweichung beträgt ca. 2,6 %. 
h (3 BE)	Es gilt $\left(h(1)-g(1)\right)\cdot\left(h(2)-g(2)\right)<0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1<x<2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.
Lösung	Durch die Differenzen h(1) – g(1) bzw. h(2) – g(2) wird die gegenseitige Lage der beiden Graphen an den Stellen x = 1 und x = 2 überprüft. Wenn das Produkt dieser Differenzen negativ ist, bedeutet dies, dass die beiden Graphen sich in dem betrachteten Intervall mindestens einmal schneiden müssen.
i (3 BE)	Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung 1 die folgende Aussage: *Für $-1{,}5\le x\le 1$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion von h genau einmal das Krümmungsverhalten.*

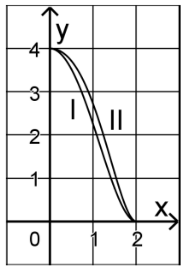
Lösung	Ist H eine Stammfunktion von h, dann gilt also H'(x) = h(x) und folglich H''(x) = h'(x). Wenn sich das Krümmungsverhalten von H auf dem Intervall [-1,5 ; +1] genau einmal ändern würde, dann hätte demnach h'(x) auf diesem Intervall genau eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, also der Graph von h genau eine Extremstelle. Wie aus Abb. 1 ablesbar ist, hat der Graph von h dort zwei Extremstellen. Die Aussage ist also falsch.
j (3 BE)	Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III die in IR definierte Funktion H mit $H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 
Lösung	Für die Ableitung von H gilt: H'(x) = h(x) > 0 für alle $x \neq 0$ und H'(0) = h(0) = 0, d. h. der Graph von H ist streng monoton steigend auf ganz IR mit einer horizontalen Tangente an der Stelle x = 0. Dies entspricht dem Graph I.
2	Der Luftdruck wird in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel modellhaft mithilfe der Funktion p mit $p(x)=1000e^{-\frac{x}{8}}$ und $x \in IR_0^+$ beschrieben. Dabei ist x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern und $p(x)$ der Luftdruck in Hektopascal (hPa). Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von p. Abb. 2 
a (2 BE)	Bestimmen Sie grafisch die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 2.
Lösung	Dem Graphen kann man entnehmen, dass etwa in einer Höhe von 3,4 km der Luftdruck 650 hPa beträgt. 
b (3 BE)	Zeigen Sie, dass eine Verringerung des Luftdrucks um die Hälfte auf eine Höhenänderung zurückzuführen ist, die unabhängig von der Ausgangshöhe ist. Geben Sie diese Höhenänderung an.
Lösung	Verglichen wird der Luftdruck in einer Höhe x über dem Meeresspiegel und einer Höhe x + d, wobei gelten soll $p(x+d)=\frac{1}{2}\cdot p(x)$, also $1000\cdot e^{-\frac{x+d}{8}}=500\cdot e^{-\frac{x}{8}} \Leftrightarrow 1000\cdot e^{-\frac{x}{8}}\cdot e^{-\frac{d}{8}}=500\cdot e^{-\frac{x}{8}} \Leftrightarrow e^{-\frac{d}{8}}=\frac{1}{2}$ In der letzten Gleichung ist die Variable x (also die Ausgangshöhe) nicht mehr vorhanden; daher ist das folgende Ergebnis unabhängig davon.

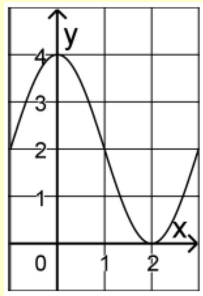
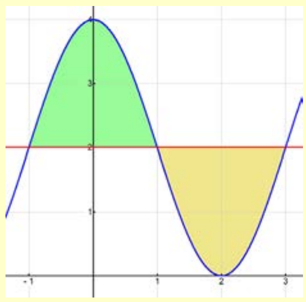
	Für die Höhenänderung ergibt sich $-\frac{d}{8}=\ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow d=8\cdot\ln(2)\approx 5{,}545$. Bei einer Höhenänderung von ca. 5,5 km halbiert sich der Luftdruck. DEG 8*ln(2) 5.545177444
c (3 BE)	Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate des Luftdrucks in einer Höhe von 1,785 km.
Lösung	Zu bestimmen ist der Wert der Ableitung für die Höhe $x = 1{,}785$: $p'(x)=1000\cdot e^{-\frac{x}{8}}\cdot(-\frac{1}{8})=-125\cdot e^{-\frac{x}{8}}$, also $p'(1{,}785)=-125\cdot e^{-\frac{1{,}785}{8}}\approx -100$, d. h., in einer Höhe von 1785 m beträgt die Änderungsrate ungefähr -100 hPa/km (also um ca. 1 hPa pro 10 m). DEG $-125*e^{-\frac{1.785}{8}}$ -100.0018551
	Laut einer Faustregel sinkt der Luftdruck um 1 hPa, wenn die Höhe um 10 m zunimmt.
d (4 BE)	Eine Gruppe von Bergsteigern misst in einer Höhe von 1785 m einen Luftdruck von 800 hPa. Bestimmen Sie die Höhe, in der sich die Bergsteiger einige Zeit später befinden, wenn die Faustregel dafür 2785 m liefert.
Lösung table	Wenn die Bergsteiger 1000 m höher geklettert sind, müsste der Luftdruck gemäß der Faustregel um 100 hPa gesunken sein. Die tatsächliche Höhe ergibt sich dann aus der Gleichung $1000\cdot e^{-\frac{x}{8}}=p(1{,}785)-100 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{8}}=\frac{p(1{,}785)-100}{1000} \Leftrightarrow x=-8\cdot\ln(\frac{p(1{,}785)-100}{1000})\approx 2{,}853$, d.h. die Bergsteiger befinden sich tatsächlich in einer Höhe von ca. 2853 m. DEG $f(x)=1000*e^{-\frac{x}{8}}$ DEG $-8*\ln\left(\frac{f(1.785)-100}{1000}\right)$ 2.85322994 ((Hinweis: Bei der GTR-Berechnung wurde die Funktion p mit f bezeichnet.))
e (3 BE)	Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, die ausgehend von einem Luftdruck von 800 hPa in einer Höhe von 1785 m für jeden anderen Luftdruck (in hPa) die der Faustregel entsprechende Höhe (in km) liefert.
Lösung	Nach der Faustregel würde der Luftdruck linear abnehmen, wobei die Änderungsrate 1 hPa pro 0,01 km beträgt, also m = -0,01. Setzt man die Koordinaten des bekannten Punkts (800 I 1,785) in die Gleichung $y=-0{,}01x+b$ ein, dann erhält man $1{,}785=-0{,}01\cdot 800+b \Leftrightarrow b=1{,}785+0{,}01\cdot 800=9{,}785$ Die Gleichung lautet also $y=-0{,}01x+9{,}785$
f (4 BE)	Geben Sie die Wertemenge des Terms $-8\cdot\ln\frac{u}{1000}$ für $0<u\le 1000$ an. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang.
Lösung	Da die Logarithmusfunktion streng monoton steigend ist, also die Funktion mit dem Term $h(u)=-8\cdot\ln(\frac{u}{1000})$ streng monoton fallend auf dem Intervall]0 ; 1000], ergibt sich die Wertemenge aus den Funktionswerten an den Rändern des Intervalls]0 ; 1000]: $\lim\limits_{u\to 0} h(u)=+\infty$ und $h(1000)=-8\cdot\ln(1)=0$, d. h. $W_h=[0\,;+\infty[=IR_0^+$. h(u) gibt zu jedem Luftdruck u die zugehörige Höhe über dem Meeresspiegel an (Einheiten: hPa bzw. km).

Analysis – Beispiel 4 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1	Für jeden Wert von $k \in IR^+$ ist eine in IR definierte Funktion $f_k: x \mapsto 8k \cdot (kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2$ festgelegt. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
a (3 BE)	Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die G_k mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat.
Lösung	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $(-\frac{1}{k} \mid 0)\,;\,(\frac{1}{k} \mid 0)\,;\,(0 \mid 8k)$ Nullstellen: $f_k(x)=0 \Leftrightarrow kx-1=0 \vee kx+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{k} \vee x=-\frac{1}{k}$ Ordinatenabschnitt: $f_k(0)=8k\cdot(-1)^2\cdot 1^2=8k$
b (2 BE)	Skalieren Sie in der Abbildung 1 die beiden Achsen so, dass die gezeigte Kurve den Graphen $G_{\frac{1}{4}}$ darstellt.  Abb. 1
Lösung	Für $k=\frac{1}{4}$ ergeben sich die folgenden Punkte auf den Koordinatenachsen: $(-4 \mid 0)\,;\,(4 \mid 0)\,;\,(0 \mid 2)$ und somit die rechts ablesbare Skalierung auf den Achsen. 
c (2 BE)	Beschreiben Sie, wie der Graph G_{2k} aus G_k hervorgeht.
Lösung	Bei G_{2k} liegen die folgenden Punkte auf den Koordinatenachsen: $(-\frac{1}{2k} \mid 0)\,;\,(\frac{1}{2k} \mid 0)\,;\,(0 \mid 16k)$, d. h., die Graphen sind im Vergleich zu G_k mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der x-Achse und mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse gestreckt.
d (3 BE)	Begründen Sie, dass $f_k(x)=8k\cdot\left(k^2x^2-1\right)^2$ gilt, und zeigen Sie, dass G_k symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.
Lösung	Gemäß dritter binomischer Formel gilt: $f_k(x)=8k\cdot(kx-1)^2\cdot(kx+1)^2=8k\cdot((kx-1)(kx+1))^2=8k\cdot(k^2x^2-1)^2$ Da die Exponenten von *x* gerade sind, sind die Graphen von G_k achsensymmetrisch zur *y*-Achse. Formaler Nachweis: $f_k(-x)=8k\cdot(k^2(-x)^2-1)^2=8k\cdot(k^2x^2-1)^2=f_k(x)$
e (3 BE)	Für einen Wert von k gibt es einen Punkt $(x_1 \mid f_k(x_1))$ mit $x_1>0$, für den die Gleichung $\frac{f_k(x_1)-0}{x_1-0}=-\frac{1}{f_k'(x_1)}$ gilt. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung.
Lösung	Der Term $\frac{f_k(x_1)-0}{x_1-0}$ gibt die Steigung einer Geraden durch den Ursprung (0 I 0) und den Punkt $(x_1 \mid f_k(x_1))$ an. Durch $f_k'(x_1)$ wird die Steigung der Tangente an den Graphen von G_k an der Stelle x_1 beschrieben.

	$-\frac{1}{f_k'(x_1)}$ ist die Steigung einer dazu senkrechten Geraden (Normale). Die angegebene Bedingung bedeutet, dass die Verbindungsgerade des Punkts $(x_1 \mid f_k(x_1))$ mit dem Ursprung die Tangente an den Graphen von G_k senkrecht schneidet.
	G_k schließt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Die Abbildung 2 zeigt dieses Flächenstück (grau markiert) sowie das Rechteck mit den Eckpunkten $(0 \mid f_k(0))$ und $(\frac{1}{k} \mid 0)$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.  Abb. 2
f (4 BE)	Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks.
Lösung	Der Inhalt des oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücks ergibt sich aus dem Integral über dem Intervall [0 ; $\frac{1}{k}$], vgl. Teilaufgabe a). Eine Stammfunktion zu: $f_k(x) = 8k\cdot(k^2x^2-1)^2 = 8k\cdot(k^4x^4-2k^2x^2+1)$ ist $F_k(x) = 8k\cdot(\frac{1}{5}k^4x^5 - \frac{2}{3}k^2x^3 + x)$. Daher ergibt sich gemäß Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung: $\int_0^{\frac{1}{k}} f_k(x)\,dx = 8k\cdot[\frac{1}{5}k^4x^5 - \frac{2}{3}k^2x^3 + x]_0^{\frac{1}{k}} = 8k\cdot[\frac{1}{5}k^4(\frac{1}{k})^5 - \frac{2}{3}k^2(\frac{1}{k})^3 + \frac{1}{k}]$ $= 8k\cdot[\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{k} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{k} + \frac{1}{k}] = 8k\cdot\frac{1}{k}\cdot[\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1] = 8\cdot\frac{3-10+15}{15} = \frac{64}{15}$
	Bei Rotation des Rechtecks um die x-Achse entsteht ein Körper, ebenso bei Rotation um die y-Achse.
g (2 BE)	Skizzieren Sie einen der beiden Körper und beschriften Sie die Skizze mit den Maßen des Körpers.
Lösung	Skizze des Körpers bei Rotation um die y-Achse  $r = \frac{1}{k}$ und $h = 8k$ Skizze des Körpers bei Rotation um die x-Achse $h = \frac{1}{k}$ und $r = 8k$ 
h (3 BE)	Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die beiden Körper das gleiche Volumen haben.
Lösung	Volumen eines Zylinders: $V = \pi\cdot r^2\cdot h$ Gleichheit der Volumina ist gegeben, wenn $\pi\cdot(\frac{1}{k})^2\cdot 8k = \pi\cdot(8k)^2\cdot(\frac{1}{k})$, also wenn $\frac{8}{k} = 64k \Leftrightarrow k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \sqrt{8}$
i (5 BE)	Bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht ein weiterer Körper. Begründen Sie, dass das Volumen dieses Körpers mit zunehmendem Wert von k beliebig klein wird.

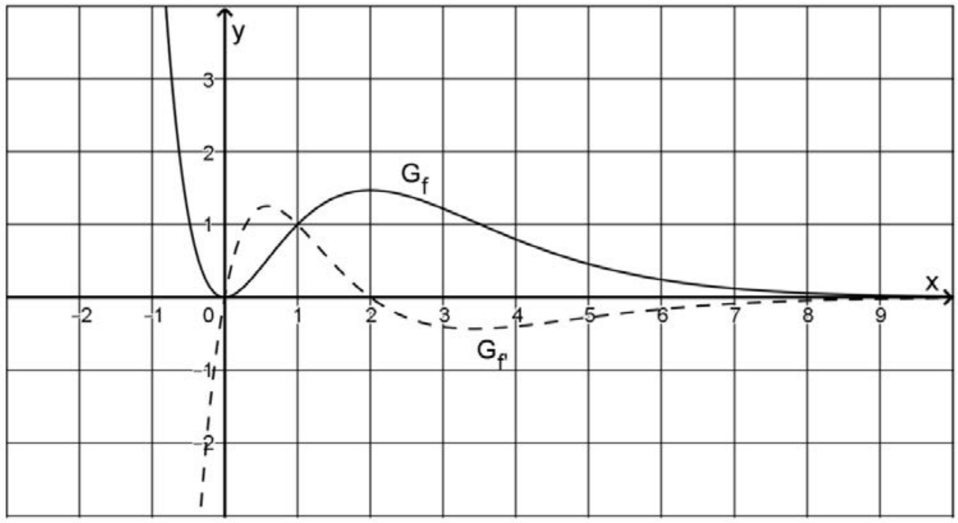
Lösung	Mit zunehmendem k wandert die Nullstelle bei $x=\frac{1}{k}$ auf die y-Achse zu, andererseits wird die Höhe des Rotationskörpers immer größer. Dieser Rotationskörper ist aber stets in dem o. a. Rotationszylinder enthalten. Dieser hat das Volumen $V=\pi\cdot(\frac{1}{k})^2\cdot 8k=8\pi\cdot\frac{1}{k}$. Und da dieses Volumen für größer werdendes k gegen null konvergiert, wird das Volumen des Rotationskörpers gegen null gehen.
2	Im Folgenden werden die in IR definierten Funktionen $f: x\mapsto \frac{1}{4}x^4-2x^2+4$ und $g: x\mapsto (x-2)^2\cdot e^x$ betrachtet.
a (2 BE)	Die Funktion f ist eine Funktion der Schar aus Aufgabe 1. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von k.
Lösung	Aus dem Vergleich von $f_k(x)=8k\cdot(k^4x^4-2k^2x^2+1)=8k^5x^4-16k^3x^2+8k$ mit $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$ folgt: $k=\frac{1}{2}$ (Kontrolle: $8k^5=\frac{1}{4}$, $16k^3=2$).
b (4 BE)	Zwei Extrempunkte des Graphen von f liegen auf dem Graphen von g. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Lösung	$f'(x)=x^3-4x$, $f''(x)=3x^2-4$ *Notwendige Bedingung*: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-4)=0 \quad x=0\vee x=-2\vee x=+2$ *Hinreichende Bedingung*: $f''(0)=-4<0$; $f''(\pm 2)=8>0$ Hochpunkt von f: H (0 I 4); Tiefpunkte von f: T_1 (-2 I 0), T_2 (2 I 0). Einsetzen der x-Werte in die Funktionsgleichung von g(x) ergibt: g(0) = 4 und g(2) = 0, aber $g(-2)=16\cdot e^{-2}\neq 0$. Daher schneiden sich die Graphen von f und g in den Punkten (0 I 4) und (2 I 0).
c (2 BE)	Die Abbildung 3 zeigt die Graphen von f und g für $0\le x\le 2$. Ordnen Sie jeden der Graphen I und II der passenden Funktion zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.  Abb. 3
Lösung table	Vergleich der Funktionswerte an der Stelle x = 1: $f(1)=\frac{9}{4} < g(1)=e$. Graph I gehört also zu f, Graph II zu g. DEG $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$ ▮ DEG $g(x)=(x-2)^2*e^x$ ▮ DEG f(1) $\frac{9}{4}$ g(1) 2.718281828
d (6 BE)	Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(p\mid g(p))$ mit $0<p<2$. Ermitteln Sie rechnerisch denjenigen Wert von p, für den diese Tangente die x-Achse im Punkt $Q(2\mid 0)$ schneidet.
Lösung	Allgemeine Gleichung einer Tangente t mit Steigung g'(p) durch den Punkt (p I g(p)): t(x) = g'(p) · (x – p) + g(p). Ableitung gemäß Produktregel: $g'(x)=2\cdot(x-2)\cdot e^x+(x-2)^2\cdot e^x=(x-2)\cdot e^x\cdot(2+x-2)=(x-2)\cdot e^x\cdot x$

	Tangentengleichung: $t(x) = [(p-2)\cdot e^p \cdot p]\cdot(x-p) + (p-2)^2 \cdot e^p$ $t(2) = [(p-2)\cdot e^p \cdot p]\cdot(2-p) + (p-2)^2 \cdot e^p = 0 \Leftrightarrow$ $(p-2)^2 \cdot e^p = (p-2)^2 \cdot e^p \cdot p \Leftrightarrow p = 1$
3	Der Term einer in IR definierten Funktion h hat die Form $h(x) = a\cdot\cos(bx) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in [0,2]$. Der Graph von h weist im Bereich $-1 \le x \le 3$ genau zwei seiner Extrempunkte auf, den Hochpunkt $(0\,\|\,4)$ und den Tiefpunkt $(2\,\|\,0)$.
a (2 BE)	Skizzieren Sie den Graphen von h für $-1 \le x \le 3$ in einem Koordinatensystem.
Lösung	Skizze des Graphen von h aufgrund der Überlegung, dass der Graph der Kosinusfunktion mit y = cos(x) den Hochpunkt (0 I 1) und den Tiefpunkt (π I -1) hat und daher der Graph von h durch Streckung sowohl in Richtung der x- als auch der y-Achse und durch Verschiebung in Richtung der y-Achse entstanden ist. 
b (4 BE)	Geben Sie die Werte von a und c an und ermitteln Sie den Wert von b.
Lösung	Da der Abstand zwischen kleinstem und größtem Funktionswert 4 beträgt (und bei der gewöhnlichen Kosinusfunktion gleich 2 ist) muss eine Streckung in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 2 erfolgen: cos(x) → 2 · cos(x), dann eine Verschiebung um 2 nach oben; cos(x) → 2 · cos(x) → 2 · cos(x) + 2. Der Graph von y = 2 · cos(x) + 2 hat einen Hochpunkt in (0 I 4), aber danach den Tiefpunkt in (π I 0), muss dieser Graph noch mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in Richtung der x-Achse gestreckt werden. Hieraus ergeben sich die Parameterwerte a = c = 2 und $b = \frac{\pi}{2}$
c (3 BE)	Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-1}^{1}(h(x)-2)\,dx = \int_{1}^{3}(2-h(x))\,dx$ gilt.
Lösung	Der Graph von h ist punktsymmetrisch zum Punkt (1 I 2); daher ist das Flächenstück, das im Intervall [-1 ; +1] vom Graphen von h und der Parallelen zur x-Achse mit y = 2 eingeschlossen wird, genauso groß wie das Flächenstück, das von y = 2 und dem Graphen von h im Intervall [1 ; 3] eingeschlossen wird, vgl. Skizze rechts. 

Analysis – Beispiel 5 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in IR definierten Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{1-x}$ sowie den Graphen $G_{f'}$ der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion f'.



a (4 BE)

Beschreiben Sie die Eigenschaft von

- $G_{f'}$, aus der sich folgern lässt, dass G_f bei $x = 0$ einen Tiefpunkt hat.
- G_f, aus der sich folgern lässt, dass $G_{f'}$ bei $x = 0{,}6$ einen Hochpunkt hat.

Lösung

$G_{f'}$ hat eine Nullstelle bei x = 0 und einen Vorzeichenwechsel von – nach +; hieraus folgt, dass G_f einen Tiefpunkt bei x = 0 hat.

Der Graph von G_f hat (ungefähr) bei x = 0,6 einen Wendepunkt mit Krümmungswechsel von einer Linkskrümmung (also f''(x) > 0) zu einer Rechtskrümmung (also f''(x) < 0); hieraus folgt, dass f' zunächst streng monoton steigend, dann streng monoton fallend ist, d. h., dass f' an der Stelle x = 0,6 einen Hochpunkt hat.

b (5 BE)

Weisen Sie nach, dass $F(x) = -\left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot e^{1-x}$ ein Term einer Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $(1|-3)$ verläuft.

Lösung

Nachweis durch Ableitung (Anwenden von Produkt- und Kettenregel):

$F'(x) = -(2x+2) \cdot e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-x} \cdot (-1)$

$= (-2x - 2 + x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-x} = x^2 \cdot e^{1-x}$

Alle Stammfunktionen sind also von der Form $F(x) = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-x} + C$.

Gesucht ist diejenige Funktion mit F(1) = -3:

$-(1^2 + 2 + 2) \cdot e^0 + C = -3 \Leftrightarrow C = 2$

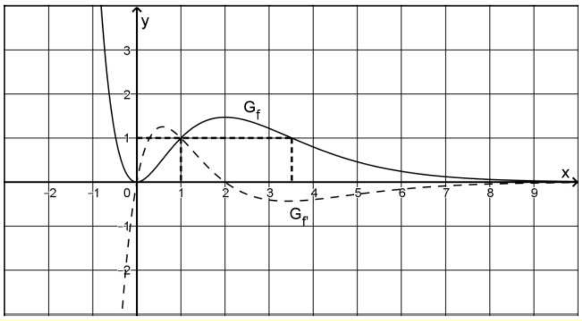
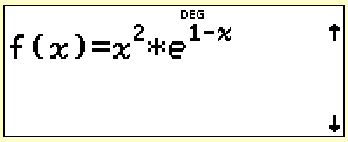
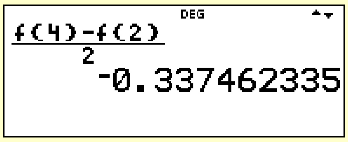
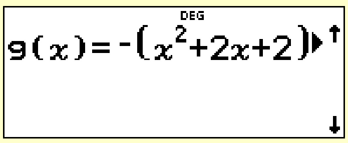
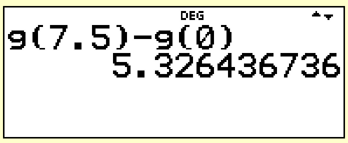
Der Graph von f beschreibt modellhaft die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt eines Lastenaufzugs. Dabei ist x die seit Beginn der Fahrt vergangene Zeit in Sekunden und y die Geschwindigkeit des Aufzugs in Meter pro Sekunde.

c (1 BE)

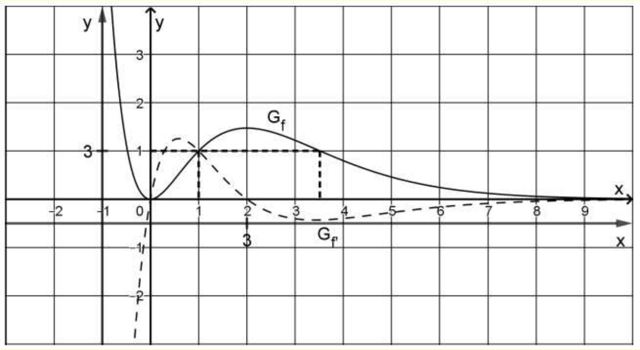
Entnehmen Sie der Abbildung die größte Geschwindigkeit des Aufzugs und geben Sie diese an.

Lösung

Das Maximum von f liegt an der Stelle x = 2 und hat den Wert f(2) = 1,5 (m/s).

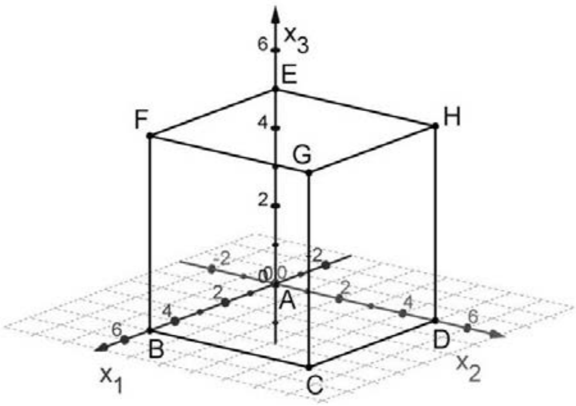
d (2 BE)	Bestimmen Sie grafisch den Zeitraum, in dem die Geschwindigkeit mindestens $1{,}0\,\frac{m}{s}$ beträgt.
Lösung	Aus der Grafik ist zu entnehmen, dass dies im Intervall [1 ; 3,5] der Fall ist, also im Zeitraum zwischen 1 Sekunde und 3,5 Sekunden nach Beginn der Fahrt. 
e (3 BE)	Berechnen Sie für den Zeitraum von 2,0 s bis 4,0 s nach Beginn der Fahrt die mittlere Änderung der Geschwindigkeit.
Lösung table	Die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit ist gleich dem Differenzenquotienten im Intervall [2 ; 4]: $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} \approx -0{,}337$, d. h., die Geschwindigkeit nimmt im betrachteten Zeitraum pro Sekunde um ca. 0,34 m/s ab.  
f (2 BE)	Geben Sie die Bedeutung der unterschiedlichen Vorzeichen von $f'(x)$ im Sachzusammenhang an.
Lösung	$f'(x) > 0$ bedeutet: Die Geschwindigkeit nimmt zu, $f'(x) < 0$ bedeutet: Die Geschwindigkeit nimmt ab.
g (2 BE)	Der Wert des Terms $\int_0^{7,5} f(x)\,dx$ kann als Länge der vom Aufzug zurückgelegten Strecke interpretiert werden. Berechnen Sie diese Länge.
Lösung table	$\int_0^{7,5} f(x)\,dx = [-(x^2+2x+2)\cdot e^{1-x}]_0^{7,5} \approx 5{,}33$. Der Aufzug hat ca.5,33 m zurückgelegt.   ((Hinweis: Bei der GTR-Berechnung wurde die Funktion F mit g bezeichnet.))
h (2 BE)	Beurteilen Sie die Eignung des für die Fahrt des Aufzugs verwendeten Modells im Hinblick auf das Ende der Fahrt.
Lösung	Der Graph von f hat für positive x keine Nullstelle; dies würde bedeuten, dass er nie zum Stillstand kommt.
i (4 BE)	Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: *Würde der Graph von f die Fahrt eines Aufzugs beschreiben, die länger als 7,5 Sekunden dauert, so wäre die von diesem Aufzug zurückgelegte Strecke – unabhängig von der Dauer seiner Fahrt – kürzer als 5,5 m.*

Lösung	$\int_0^r f(x)\,dx = [-(x^2+2x+2)\cdot e^{1-x}]_0^r = 2e-(r^2+2r+2)\cdot e^{1-r} < 2e \approx 5{,}43 < 5{,}5$
	Das für die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt des Aufzugs bisher verwendete Modell wird geändert: Für $0 \le x \le 6$ wird die Fahrt weiterhin durch G_f, für $x \ge 6$ jedoch mithilfe der Tangente an G_f im Punkt $(6 \mid f(6))$ beschrieben.
j (3 BE)	Begründen Sie ohne weitere Rechnung mithilfe des Graphen von f', dass die Tangente an G_f im Punkt $(6 \mid f(6))$ den Graphen von f für $x > 6$ nicht schneidet.
Lösung	Am Graphen von $G_{f'}$ oben kann man ablesen, dass $G_{f'}$ für x > 4 streng monoton steigend ist, d. h., dass der restliche Graph linksgekrümmt ist, d. h., dass die Tangenten unterhalb des Graphen verlaufen, also den Graphen nicht mehr schneiden.
k (5 BE)	Zeigen Sie rechnerisch, dass der Aufzug im geänderten Modell nach 7,5 Sekunden tatsächlich zum Stehen kommt.
Lösung	$f'(x) = 2x\cdot e^{1-x} + x^2\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = x\cdot(2-x)\cdot e^{1-x}$; $f'(6) = 6\cdot(-4)\cdot e^{-5} = -24\cdot e^{-5}$; $f(6) = 36\cdot e^{-5}$, die Tangentengleichung für (6 I f(6)) ist also: $t(x) = f'(6)\cdot(x-6)+f(6) = -24\cdot e^{-5}\cdot(x-6)+36\cdot e^{-5} = -24\cdot e^{-5}\cdot x+180\cdot e^{-5}$ $t(x)=0 \Leftrightarrow -24\cdot e^{-5}\cdot x+180\cdot e^{-5}=0 \Leftrightarrow x=\frac{180}{24}=7{,}5$ Die Nullstelle der Tangente liegt bei x = 7,5, d. h., der Aufzug kommt nach 7,5 s zum Stillstand.
l (4 BE)	Der Aufzug legt im geänderten Modell während der gesamten Fahrtzeit von 7,5 Sekunden eine bestimmte Strecke zurück. Beschreiben Sie, wie man denjenigen Zeitpunkt berechnen könnte, bis zu dem der Aufzug diese Strecke im ursprünglichen Modell zurücklegt.
Lösung	Im Zeitraum [6 ; 7,5] legt der Aufzug eine Strecke zurück, die dem Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks mit der Breite 7,5 – 6 = 1,5 und der Höhe $f(6) = 36\cdot e^{-5}$ entspricht. Gesucht ist dann die obere Grenze b des Intervalls, für das sich der gleiche Flächeninhalt ergibt, also $\int_6^b f(x)\,dx = A$.
2	Betrachtet wird die in IR definierte Funktion $h: x \mapsto 1+2\cdot(x-1)^2\cdot e^{2-x}$.
a (2 BE)	Begründen Sie, dass h keine Nullstelle besitzt.
Lösung	Der zweite Summand des Funktionsterms ist stets größer/gleich null, daher gilt für alle x ∈ IR, dass gilt: h(x) ≥ 1.
b (5 BE)	Es gilt $h(x) = 1+2\cdot f(x-1)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von h schrittweise aus dem in der Abbildung gezeigten Graphen von f erzeugt werden kann. Begründen Sie, dass dabei die Reihenfolge der Schritte nicht beliebig ist.
Lösung	Der Graph von f wird um 1 Einheit nach rechts verschoben f(x) → f(x – 1) und dann mit dem Faktor 2 in Richtung der y-Achse gestreckt, also f(x) → f(x – 1) → 2 · f(x – 1). Anschließend wird der veränderte Graph um 1 Einheit nach oben verschoben.

	Die Reihenfolge der Schritte ist nicht beliebig vertauschbar: Schritt 2 und Schritt 3 wirken sich beide in Richtung der y-Achse aus. Wird Schritt 2 und Schritt 3 vertauscht, dann erhält man 2 · (f(x – 1) + 1) = 2 · f(x – 1) + 2.
c (3 BE)	In der Abbildung stellt eine der beiden Kurven die Funktion f dar. Zeichnen Sie in die Abbildung ein Koordinatensystem ein, in dem diese Kurve die Funktion h darstellt.
Lösung	Schritt 1 bedeutet: Verschiebung der y-Achse um 1 nach links, Schritt 2 bedeutet: Änderung der Kästchenhöhe von 1 auf 2, Schritt 3 bedeutet: Verschiebung der x-Achse um 1 nach unten. 
d (3 BE)	Geben Sie einen Term einer Stammfunktion von h an.
Lösung	Ist F eine Stammfunktion für f, dann ist H(x) = x + F(x – 1) eine Stammfunktion für h(x) = 1 + 2 · f(x – 1).

Analytische Geometrie – Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

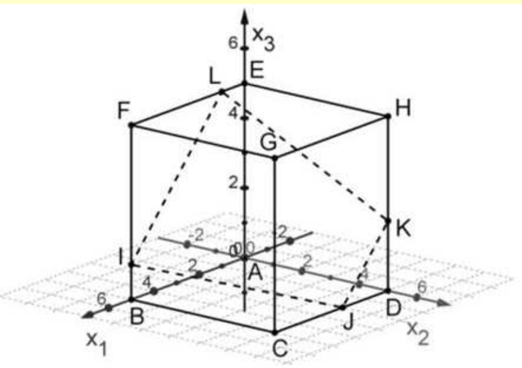
Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $G(5|5|5)$ und $H(0|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Punkte $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$ liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.



a (2 BE)

Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.

Lösung



b (4 BE)

Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Weisen Sie nach, dass die Seite $\overline{IL}$ des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{JK}$.

Lösung

Da die Vektoren $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 5-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$ parallel zueinander sind, liegt hier ein Trapez vor. Und es gilt: Die Strecke $\overline{IL}$ ist doppelt so lang wie die Strecke $\overline{JK}$.

Für die Länge der Strecken $\overline{IJ}$ und $\overline{KL}$ ergibt sich:

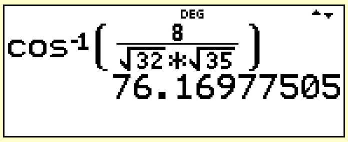
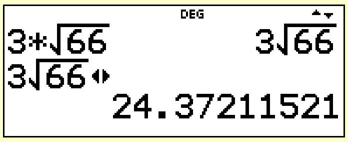
$$\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

$$\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-5 \\ 5-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

d. h., die beiden Schenkel des Trapezes sind gleich lang; es handelt sich also um ein gleichschenkliges Trapez.

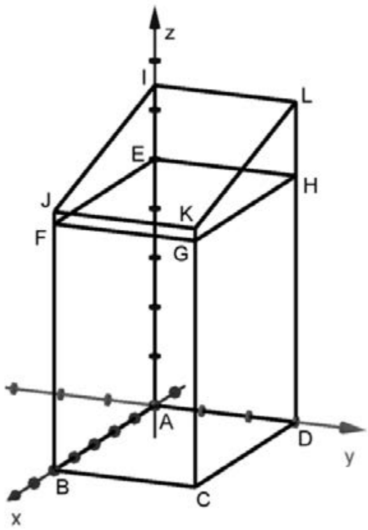
c (2 BE)

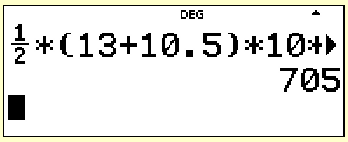
Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL.

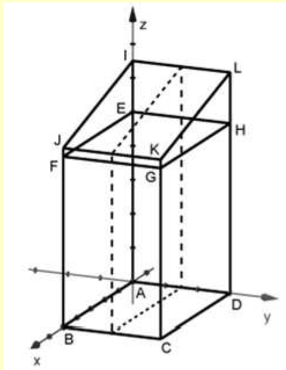
Lösung	Berechnung des Winkels, der von den Vektoren $\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ bestimmt wird: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rvert} = \dfrac{8}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{35}}$,  also $\alpha \approx 76{,}17°$.
d (4 BE)	Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes IJKL.
Lösung	Da hier ein symmetrisches Trapez vorliegt, kann man die Höhe des Trapezes bestimmen, indem man die Mittelpunkte der zueinander parallelen Seiten IL und JK ermittelt und deren Entfernung h voneinander bestimmt. Es gilt: $M_{IL}(3 \mid 0 \mid 3)$ und $M_{JK}(1 \mid 5 \mid 1)$ und $h = \sqrt{(1-3)^2 + (5-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$. Die Länge der Mittellinie des Trapezes ist $\frac{1}{2} \cdot (\lvert IL \rvert + \lvert JK \rvert) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{32} + \sqrt{8}) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{2}$. Der Flächeninhalt des Trapezes ist daher gleich $3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{33} = 3 \cdot \sqrt{66} \approx 24{,}37$ FE. 
e (3 BE)	Gegeben ist die Ebene $S: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$. Der Punkt K liegt in einer Ebene T, die parallel zu S ist. Untersuchen Sie, ob auch der Punkt L in T liegt.
Lösung	Zueinander parallele Ebenen haben denselben Normalenvektor; die gesuchte Ebene T erfüllt also die Koordinatengleichung T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = k$ mit $5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = k$, also k = 30. Die Koordinaten von L(1 I 0 I 5) erfüllen ebenfalls die Koordinatengleichung von T, denn $5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 30$.
f (5 BE)	Für einen Wert von r schneidet die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$ die Kante $\overline{GH}$ des Würfels. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt die Kante teilt.
Lösung	Die Punkte der Würfelkante GH lassen sich mithilfe einer Parameterdarstellung beschreiben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-5 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5v \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $0 \le v \le 1$.
	Für gemeinsame Punkte der Gerade g mit der Würfelkante gilt:

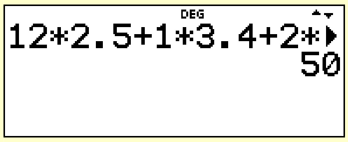
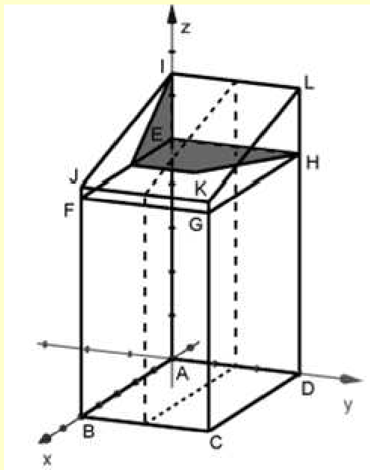
	$\begin{pmatrix} 4-r+4u \\ -5u \\ r^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5v \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Aus der 2. Gleichung dieses linearen Gleichungssystems ergibt sich u = -1, aus der 3. Gleichung $r^2 = 4$, also r = 2 $\vee$ r = -2. Einsetzen in die 1. Gleichung ergibt dann die Bedingungen falls r = 2: 4 – 2 – 4 = 5 – 5v, also $v = \frac{7}{5}$, falls r = -2: 4 + 2 – 4 = 5 – 5v, also $v = \frac{3}{5}$. Da für Punkte der Kante GH gelten muss 0 ≤ v ≤ 1, ist $v = \frac{3}{5}$ die gesuchte Lösung. Die Strecke GH wird durch die Gerade g im Verhältnis $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$, also 3:2 geteilt.

Analytische Geometrie – Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

	Ein Haus kann modellhaft durch den abgebildeten Körper ABCDIJKL dargestellt werden. Das Dachgeschoss des Hauses entspricht dabei dem Prisma EFGHIJKL; der Teilkörper ABCDEFGH ist ein Quader. Der Teil der Fassade des Hauses, der durch das Viereck IEHL dargestellt wird, ist vollständig verglast; weitere Fenster hat das Dachgeschoss nicht. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0|0|0), G(10|6|10), H(0|6|10) K(10|6|10,5) und L(0|6|13) gegeben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. 
a (3 BE)	Berechnen Sie das Volumen des Hauses.
Lösung	Aus der Differenz der x- und y-Koordinaten der Punkte A und G kann man die Länge und Breite der Grundfläche des Quaders entnehmen, aus der Differenz der z-Koordinaten von A und G, H die Höhe des Quaders: $V_{Quader} = \lvert AB \rvert \cdot \lvert AD \rvert \cdot \lvert AE \rvert = 10 \cdot 6 \cdot 10 = 600$ Das Prisma hat das Trapez EIJF als Grundfläche und EH als Höhe. Der Flächeninhalt der Grundfläche ergibt sich aus der Länge der Mittellinie von EI und FJ und der Trapezhöhe EF. Die Längenmaße von EI ergeben sich aus der Differenz der z-Koordinaten von L und H, die von FJ aus der Differenz der z-Koordinaten von K und G, H. Die Länge von EF ergibt sich aus der Differenz der x-Koordinaten von A und K, die Länge von EH aus der Differenz der y-Koordinaten von A und L: $V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot (\lvert EI \rvert + \lvert FJ \rvert) \cdot \lvert EF \rvert \cdot \lvert EH \rvert = \frac{1}{2} \cdot (3+0{,}5) \cdot 10 \cdot 6 = 105$ Das Haus hat ein Volumen von ungefähr V = 600 + 105 = 705 m^3.

<table>
<tr><td></td><td>Der gesamte Körper kann auch als Prisma aufgefasst werden mit der trapezartigen Grundfläche ABJI und der Höhe AD. Dann ergibt sich


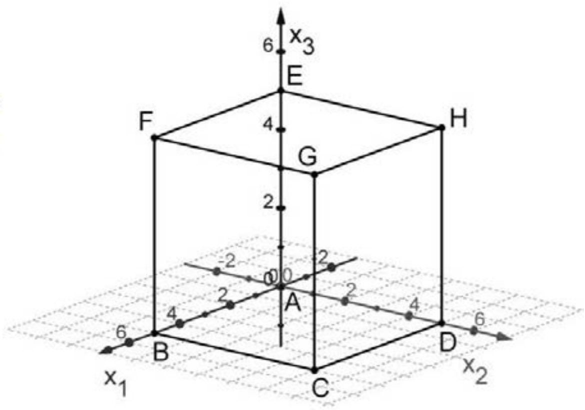
$V_{Prisma} = \frac{1}{2}\cdot(|AI|+|BJ|)\cdot|AB|\cdot|AD|$
$= \frac{1}{2}\cdot(13+10{,}5)\cdot 10\cdot 6 = 705$</td></tr>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td>Geben Sie eine Gleichung der Symmetrieebene des Körpers ABCDIJKL an. Zeichnen Sie in die Abbildung die Seiten der Figur ein, in der diese Ebene den Körper schneidet.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Da die Symmetriebene parallel zur x-z-Ebene in positiver Richtung der y-Achse im Abstand 3 liegt, werden die Punkte der Ebene durch die Koordinatengleichung
y = 3
beschrieben.

</td></tr>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td>Untersuchen Sie für jede der beiden Ebenen $S: 3x-5y=0$ und $T: 3x+5y=0$, ob sie durch das Innere des Körpers ABCDIJKL verläuft.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Ebene S enthält die z-Achse und verläuft durch die Punkte A(0l0l0), C(10l6l0), G(10l6l10) und E(0l0l10); sie schneidet also den Körper.
Ebene T enthält ebenfalls die z-Achse, kann aber keinen der Punkte aus dem Inneren des Körpers enthalten, deren x- und y-Koordinate positive Zahlen sind.</td></tr>
<tr><td></td><td>Zur Gestaltung der Außenwände des Hauses werden verschiedene Farben zum Mischen gekauft. Die Einträge des Vektors $\vec{m} = \begin{pmatrix} w \\ r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ geben jeweils in Liter die Menge der weißen, roten, grünen und blauen Farbe an, die Einträge des Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}50 \\ 3{,}40 \\ 3{,}50 \\ 3{,}20 \end{pmatrix}$ in entsprechender Reihenfolge jeweils den Preis für einen Liter Farbe in Euro.</td></tr>
<tr><td>d
(1 BE)</td><td>Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\vec{m}\circ\vec{p}$ im Sachzusammenhang.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Mithilfe des Skalarprodukts w · 2,5 + r · 3,4 + g · 3,5 + b · 3,2 kann man den Gesamtpreis der Farben berechnen.</td></tr>
<tr><td>e
(3 BE)</td><td>Es gilt $\vec{m}\circ\vec{p}=250$. Es wurde genau so viel Farbe gekauft, dass die weiße, rote, grüne und blaue Farbe im Verhältnis $12:1:2:3$ gemischt werden können. Berechnen Sie für jede Farbe die gekaufte Menge.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Zu bestimmen ist das unbekannte Vielfache des Verhältnisses 12:1:2:3, aus dem sich die Gesamtkosten von 250 € ergeben:</td></tr>
</table>

	$\begin{pmatrix} 12r \\ 1r \\ 2r \\ 3r \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2{,}50 \\ 3{,}40 \\ 3{,}50 \\ 3{,}20 \end{pmatrix} = 250 \Leftrightarrow 50r = 250 \Leftrightarrow r = 5$ Es wurden 60 Liter weiße, 5 Liter rote, 10 Liter grüne und 15 Liter blaue Farbe gekauft.	
f (3 BE)	Gemäß der Verordnung zur Berechnung der Wohnfläche werden die Grundflächen von Raumteilen, die höchstens einen Meter hoch sind, nicht angerechnet. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Bodenfläche des Dachgeschosses, für den diese Regelung gilt.	
Lösung	Wie aus der Skizze rechts ablesbar ist, fallen 20 % der Fläche unter diese Regelung. *Ansatz*: Geradengleichung $y = 3 - \frac{3-0{,}5}{10} \cdot x = 3 - \frac{1}{4} \cdot x$ $y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 8$	
g (5 BE)	Sonnenlicht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt durch den verglasten Teil der Fassade in das Dachgeschoss einfällt, kann im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Einer der Eckpunkte des von der Sonne beschienenen Flächenstücks auf der Bodenfläche des Dachgeschosses liegt nicht am Rand der Bodenfläche. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der diesen Eckpunkt im Modell darstellt. Zeichnen Sie in die Abbildung alle von der Sonne beschienenen Flächenstücke im Dachgeschoss ein.	
Lösung	Der Punkt L wird durch die Sonnenstrahlen auf die Dachgeschossfläche z = 10 projiziert. Das Bild L' des Punkts L ergibt sich aus dem Schnitt der Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der Ebene z = 10: Aus $13 + (-2) \cdot s = 10$ ergibt sich s = 1,5 und hiermit die anderen beiden Koordinaten von L': x = 0 + 1,5 · 3 = 4,5 und y = 6 + 1,5 · (-2) = 3, also L'(4,5 I 3 I 10). In der Zeichnung verbindet man diesen Punkt mit H = H'. Außerdem zeichnet man eine Parallele zu IL durch L' bis zum Schnitt mit der Kante EF und erhält damit die weiteren Begrenzungen der von der Sonne beschienenen Fläche.	

Analytische Geometrie – Beispiel 3 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



a (2 BE)

Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.

(vgl. Beispiel 1)

b (3 BE)

Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

(vgl. Beispiel 1)

c (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

Lösung

Zu bestimmen ist ein Normalenvektor für die Ebene T, die durch die Vektoren $\overrightarrow{IJ}$ und $\overrightarrow{IL}$ aufgespannt wird: $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Einen solchen Vektor erhält man z. B. mithilfe des Vektorprodukts

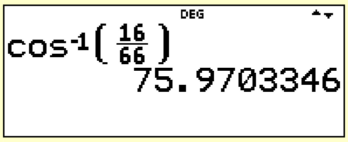
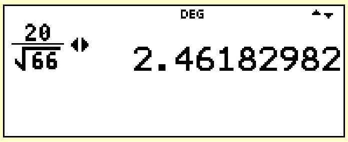
$$\overrightarrow{IJ} \times \overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-4) - (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 0 - 5 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man einen Normalenvektor in diesem Beispiel schneller finden: Da die zweite Komponente von $\overrightarrow{IL}$ gleich null ist und die beiden anderen Komponenten betraglich gleich sind, ergibt sich, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ n_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeignet ist.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ n_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3 + 5n_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow n_2 = 0{,}8 \text{, also } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

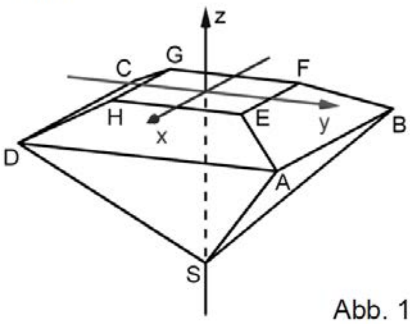
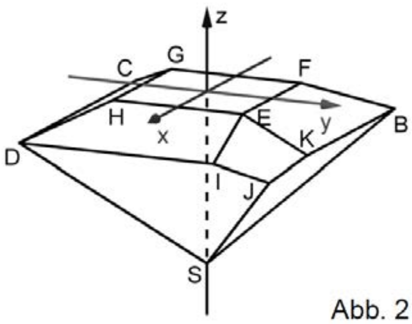
Einsetzen der Koordinaten des Punktes I ergibt dann die Koordinatengleichung der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 + 0 + 1 = 6 \text{, also } x_1 + 0{,}8x_2 + x_3 = 6 \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30.$$

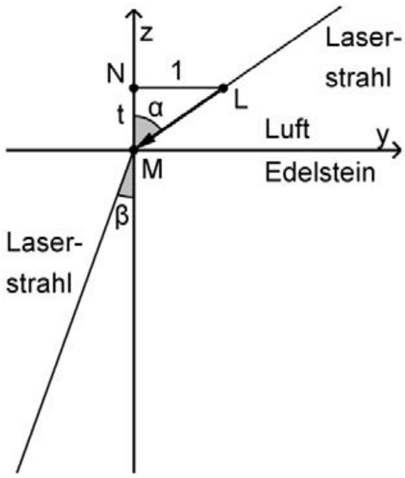
d (6 BE)	Spiegelt man T an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$, so erhält man die Ebene T'. Zeigen Sie, dass T' durch die Gleichung $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich T und T' schneiden.
Lösung	Spiegelt man die Punkte I, J, L an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$, dann bleiben deren x_2- und x_3-Koordinaten gleich, während die neuen x_1-Koordinaten sich durch Spiegelung an $x_1 = 2{,}5$ ergeben, also I'(0|0|1), J'(3|5|0), L'(4|0|5). Diese Punkte erfüllen die angegebene Koordinatengleichung: $-5\cdot 0 + 4\cdot 0 + 5\cdot 1 - 5 = 0$, $-5\cdot 3 + 4\cdot 5 + 5\cdot 0 - 5 = 0$, $-5\cdot 4 + 4\cdot 0 + 5\cdot 5 - 5 = 0$. Der Winkel zwischen den Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{66}} = \frac{-25+16+25}{66} = \frac{16}{66}$  $\Leftrightarrow \alpha \approx 76°$
e (4 BE)	Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Strecke $\overline{FG}$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 sein kann.
Lösung	Die Punkte der Strecke FG können beschrieben werden mithilfe von $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5r\\5\end{pmatrix}$ mit $0 \le r \le 1$. Der Abstand eines solchen Punktes von der Ebene T lässt sich mithilfe der HESSEschen Normalform von T bestimmen: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30 \Leftrightarrow \frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{5^2+4^2+5^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{66}} = 0$. Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Strecke FG ergibt $d_r = \frac{25 + 20r + 25 - 30}{\sqrt{66}} = \frac{20r + 20}{\sqrt{66}} \approx 2{,}46\cdot(r+1) > 2$ für $0 \le r \le 1$, d.h., kein Punkt der Strecke kann den Abstand 2 haben. 
	Betrachtet wird die Schar der Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}2{,}5\\0\\3{,}5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$.
f (2 BE)	Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ liegt.
Lösung	Die Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ ist parallel zur x_1-x_2-Ebene. Die Richtungsvektoren aller Geraden, die tatsächlich in dieser Ebene liegen, haben die x_3-Komponente null. Die x_3-Komponente der Richtungsvektoren der Geradenschar g_a ist aber gleich $\frac{2}{a}$ und damit für jeden Wert von a ungleich null. Daher kann keine der Geraden in der Ebene $x_3 = 3{,}5$ liegen.

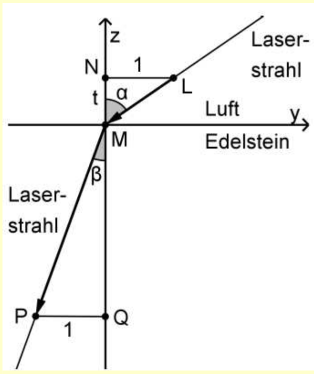
g (4 BE)	Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und T′ zur betrachteten Schar gehört.
Lösung	*Punktprobe*: Der gemeinsame Punkt der Geradenschar (2,5 I 0 I 3,5) gehört zu beiden Ebenen: $5\cdot 2{,}5+4\cdot 0+5\cdot 3{,}5=30$ und $-5\cdot 2{,}5+4\cdot 0+5\cdot 3{,}5=5$. Kontrolle bzgl. des Richtungsvektors: Wenn eine Gerade der Geradenschar Schnittgerade der beiden Ebenen ist, dann muss deren Richtungsvektor orthogonal zu den Normalvektoren der beiden Ebenen sein. Für beide Ebenen ergibt sich das gleiche Skalarprodukt $\begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix} = -40a+\frac{10}{a}=0 \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ (da $a \in \mathbb{R}^+$) Somit ist die Schnittgerade die Gerade $g_{\frac{1}{2}}$ der Schar.

Analytische Geometrie – Beispiel 4 (erhöhtes Anforderungsniveau)

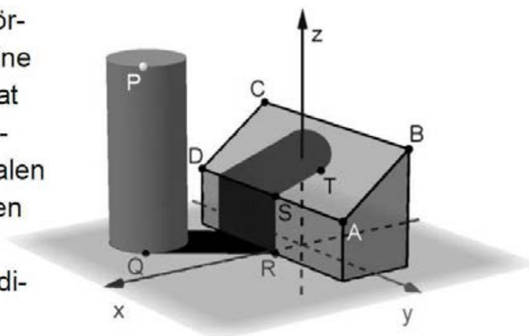
1	Die Abbildung 1 stellt einen bearbeiteten Edelstein dar. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Längeneinheit einem Millimeter in der Wirklichkeit entspricht, sind die Quadrate ABCD und EFGH mit $A(4\,\vert\,4\,\vert\,-1)$ und $E(2\,\vert\,2\,\vert\,0)$ parallel zur xy-Ebene. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sowie der Punkt $S(0\,\vert\,0\,\vert\,-5)$ liegen auf der z-Achse.  Abb. 1  Abb. 2 Die Abbildung 2 stellt den Edelstein nach einem zusätzlichen Bearbeitungsschritt dar, bei dem ein pyramidenförmiges Stück abgeschliffen wurde. Das Viereck EIJK mit $I(4\,\vert\,2\,\vert\,-1)$ und $K(2\,\vert\,4\,\vert\,-1)$ ist ein Drachenviereck und liegt in der Ebene W.
a (1 BE)	Die Gerade $u: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft durch A. Zeigen Sie, dass u auch durch S verläuft.
Lösung	Gesucht ist der Wert für den Parameter r (Punktprobe): $\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix}4+r=0\\4+r=0\\-1+r=-5\end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow r=-4$
b (4 BE)	Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene W in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $W: x+y+2z-4=0$)*

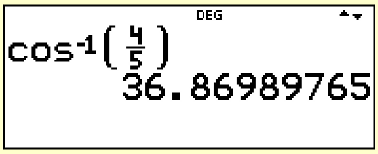
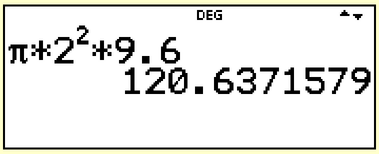
Lösung	Die Ebene W wird vom Punkt E aus aufgespannt durch die Vektoren $\overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-2 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-2 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Offensichtlich ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\overrightarrow{EI}$. Hieraus folgt wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, dass $x_2 = 1$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Koordinatengleichung der Ebene W: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4+2-2 = 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
c (3 BE)	Berechnen Sie die Koordinaten von J. *(zur Kontrolle: $J(3{,}5 \mid 3{,}5 \mid -1{,}5)$)*
Lösung	Der Punkt J ist der Schnittpunkt der Ebene W mit der Geraden u. Gemeinsame Punkte zweier geometrischer Objekte erfüllen beide Darstellungen. u: $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+r \\ 4+r \\ -1+r \end{pmatrix}$, d. h., ein Punkt von u hat die Koordinaten (4+r I 4+r I -1+r) Einsetzen in die Koordinatengleichung der Ebene: $(4+r)+(4+r)+2\cdot(-1+r) = 4 \Leftrightarrow 6+4r = 4 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$ Berechnung des Schnittpunkts: $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$, also J (3,5I3,5I-1,5).
d (6 BE)	Berechnen Sie das Volumen des Teils des Edelsteins, der durch den zusätzlichen Bearbeitungsschritt verloren ging.
Lösung	Flächeninhalt des (symmetrischen) Drachenvierecks (= zwei zueinander kongruente Dreiecke mit Grundseite EJ und Höhe ½ · IK): $\overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} 3{,}5-2 \\ 3{,}5-2 \\ -1{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$, $\mid EJ \mid = \sqrt{3 \cdot 1{,}5^2} = 1{,}5 \cdot \sqrt{3}$ $\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 4-2 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mid IK \mid = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2}$, also $A = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \mid IK \mid) \cdot \mid EJ \mid) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6}$ Die Höhe der Pyramide ist gleich dem Abstand des Punktes A zur Ebene W: HESSEsche Normalenform der Ebenengleichung: $\frac{x_1 + x_2 + 2x_3 - 4}{\sqrt{6}} = 0$.

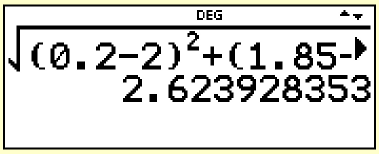
	Abstand $d(A,W)=\frac{4+4-2-4}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ Volumen der Pyramide: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}=1$. An der betrachteten Ecke geht ein Volumen von 1 mm³ verloren.
e (3 BE)	In weiteren Bearbeitungsschritten werden auch an den Eckpunkten des Edelsteins, die durch B, C und D dargestellt sind, pyramidenförmige Stücke gleicher Form und Größe abgeschliffen. Anschließend ist der Edelstein symmetrisch bezüglich der Achse, die im Modell durch die z-Achse beschrieben wird. Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist: *Eine der drei Flächen, die durch die weiteren Bearbeitungsschritte entstanden sind, liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung* $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *mit* $r,s\in\mathbb{R}$.
Lösung	Bei dem betrachteten Eckpunkt (-2 l -2l 0) handelt es sich um G, dem Bildpunkt von E bzgl. eine Spiegelung an der z-Achse. Entsprechend wird der Punkt I auf den Punkt I'(-4l-2l-1), und der Punkt K auf K'(-2l4l-1) gespiegelt, sodass $\overrightarrow{GI'}=\begin{pmatrix}-4-(-2)\\-2-(-2)\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{GK'}=\begin{pmatrix}-2-(-2)\\-4-(-2)\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$ Zu diesen beiden Vektoren ist der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ orthogonal (wie man auch durch Spiegelung an der z-Achse herausfindet). Dieser Vektor ist auch orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der o. a. Ebene: $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$. Daher ist die o. a. Aussage richtig.
2	Ein Laserstrahl, der auf den Edelstein trifft, kann im Modell mithilfe einer Gerade beschrieben werden, seine Richtung durch den Vektor $\overrightarrow{LM}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-t\end{pmatrix}$ mit $t>0$. Der Auftreffpunkt wird durch $M(0\|0\|0)$ dargestellt. Beim Übergang in den Edelstein ändert der Laserstrahl seine Richtung. Die Abbildung 3 zeigt in der yz-Ebene schematisch den Verlauf des Strahls. Es gilt $\sin\alpha=2\sin\beta$.  Abb. 3
a (2 BE)	Bestimmen Sie für $\alpha=45°$ ohne zu rechnen den zugehörigen Wert von t.

Lösung	Wenn $\alpha = 45°$, dann ist das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, also t = 1.
b (2 BE)	Zeigen Sie, dass $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ gilt.
Lösung	Der Sinus des Winkels ist definiert als das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse (deren Länge ist gemäß dem Satz von PYTHAGORAS gleich: $\sqrt{1+t^2}$), also: $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
c (4 BE)	Ermitteln Sie einen Vektor, der die Richtung des Laserstrahls im Edelstein in Abhängigkeit von t beschreibt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 3.
Lösung	Der gesuchte Vektor lässt sich darstellen als $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\lvert MQ\rvert \end{pmatrix}$.  Wegen sin(β) = ½ · sin(α) ergibt sich $\sin(\beta) = \frac{1}{\lvert MP\rvert} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+t^2}}$ und aus $\lvert MQ\rvert^2 + 1^2 = \lvert MP\rvert^2$ folgt schließlich; $\lvert MQ\rvert = \sqrt{\lvert MP\rvert^2 - 1} = \sqrt{(2\cdot\sqrt{1+t^2})^2 - 1}$ $= \sqrt{4\cdot(1+t^2) - 1} = \sqrt{3+4t^2}$

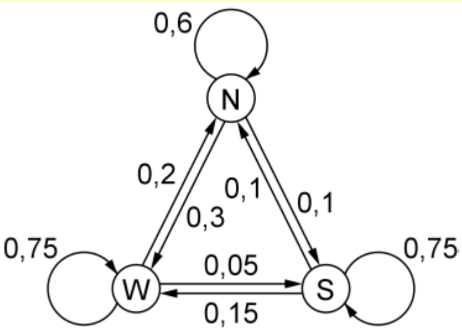
Analytische Geometrie – Beispiel 5 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1	Die Abbildung zeigt modellhaft ein zylinderförmiges Silo, dessen Schatten teilweise auf eine Scheune fällt. Das Silo ist 9,6 m hoch und hat einen Durchmesser von 4 m. Die beiden Gebäude stehen senkrecht auf einem horizontalen Untergrund, der im dargestellten kartesischen Koordinatensystem durch die xy-Ebene beschrieben wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.  Die Dachfläche der Scheune wird durch das Viereck mit den Eckpunkten $A(2\|6\|3)$, $B(-2\|6\|6)$, $C(-2\|-6\|6)$ und $D(2\|-6\|3)$ dargestellt.
a (3 BE)	Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Lösung	Zum Nachweis genügt es zu zeigen, dass zwei einander gegenüberliegende Seiten gleich lang sind und dass zwei benachbarte Seiten senkrecht zueinander sind. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (-2)-2 \\ 6-6 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} (-2)-2 \\ (-6)-(-6) \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$;

	$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2-2\\(-6)-6\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}=0$
b (3 BE)	Das Viereck ABCD liegt in der Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $E: 3x+4z=18$)*
Lösung	Eine Parameterdarstellung der Ebene E ist $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}$. Offensichtlich ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene. Hieraus ergibt sich die Koordinatengleichung $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}*\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=6+0+12=18$, also 3x + 4z = 18.
c (2 BE)	Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Dachfläche der Scheune gegenüber der Horizontalen geneigt ist.
Lösung cos cos^{-1}	Der Vektor $\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der horizontalen Ebene. Daher gilt: $\cos(\alpha)=\frac{\vec{m}*\vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}=\frac{4}{1\cdot 5}$, also $\alpha\approx 36{,}9°$. 
d (2 BE)	Berechnen Sie das Volumen des Silos.
Lösung	$V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot 2^2\cdot 9{,}6\approx 120{,}6\ m^3$ 
	Das Sonnenlicht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt auf die beiden Gebäude trifft, kann durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-4\\3\\-3\end{pmatrix}$ beschrieben werden. Der Raumbereich zwischen Silo und Scheune, der vom Sonnenlicht nicht erreicht wird, wird von mehreren Flächen begrenzt. Eine dieser Begrenzungsflächen wird durch das ebene Fünfeck PQRST beschrieben, wobei der Punkt T im Modell den Schatten von $P(7{,}2\mid -3{,}4\mid 9{,}6)$ darstellt.
e (4 BE)	Das Fünfeck PQRST liegt in der Ebene F. Begründen Sie ohne die Koordinaten eines weiteren Eckpunkts des Fünfecks zu bestimmen, dass F durch die Gleichung $3x+4y=8$ beschrieben wird.

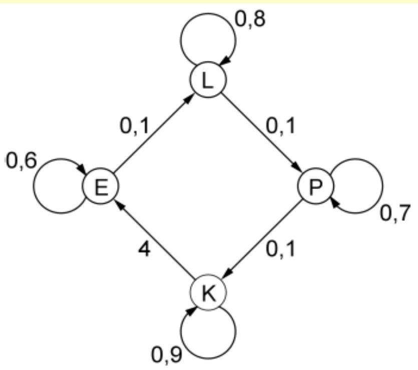
Lösung	Die Koordinaten des Punkts P erfüllen die angegebene Koordinatengleichung: 3 · 7,2 + 4 · (-3,4) = 8. Die Ebene F wird aufgespannt durch die Richtungsvektoren der Sonnenstrahlen und durch $\overrightarrow{QP}$, welches ein Vielfaches von $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Für den Richtungsvektor der Sonnenstrahlen gilt ebenfalls $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$.
f (7 BE)	Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{ST}$.
Lösung	Aus der Abbildung kann man ablesen, dass S die gleiche x- und z-Koordinate hat wie der Punkt A, also S(2ly_Sl3). Da S in F liegt, ergibt sich die y-Koordinate durch Einsetzen in die Ebenengleichung: 3 · 2 + 4 · y_S = 8 ⇔ $y_S = 0{,}5$. T ist das durch die Sonnenstrahlen erzeugte Bild von P auf der Dachfläche E, also der Schnittpunkt der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -3{,}4 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2-4r \\ -3{,}4+3r \\ 9{,}6-3r \end{pmatrix}$ Einsetzen in die Koordinatengleichung von E ergibt 3 · (7,2 – 4r) + 4 · (9,6 – 3r) = 18 ⇔ 21,6 – 12r + 38,4 – 12r = 18 ⇔ 24r = 42 ⇔ r = 1,75. Also ist T(7,2 – 7l -3,4 +5,25 l 9,6 – 5,25) = (0,2 l 1,85 l 4,35). Die Strecke $\overline{ST}$ hat daher die Länge $\sqrt{(0{,}2-2)^2+(1{,}85-0{,}5)^2+(4{,}35-3)^2} \approx 2{,}62$ 
g (4 BE)	Eine zweite Begrenzungsfläche des betrachteten Raumbereichs liegt im Modell in einer Ebene $H: 3x+4y=d$ mit $d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Wert von d.
Lösung	Die Begrenzungsfläche liegt parallel zur Ebene F und verläuft durch den Punkt Q', der auf der Dachfläche des Silos dem Punkt Q gegenüberliegt. Zum Punkt Q' gelangt man, indem man vom Punkt Q aus senkrecht zur Ebene F um 4 Einheiten (= Durchmesser des Silos) in entgegengesetzter Richtung zum Normalenvektors von F geht. Einheits-Normalenvektor zur Ebene F: $\vec{f} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} - 4 \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -3{,}4 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -6{,}6 \\ 9{,}6 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Komponenten in die Koordinatengleichung der Ebene ergibt d = 3 · 4,8 + 4 · (-6,6) = -12.

Lineare Algebra – Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

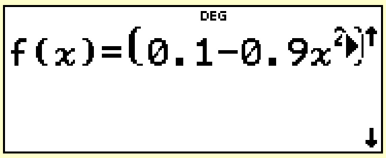
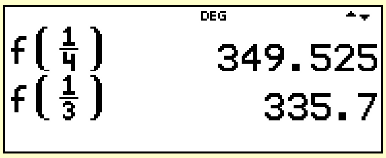
	Ein Unternehmen vermietet Tretboote. In der Hauptsaison betreibt es dazu an einem See die drei Stationen N, S und W. Ein Boot, das an einer der drei Stationen ausgegeben wurde, kann an einer beliebigen der drei Stationen zurückgegeben werden. Jedes Boot kann an einem Tag mehrfach ausgegeben werden; die Rückgabe erfolgt stets am selben Tag wie die Ausgabe. Für jeden Tag können die Ausgaben von Booten an den drei Stationen durch einen Vektor $\vec{a}$ beschrieben werden, die Rückgaben durch einen Vektor $\vec{r}$. Beide Vektoren haben die Form $\begin{pmatrix} n \\ s \\ w \end{pmatrix}$, wobei n, s und w die Anzahlen der Boote sind, die an den Stationen N, S bzw. W am betrachteten Tag insgesamt ausgegeben bzw. zurückgegeben wurden. Der Zusammenhang zwischen den Vektoren lässt sich modellhaft durch die Gleichung $\vec{r} = M \cdot \vec{a}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ darstellen.
a (3 BE)	Interpretieren Sie im Sachzusammenhang den Eintrag 0,05 von M sowie die Tatsache, dass die Summe der Einträge in jeder der drei Spalten von M den Wert 1 hat.
Lösung	Das Matrixelement M_{23} gibt die Wahrscheinlichkeit (den Anteil) an, dass ein Boot, das an der Station W ausgegeben wurde an der Station S zurückgegeben wird. In jeder Spalte muss sich die Summe 1 ergeben, da die Boote, die an einer Station ausgegeben werden, bei irgendeiner der drei Stationen zurückgegeben werden.
b (3 BE)	Stellen Sie den durch die angegebene Gleichung dargestellten Zusammenhang in einem Übergangsdiagramm dar.
Lösung	
c (3 BE)	Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Wenn an einem Tag an allen drei Stationen gleich viele Boote ausgegeben werden, dann ist an der Station W die Anzahl der Rückgaben 20 % höher als die Anzahl der Ausgaben.*
Lösung	Multiplikation der Matrix mit einem Vektor mit gleichen Komponenten ergibt $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9a \\ 0{,}9a \\ 1{,}2a \end{pmatrix}$ Die Aussage trifft zu: In W werden 20 % mehr Boote zurückgegeben als ausgegeben.

d (4 BE)	An einem Dienstag wurde an der Station N 40-mal ein Boot ausgegeben und 40-mal eines zurückgegeben. An der Station S wurde 37-mal ein Boot zurückgegeben, an der Station W 63-mal. Ermitteln Sie, wie viele Boote an der Station S ausgegeben wurden.
Lösung	Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ s \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 37 \\ 63 \end{pmatrix}$, also $\left\lvert \begin{matrix} 24+0{,}10s+0{,}20w=40 \\ 4+0{,}75s+0{,}05w=37 \\ 12+0{,}15s+0{,}75w=63 \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} 0{,}10s+0{,}20w=16 \\ 0{,}75s+0{,}05w=33 \\ 0{,}15s+0{,}75w=51 \end{matrix} \right\rvert$ Subtrahiert man das 4-Fache der 2. Gleichung von der 1. Gleichung, dann erhält man -2,9s = -116, also s = 40, und durch Einsetzen in die 1. Gleichung 0,2w = 12, also w = 60. Kontrolle mit der 3. Gleichung: 0,15 · 40 + 0,75 · 60 = 6 + 45 = 51
e (3 BE)	Für einen Samstag werden die Ausgaben von Booten an den drei Stationen durch $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$ beschrieben, die Rückgaben durch $\begin{pmatrix} a+2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $c=a+b-2$ gilt. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.
Lösung	An der Station N wurden 2 Boote mehr abgegeben als zurückgegeben, an der Station S wurden gleich viele ausgegeben wie zurückgegeben, daher muss für die Station W gelten: c = a + b – 2, also 2 Boote weniger als ausgegeben.
f (4 BE)	In der Nebensaison werden nur die Stationen N und S betrieben, Boote werden also nur dort ausgegeben und können auch nur dort zurückgegeben werden. An einem Mittwoch wurde an der Station N 15-mal ein Boot ausgegeben und 8-mal eines zurückgegeben, an der Station S wurde 10-mal ein Boot ausgegeben und 17-mal eines zurückgegeben. Der Zusammenhang zwischen den Ausgaben und Rückgaben von Booten in der Nebensaison kann modellhaft mithilfe einer Matrix dargestellt werden. Ermitteln Sie eine Matrix, die dafür infrage kommt.
Lösung	Gesucht sind Anteile p, q, für die gilt: $\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} 15p+10-10q=8 \\ 15-15p+10q=17 \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} 15p-10q=-2 \\ -15p+10q=2 \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow$ 10q = 2 + 15p ⇔ q = 0,2 + 1,5p. Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, z. B. p = 0,1 und q = 0,35; p = 0,2 und q = 0,5; p = 0,3 und q = 0,65; p = 0,4 und q = 0,8.

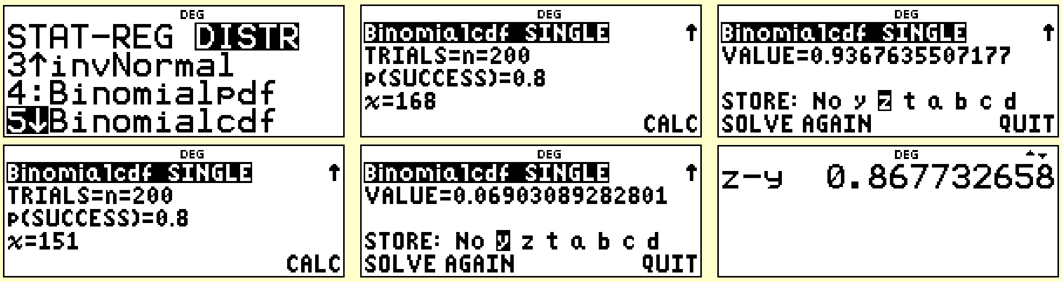
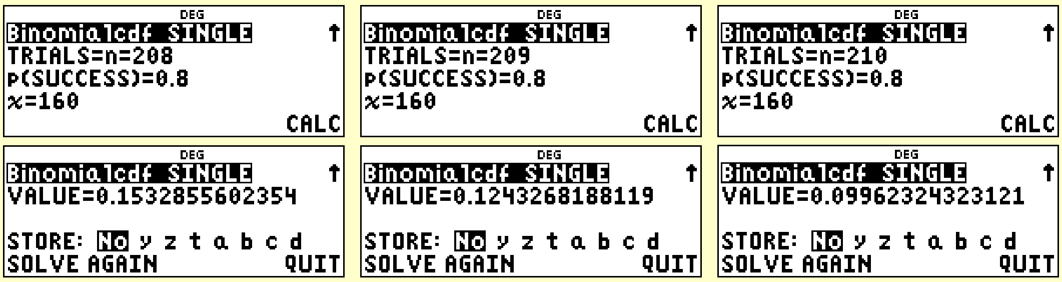
Lineare Algebra – Beispiel 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)

	Bevor ein Australischer Marienkäfer das Stadium eines ausgewachsenen Käfers erreicht, durchläuft er nacheinander die Stadien Ei, Larve und Puppe. Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Marienkäfern in einem großen Gewächshaus, in dem die Larven und ausgewachsenen Käfer als natürlicher Pflanzenschutz gegen Schmierläuse wirken. Die Zusammensetzungen der Population werden durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form $\begin{pmatrix} E \\ L \\ P \\ K \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei E die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven, P die Anzahl der Puppen und K die Anzahl der ausgewachsenen Käfer bezeichnet.
1	Die Entwicklung der Population vom Morgen eines Tages n zum Morgen des nächsten Tages lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ beschreiben.
a (3 BE)	Stellen Sie die durch die Matrix M beschriebene Entwicklung in einem Übergangsdiagramm dar.
Lösung	
	Es gibt genau dann eine Zusammensetzung der Population mit mindestens einem ausgewachsenen Käfer, die sich vom Morgen eines Tages bis zum Morgen des nächsten Tages nicht verändert, wenn das folgende Gleichungssystem eine Lösung mit $K \geq 1$ hat: I $0{,}4E = 4K$ II $E = 2L$ III $L = 3P$ IV $P = K$
b (3 BE)	Leiten Sie die Gleichung III her.
Lösung	Dass sich die Zusammensetzung einer Population nicht verändert, bedeutet, dass der Zustandsvektor ein Fixvektor ist, d. h., dass gilt: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ L \\ P \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ L \\ P \\ K \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 0{,}6E + 4K = E \\ 0{,}1E + 0{,}8L = L \\ 0{,}1L + 0{,}7P = P \\ 0{,}1P + 0{,}9K = K \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 4K = 0{,}4E \\ 0{,}1E = 0{,}2L \\ 0{,}1L = 0{,}3P \\ 0{,}1P = 0{,}1K \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 10K = E \\ E = 2L \\ L = 3P \\ P = K \end{array}$

c (3 BE)	Entscheiden Sie, ob es eine Zusammensetzung der Population mit mindestens einem ausgewachsenen Käfer gibt, die sich vom Morgen eines Tages bis zum Morgen des nächsten Tages nicht verändert. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Lösung	Setzt man nacheinander die Gleichungen ein, dann gilt: $10K = E = 2L = 2 \cdot 3P = 6K$. Dies ist nur möglich, wenn $K = 0$, d. h., eine solche Zusammensetzung ist nicht möglich.
	An einem Montagmorgen besteht die Population aus 1850 Eiern, 800 Larven, 250 Puppen und 200 ausgewachsenen Käfern. Da dennoch zahlreiche Pflanzen von Schmierläusen befallen sind, werden an diesem Morgen zusätzliche 50 Larven und 30 ausgewachsene Käfer im Gewächshaus ausgebracht.
d (2 BE)	Berechnen Sie für den folgenden Dienstagmorgen die Anzahlen der Eier, Larven, Puppen und Käfer.
Lösung	$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1850 \\ 850 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \cdot 1850 + 4 \cdot 230 \\ 0{,}1 \cdot 1850 + 0{,}8 \cdot 850 \\ 0{,}1 \cdot 850 + 0{,}7 \cdot 250 \\ 0{,}1 \cdot 250 + 0{,}9 \cdot 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2030 \\ 865 \\ 260 \\ 232 \end{pmatrix}$ DEG 0.6*1850+4*230 2030 0.1*1850+0.8*850 865 DEG 0.1*850+0.7*250 260 0.1*250+0.9*230 232
e (3 BE)	Am Dienstagmorgen werden weitere 50 Larven und 30 ausgewachsene Käfer ausgebracht. Begründen Sie, dass die Zusammensetzung der Population am folgenden Mittwochmorgen nicht durch den Term $M \cdot M \cdot \left(\begin{pmatrix} 1850 \\ 800 \\ 250 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right)$ dargestellt wird. Ändern Sie den vorgegebenen Term so, dass er die Zusammensetzung an diesem Mittwochmorgen angibt.
Lösung	Der angegebene Term beschreibt die Situation, wenn zusätzlichen Larven und Käfer am Montagmorgen ausgebracht werden. Richtig ist der folgende Term: $M * \begin{pmatrix} 1850 \\ 850 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ für Dienstagmorgen, also $M * \left[M * \begin{pmatrix} 1850 \\ 850 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right]$ für Mittwochmorgen.

2	Je geringer die Temperatur im Gewächshaus ist, desto weniger Eier werden gelegt und desto geringer sind die Anteile der Eier, Larven und Puppen, die vom Morgen eines Tages zum Morgen des nächsten Tages in das jeweils nächste Stadium übergehen. Ist die Temperatur geringer als für das in Aufgabe 1 verwendete Modell angenommen, so kann die Entwicklung der Population vom Morgen eines Tages n zum Morgen des nächsten Tages durch die Gleichung $N \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ mit $N = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 4-\frac{1}{t} \\ 0{,}1-0{,}9t^2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1-0{,}1t^2 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1-0{,}9t^2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Dabei ist t ein von der Temperatur abhängiger Parameter mit positiven Werten.
a (5 BE)	Begründen Sie, dass bezogen auf die gesamte Entwicklung der Population der größte sinnvolle Definitionsbereich für t durch $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$ angegeben wird.
Lösung	Die einzelnen Matrixelemente können nicht negativ werden; nach Voraussetzung gilt außerdem nach Voraussetzung t > 0. Also folgt aus der 1. Zeile: $0 \le 4-\frac{1}{t} < 4 \Leftrightarrow t \ge \frac{1}{4}$ aus der 2. Zeile: $0 \le 0{,}1-0{,}9t^2 < 0{,}1 \Leftrightarrow 0 < t \le \frac{1}{3}$ aus der 3. Zeile: $0 \le 0{,}1-0{,}1t^2 < 0{,}1 \Leftrightarrow 0 < t \le 1$ aus der 4. Zeile: $0 \le 0{,}1-0{,}9t^2 < 0{,}1 \Leftrightarrow 0 < t \le \frac{1}{3}$, vgl. 2. Zeile Insgesamt gilt daher $\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{3}$
b (3 BE)	An einem Morgen setzt sich die Population aus 1700 Eiern, 1380 Larven, 690 Puppen und 510 ausgewachsenen Käfern zusammen. Am folgenden Morgen enthält die Population nur noch 1360 Eier. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von t.
Lösung	$0{,}6 \cdot 1700 + (4-\frac{1}{t}) \cdot 510 = 1360 \Leftrightarrow (4-\frac{1}{t}) \cdot 510 = 340 \Leftrightarrow 4-\frac{1}{t} = \frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow t = \frac{3}{10}$
c (3 BE)	An einem anderen Morgen gehören zur Population 316 Puppen und 373 ausgewachsene Käfer. Ermitteln Sie alle Anzahlen der ausgewachsenen Käfer, die abhängig von der Temperatur am folgenden Morgen auftreten können.
Lösung table	Aus der letzten Zeile der Matrix ergibt sich der Term $f(t) = (0{,}1-0{,}9t^2) \cdot 316 + 0{,}9 \cdot 373$ Einsetzen der Intervallgrenzen aus Teilaufgabe a) führt dann zu einer Mindestanzahl von ca. 336 und einer Höchstanzahl von 349 ausgewachsene Käfer.  

Stochastik – Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)

	In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.
a (4 BE)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 5 % abweicht.
Lösung 2nd data	X: *Anzahl der Erwachsenen in der Stichprobe, die einen Führerschein besitzen* Erwartungswert: $\mu = 200 \cdot 0{,}8 = 160$ $P(152 \le X \le 168) = P(X \le 168) - P(X \le 151) \approx 0{,}868 = 86{,}8\ \%$ 
b (4 BE)	Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen.
Lösung 2nd data	$P(X > 160) = 1 - P(X \le 160) \ge 0{,}9 \Leftrightarrow P(X \le 160) \le 0{,}1$  Die Bedingung ist erfüllt für $n \ge 210$.
	In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre. Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse: A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt." B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden."
c (2 BE)	Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben.
Lösung	Die im Text enthaltenen Informationen kann man in eine 4-Feldertafel mit absoluten Häufigkeiten eintragen (schwarz) und durch Subtraktion ergänzen (rot):

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	**2234**	**248**	2482
$\overline{A}$	8870	**2527**	**11397**
gesamt	11104	**2775**	13879

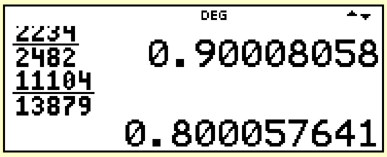
Gesucht ist die Anzahl $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 2527$.

d (5 BE)

Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen. Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Lösung

$P_A(B) = \frac{2234}{2482} \approx 0{,}900$ und $P(B) = \frac{11104}{13879} \approx 0{,}800$.



Da diese beiden Wahrscheinlichkeiten nicht übereinstimmen, sind die Ereignisse A und B nicht stochastisch unabhängig voneinander,

d. h., die Anteile der Personen, die die Führerscheinprüfung bestehen, ist in den beiden Altersgruppen unterschiedlich groß.

e (5 BE)

Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90 %. Berechnen Sie den Wert von q.

Lösung

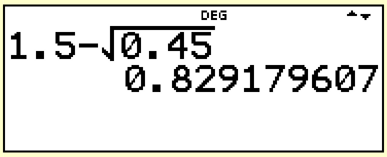
Anteil der Personen, die bei der 1. Prüfung bestanden haben = q

Anteil der Personen, die erst bei der 2. Prüfung bestanden haben = (1 – q) · ½ · q,

also $q + (1-q)\cdot\frac{q}{2} = 0{,}9 \Leftrightarrow q + 0{,}5q - 0{,}5q^2 = 0{,}9 \Leftrightarrow q^2 - 3q = -1{,}8 \Leftrightarrow$

$(q-1{,}5)^2 = 2{,}25 - 1{,}8 \Leftrightarrow q = 1{,}5 \pm \sqrt{0{,}45} \Leftrightarrow$

$q \approx 0{,}829 = 82{,}9\ \%$ (da $q \leq 1$)



Stochastik – Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)

1

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „+1“ beschriftet, 25 % mit „+2“, die übrigen mit „–3“.

a (4 BE)

100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Mehr als 35 der entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

B: „Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „+1“ beschriftet.“

Lösung

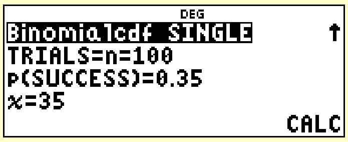
X: *Anzahl der Kugel, die mit „+1“ beschriftet sind*

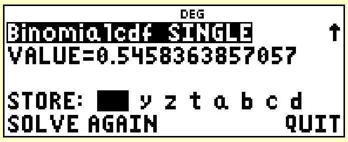
Da die Kugeln zurückgelegt werden, handelt es sich um ein 100-stufiges Bernoulli-Experiment mit p = 0,35.

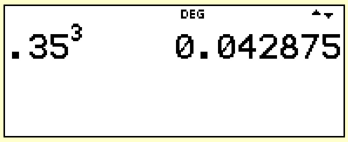
$P(A) = P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) \approx 1 - 0{,}546 = 0{,}454 = 45{,}4\ \%$

$P(B) = 0{,}353 \approx 0{,}043 = 4{,}3\ \%$

2nd data







b (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann.

Lösung

In der Urne sind $35\,\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ mit „+1“ beschriftet, $25\,\% = \frac{25}{100} = \frac{5}{20}$ mit „+2“, daher würde auch eine Anzahl von 20 Kugeln zu der Beschreibung der Urne passen.

2

Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.

a (2 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.

Lösung

Mehr als 3 € gewinnt man nur, wenn zweimal hintereinander eine Kugel mit der Aufschrift „+2“ gezogen wird, also $P(+2;+2) = 0{,}25^2 = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$.

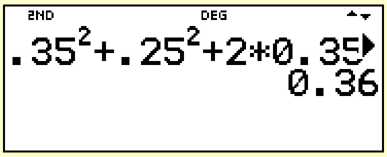
b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel einen Gewinn erzielt, 36 % beträgt.

Lösung

Ein Spieler erzielt einen Gewinn, wenn eine Kugel mit „+1“ oder „+2“ gezogen wird:

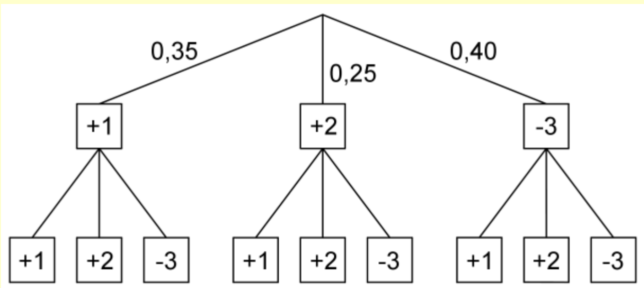
$P(+1;+1) + P(+2;+2) + P(+1;+2) + P(+2;+1)$
$= 0{,}35^2 + 0{,}25^2 + 2 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}36 = 36\,\%$



c (4 BE)

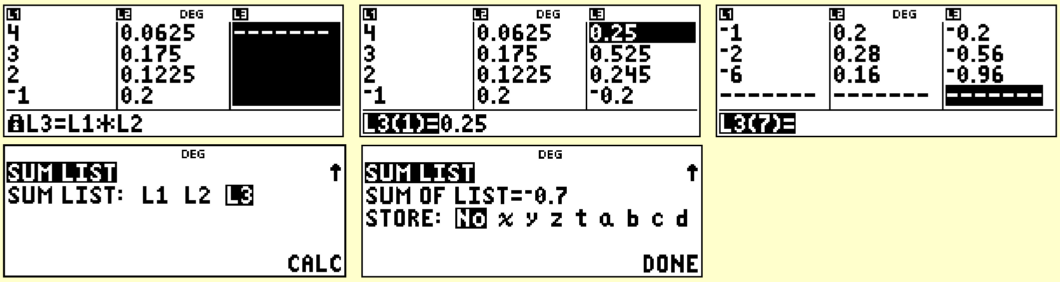
Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms den durchschnittlichen Verlust pro Spiel.

Lösung



Ergebnis	Gewinn	Wahrscheinlichkeit	Erwartungswert
(+2;+2)	+4	0,25² = 0,0625	+0,250
(+1;+2), (+2;+1)	+3	2·0,35·0,25 = 0,175	+0,525
(+1;+1)	+2	0,35² = 0,1225	+0,245
(+2;–3), (–3;+2)	–1	2·0,25·0,4 = 0,2	– 0,200
(+1;–3), (–3;+1)	–2	2·0,35·0,4 = 0,28	– 0,560
(–3;–3)	–6	0,4² = 0,16	– 0,960
Summe		1	**– 0,700**

Pro Spiel ist ein Verlust von durchschnittlich 70 Cent zu erwarten.

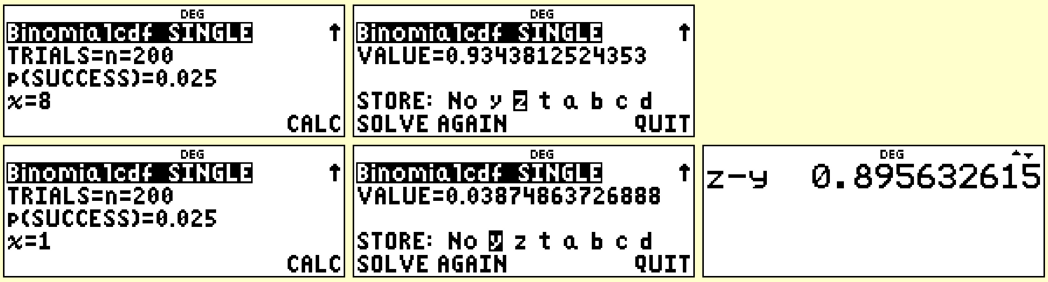
Hinweis data	Die Berechnung des Erwartungswerts kann mithilfe der Befehlsoptionen des data-Menüs erfolgen. Eingabe der Werte der Zufallsgröße „Gewinn“ (Liste 1) mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten (Liste 2), dann berechnen der Produkte in Liste 3 und bilden der Summe: 
3	Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „+1“ beschriftet, die andere mit „+2“. Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.
a (2 BE)	Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, durch den Term $\frac{0{,}35n+1}{n+2}$ angegeben wird.
Lösung	Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „+1“ war für die Urne mit *n* Kugel gleich $0{,}35 = \frac{0{,}35 \cdot n}{n}$. Nach der Ergänzung haben 0,35 · n + 1 Kugeln die Aufschrift „+1“ und es sind zwei Kugeln mehr in der Urne, also n + 2.
b (3 BE)	Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, nach dem Hinzufügen größer ist als vorher.
Lösung	$\frac{0{,}35 \cdot n+1}{n+2} - 0{,}35 = \frac{(0{,}35 \cdot n+1) - 0{,}35 \cdot (n+2)}{n+2} = \frac{1-0{,}7}{n+2} = \frac{0{,}3}{n+2} > 0$ Da die Differenz positiv ist, ist die Wahrscheinlichkeit nach dem Hinzufügen der beiden Kugeln größer geworden.

Stochastik – Beispiel 3 (grundlegendes Anforderungsniveau)

1	Eine Befragung unter 2360 Männern und 2200 Frauen, die in den vorhergegangenen 12 Monaten zumindest einmal an einem Glücksspiel teilgenommen hatten, ergab bei 2,5 % der befragten Männer und bei 0,5 % der befragten Frauen Anzeichen spielsüchtigen Verhaltens. Unter den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse: M: „Die ausgewählte Person ist ein Mann.“ S: „Bei der ausgewählten Person ergaben sich Anzeichen spielsüchtigen Verhaltens.“
a (3 BE)	Stellen Sie den beschriebenen Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.
Lösung	siehe Tabelle unten

	S	$\overline{S}$	gesamt
M	0,025·2360 = 59	2301	2360
$\overline{M}$	0,005·2200 = 11	2189	2200
gesamt	70	4490	4560

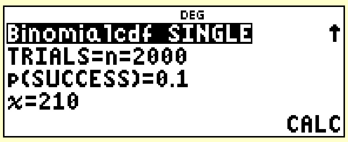
((Die im Text enthaltenen Daten sind in Schwarz eingetragen, die berechneten in Rot.))

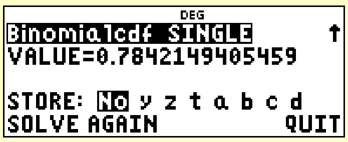
b (2 BE)	Die Terme $P_M(S)$ und $P(M \cap S)$ stellen Wahrscheinlichkeiten dar. Beschreiben Sie für jeden der beiden Terme die Bedeutung im Sachzusammenhang.
Lösung	$P_M(S)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den männlichen Personen der Stichprobe eine ausgewählte Person spielsüchtiges Verhalten zeigt. $P(M \cap S)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person männlich ist und spielsüchtiges Verhalten zeigt
c (2 BE)	Von den befragten Personen, bei denen sich Anzeichen spielsüchtigen Verhaltens ergaben, wird eine zufällig ausgewählt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die ausgewählte Person eine Frau ist.
Lösung	Gesucht ist $P_S(\overline{M}) = \frac{11}{70}$
d (5 BE)	Von den befragten Männern sollen für eine weiterführende Studie 200 zufällig ausgewählt werden. Es soll davon ausgegangen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Männer, bei denen die Befragung Anzeichen spielsüchtigen Verhaltens ergab, durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 2,5 % beschrieben werden kann. Bestimmen Sie das kleinste Intervall mit den beiden folgenden Eigenschaften: ♦ Das Intervall ist bezüglich des Erwartungswerts von X symmetrisch. ♦ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X im Intervall liegt, ist größer als 90 %.
Lösung 2nd data	X: *Anzahl der Personen mit spielsüchtigem Verhalten* Erwartungswert $\mu = 200 \cdot 0{,}025 = 5$ Bestimmen des gesuchten Intervalls durch systematisches Probieren:  $P(2 \le X \le 8) = P(X \le 8) - P(X \le 1) \approx 0{,}896 < 0{,}9$; analog $P(1 \le X \le 9) \approx 0{,}964 > 0{,}9$ Das kleinste zu μ symmetrische Intervall mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von über 90 % ist das Intervall $1 \le X \le 9$.
2	In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, die jeweils mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind. Drei Kugeln tragen die Zahl 4, die anderen beiden die von 4 verschiedene Zahl x.
a (2 BE)	Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - 0{,}6^3$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.
Lösung	Da drei Kugeln mit der Zahl 4 beschriftet sind, ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer solchen Kugel gleich 0,6. Die Potenz $0{,}6^3$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das dreifache Ziehen einer 4er-Kugel bei einem 3-stufigen Ziehvorgang mit Zurücklegen. $1 - 0{,}6^3$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis, also für das Ereignis *Weniger als 3-mal Ziehen einer 4er-Kugel bei 3-facher Ziehung mit Zurücklegen.*

<table>
<tr><td></td><td>Werden der Urne zwei Kugeln gleichzeitig zufällig entnommen, so ist der Erwartungswert für die Summe der beiden Zahlen auf den entnommenen Kugeln 12.</td></tr>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td>Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass x größer als 5 ist.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Beim Ziehen von zwei Kugeln kann nur die Summe 8, x+4 und 2x auftreten.
Wenn x ≤ 5 wäre, also 2x ≤ 10 und x + 4 ≤ 9, dann könnte der Erwartungswert (= Mittelwert der Summe auf lange Sicht) keinesfalls größer sein als 10.</td></tr>
<tr><td>c
(4 BE)</td><td>Berechnen Sie die Zahl x.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Das gleichzeitige Ziehen von zwei Kugeln kann realisiert werden als 2-faches Ziehen ohne Zurücklegen – Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln.
<table>
<tr><th>Ereignis</th><th>Summe</th><th>Wahrscheinlichkeit</th><th>Erwartungswert</th></tr>
<tr><td>(4;4)</td><td>8</td><td>$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{24}{10}$</td></tr>
<tr><td>(4;x), (x;4)</td><td>$x+4$</td><td>$2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{10}$</td><td>$\frac{6x+24}{10}$</td></tr>
<tr><td>(x;x)</td><td>$2x$</td><td>$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{2x}{10}$</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td></td><td>1</td><td>$\frac{8x+48}{10}$</td></tr>
</table>
Aus $\frac{8x+48}{10}=12$ ergibt sich $8x+48=120 \Leftrightarrow 8x=72 \Leftrightarrow x=9$
Hinweis: Die Wahrscheinlichkeitsberechnung kann auch mithilfe der Binomialkoeffizienten erfolgen (Teilmengenbestimmung):
$P(zweimal\ 4)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$; $P(je\ einmal\ 4\ bzw.\ x)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$;
$P(zweimal\ x)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$.</td></tr>
</table>

Stochastik – Beispiel 4 (erhöhtes Anforderungsniveau)

<table>
<tr><td>1</td><td>Für ein Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.</td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td>Es gilt $P(X=210)\approx 2{,}2\%$. Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 210 Besitzer einer Jahreskarte das Schwimmbad besuchen, beträgt ca. 2,2 %.</td></tr>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td>Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen.</td></tr>
<tr><td>Lösung

2nd
data</td><td>$P(X>210)=1-P(X\le 210)\approx 1-0{,}784=0{,}216=21{,}6\ \%$



</td></tr>
</table>

c (5 BE)

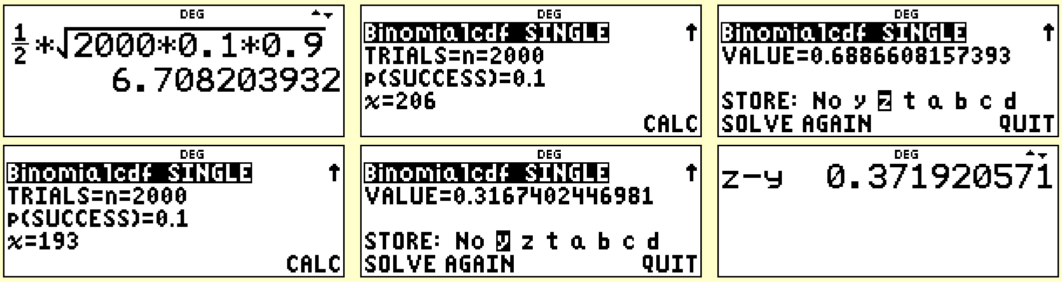
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

Lösung

2nd data

$\mu = 2000 \cdot 0{,}1 = 200$; $\frac{1}{2}\sigma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 6{,}7$

P(194 ≤ X ≤ 206) = P(X ≤ 206) – P(X ≤ 193) ≈ 0,372 = 37,2 %



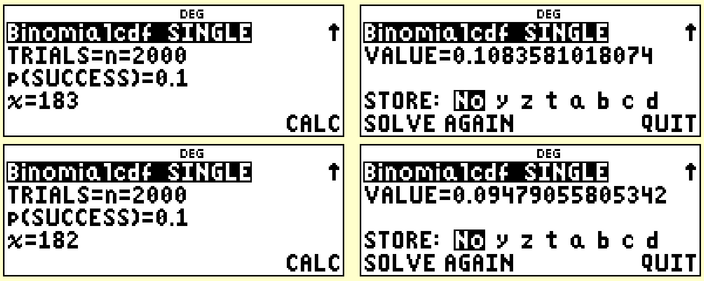
d (3 BE)

Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als 10 % ist.

Lösung

2nd data

Bestimmen des Intervalls durch systematisches Probieren:



P(X ≤ 183) = P(X < 184) ≈ 0,108 > 0,1 ; P(X ≤ 182) = P(X < 183) ≈ 0,095 < 0,1

Die gesuchte Anzahl ist also k = 183.

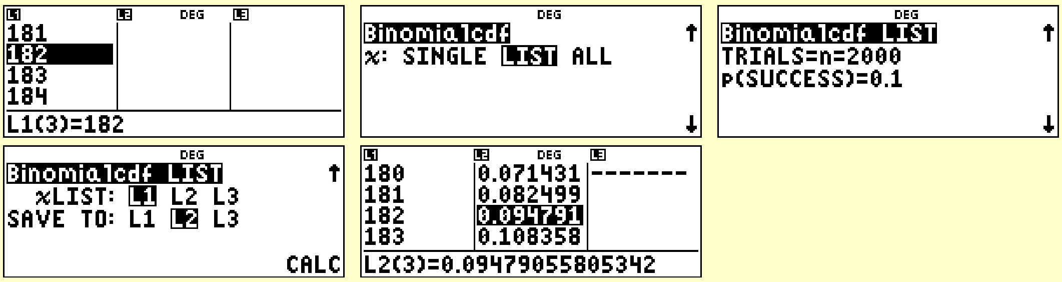
Hinweis

Weniger aufwendig ist das systematische Probieren mithilfe der Listen-Option:

Zunächst gibt man in Liste L1 infrage kommende Werte für die Summationsgrenze ein, dann wechselt man zur kumulierten Binomialverteilung. Hier wählt man die Listenoption. Da für Liste L1 zuvor die benötigten Werte eingeben wurden, kann Liste L2 durch den CALC-Aufruf die Berechnung gestartet werden

data

2nd data



e (2 BE)

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, das durch das abgebildete Baumdiagramm dargestellt wird. Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit $1-(r+s)$ beträgt.

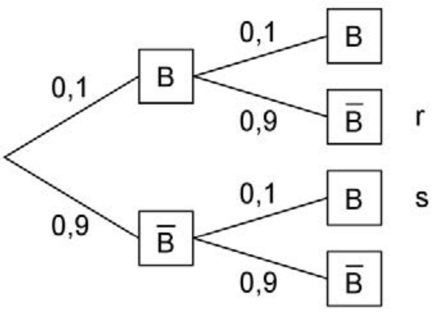


Abb. 1

Lösung

Zufallsexperiment: *Zwei Besitzer von Jahreskarten werden zufällig ausgesucht.*

Ereignis: *Entweder besitzen die beiden ausgewählten Personen eine Jahreskarte oder beide besitzen keine Jahreskarte.*

2

An einem bestimmten Tag ist das Schwimmbad zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Zeitpunkt, zu dem ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad betritt, mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 14,5 und der Standardabweichung 2 beschrieben werden kann. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der Abbildung 2 dargestellt; dabei ist t die seit 00:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden.

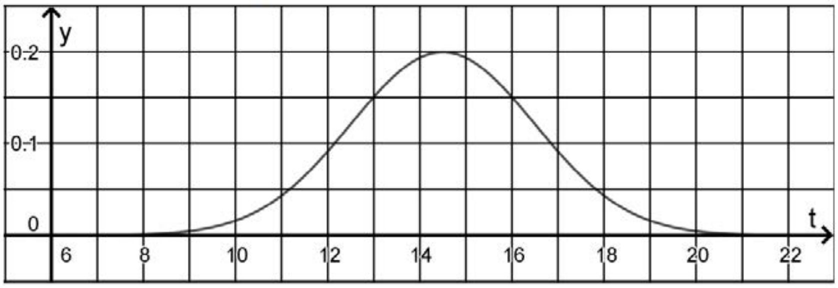


Abb. 2

a (1 BE)

Geben Sie den Zeitraum mit einer Länge von einer Stunde an, für den mit der größten Anzahl eintreffender Badegäste zu rechnen ist.

Lösung

Da das Maximum der symmetrischen Verteilung bei t = 14,5 liegt, ist der gesuchte Zeitraum durch das Intervall [14 ; 15] gegeben.

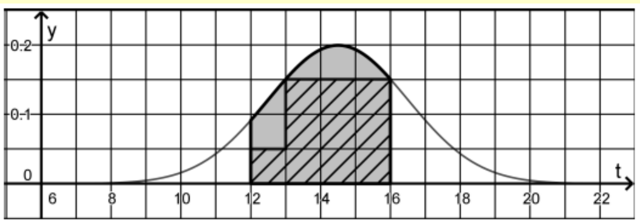
b (4 BE)

Ermitteln Sie grafisch, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr betritt, größer als 50 % ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Lösung

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann mithilfe des Integral über die Dichtefunktion im Intervall [12 ; 16] bestimmt werden (grau unterlegte Fläche).

Durch Abzählen der Kästchen (schraffierte Teilfläche) ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit auf jeden Fall größer ist als der Flächeninhalt von 10 Kästchen, also größer als 10 · 0,05 · 1 = 0,5 ist.



c (3 BE)

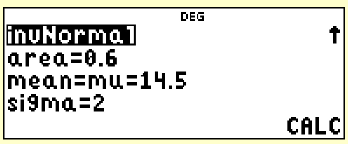
Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad von 2500 Badegästen besucht. Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts zu rechnen ist.

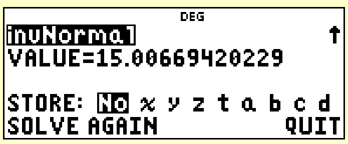
Lösung

Mithilfe der inversen Normalverteilung ergibt sich aus der Eingabe von $\mu = 14{,}5$ und

$\sigma = 2$: $P(7 \le Y \le k) = \int_7^k f(x)dx = \frac{1500}{2500} = 0{,}6 \Leftrightarrow k \approx 15$

2nd data





d (3 BE)	Beurteilen Sie mithilfe einer Rechnung die folgende Argumentation: *Das Schwimmbad ist nur zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Deshalb ist es nicht sinnvoll, das Eintreffen der Badegäste mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße zu beschreiben, die für alle reellen Zahlen definiert ist.*

Lösung
2nd
data
	Eine Beschreibung mithilfe einer Normalverteilung wäre unangemessen, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis außerhalb der Öffnungszeiten nicht vernachlässigt werden kann. Tatsächlich aber ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,1 %. Die Modellierung erscheint also angemessen.
	`Normalcdf` `mean=mu=14.5` `sigma=2`
	`Normalcdf` `LOWERBnd=7` `UPPERBnd=21` `CALC`
	`Normalcdf` `VALUE=0.999334689164` `STORE: No x y z t a b c d` `SOLVE AGAIN QUIT`

Stochastik – Beispiel 5 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1	Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff. Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.
a (2 BE)	Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können.
Lösung ! nCr nPr	Die gesuchte Anzahl ergibt sich aus dem Binomialkoeffizienten $\binom{60}{3} = \frac{60\cdot 59\cdot 58}{3\cdot 2\cdot 1} = 34220$. `60 nCr 3     34220`
b (2 BE)	Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen.
Lösung ! nCr nPr	Ziehen ohne Zurücklegen: $\frac{40}{60}\cdot\frac{39}{59}\cdot\frac{38}{58} \approx 0{,}289 = 28{,}9\,\%$ oder *alternativ* als Stichprobennahme: $\frac{\binom{40}{3}}{\binom{60}{3}} = \frac{\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{60\cdot 59\cdot 58}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{40}{60}\cdot\frac{39}{59}\cdot\frac{38}{58} \approx 0{,}289 = 28{,}9\,\%$ $\frac{40}{60}*\frac{39}{59}*\frac{38}{58}$ `0.288720047` `(40 nCr 3)/(60` `0.288720047`
c (3 BE)	Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen.
Lösung	Bezeichnet man die Anzahl der teilnehmenden Kinder mit *k*, dann beträgt die Anzahl der Erwachsenen also 60 – *k*. Die Anzahl der Eis essenden Kinder ist dann 0,75 · *k*, der Eis essenden Erwachsenen $\frac{1}{3}\cdot(60-k)$. Aus der Angabe, dass 30 Personen ein Eis essen, ergibt sich dann die Gleichung $\frac{3}{4}\cdot k + \frac{1}{3}\cdot(60-k) = 30$, also $9\cdot k + 4\cdot(60-k) = 360 \Leftrightarrow 5\cdot k = 120 \Leftrightarrow k = 24$. An der Fahrt nehmen also 24 Kinder und 36 Erwachsene teil.

2

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

a (1 BE)

Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Lösung

Man kann davon ausgehen, dass die Buchungen ebenso wie die Absagen nicht unabhängig voneinander erfolgen, da meistens kleinere oder größere Gruppen an einer solchen Fahrt teilnehmen möchten.

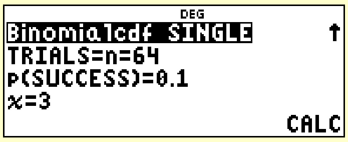
b (3 BE)

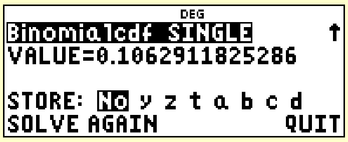
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

Lösung

X: *Anzahl der Personen, die reserviert haben, aber nicht erscheinen* ($n = 64$, $p = 0{,}1$)
Wenn mehr als 60 Personen erscheinen, muss mindestens eine Person abgewiesen werden, d. h. gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X \leq 3$:
$P(X \leq 3) \approx 0{,}106 = 10{,}6\ \%$

2nd data





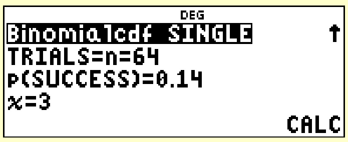
c (4 BE)

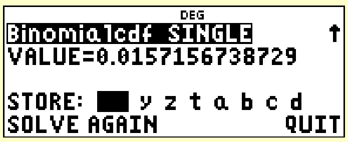
Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

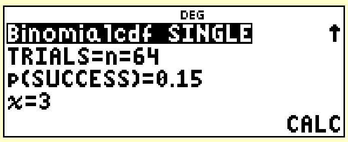
Lösung

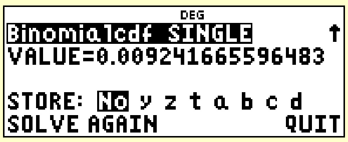
Bestimmung der Erfolgswahrscheinlichkeit p durch systematisches Verändern der Erfolgswahrscheinlichkeit:

2nd data









Die gesuchte Erfolgswahrscheinlichkeit müsste mindestens 15 % betragen.

<table>
<tr><td></td><td>Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der möglichen Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.</td></tr>
<tr><td>d
(5 BE)</td><td>Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel.</td></tr>
<tr><td>Lösung

2nd
data</td><td>

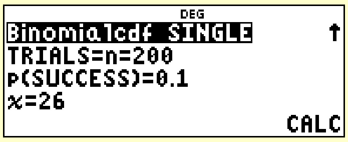
Nullhypothese: $p \leq 0{,}10$

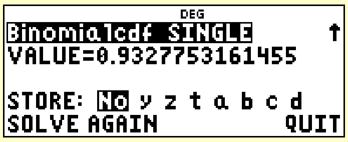
Diese Hypothese wird verworfen, wenn in der Stichprobe vom Umfang $n = 200$ zufällig *extrem viele* Personen sind, die trotz Reservierung nicht erscheinen.

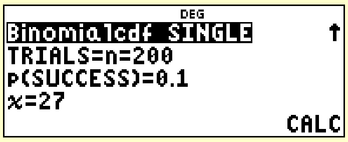
Im Falle von $p = 0{,}1$ kann bei $n = 200$ erwartet werden, dass $\mu = 20$ Personen nicht erscheinen. Durch systematisches Probieren findet man:

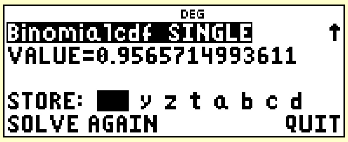
$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 1 - 0{,}9328 = 0{,}0672 > 0{,}05$

$P(X \geq 28) = 1 - P(X \leq 27) \approx 1 - 0{,}9566 = 0{,}0434 < 0{,}05$









Hinweis: Eigentlich gehört die folgende Überlegung ebenfalls zur Lösung der Aufgabe, aber i. A. wird es nicht beanstandet, wenn diese Überlegung fehlt.

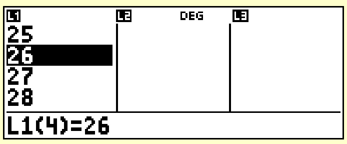
Falls der Anteil der Personen, die nicht zu einer Fahrt erscheinen, sogar kleiner ist als 10 % (also $p < 0{,}1$), dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 28)$ sogar noch kleiner als 0,0434. Wenn in der Stichprobe vom Umfang 200 mindestens 28 nicht zu einer Fahrt erscheinen, dann würde man die Nullhypothese als falsch ansehen und verwerfen, d. h., man würde wegen des zu erwartenden höheren Anteils von nicht erscheinenden Personen (also $p > 0{,}1$) die Anzahl der anzunehmenden Reservierungen heraufsetzen können.

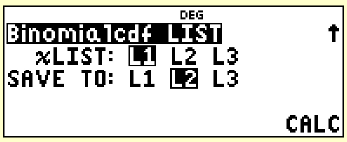
</td></tr>
<tr><td>Hinweis

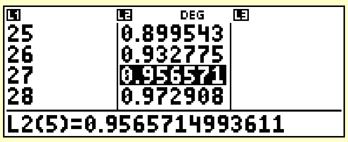
data

2nd
data</td><td>

Das systematische Probieren kann wie in **Beispiel 4** (Teilaufgabe **d**) mithilfe der Listenoption erfolgen:



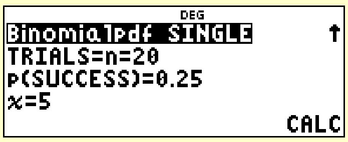
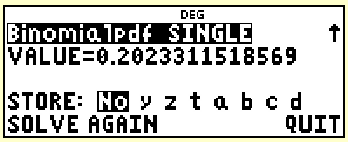




</td></tr>
</table>

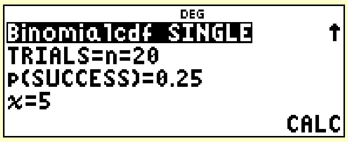
e (3 BE)	Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Lösung	Grundsätzlich sind beide Hypothesen denkbar ($p \leq 0{,}1$ bzw. $p > 0{,}1$): Wenn man die Hypothese $p > 0{,}1$ bestätigt haben möchte, weil man die Vermutung hat, dass der Anteil der nicht erscheinenden Personen beim neuen Reservierungsverfahren größer wird (und man deshalb die maximale Anzahl der Reservierungen heraufsetzen kann), wird man die Hypothese $p \leq 0{,}1$ testen. Wenn man umgekehrt die Vermutung hat, dass durch das neue Reservierungsverfahren der Anteil der nicht erscheinenden Personen höchstens genauso groß ist wie bisher (und man bei der bisherigen Maximalzahl von Vorabreservierungen beibehalten oder sogar absenken sollte), dann wird man die Hypothese $p > 0{,}1$ testen. Bei der Wahl von $p \leq 0{,}1$ als Nullhypothese soll die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich mehr als 64 Reservierungen zuzulassen, gering gehalten werden. Damit steht das Interesse im Vordergrund, möglichst nicht mehr Personen als bisher abweisen zu müssen, die eigentlich einen Platz reserviert hatten.
f (2 BE)	Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.
Lösung	Fehler 2. Art: Eine falsche Hypothese wird nicht als solche erkannt, weil das Stichprobenergebnis zufällig im Annahmebereich der Hypothese liegt, d. h., tatsächlich gilt $p > 0{,}1$ (der Anteil der nicht erscheinenden Personen wird größer), aber man belässt es bei der bisherigen Maximalzahl von 64 Vorabreservierungen, obwohl man diese Anzahl erhöhen könnte. Die Firma müsste dann damit rechnen, dass nicht alle 60 Plätze eingenommen werden und so finanzielle Einbußen entstehen.

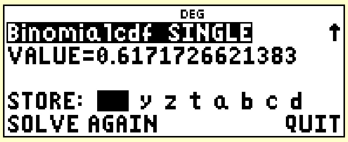
Stochastik – Beispiel 6 (erhöhtes Anforderungsniveau)

1	Ein Unternehmen stellt in großer Stückzahl technische Geräte her. Ein Viertel der hergestellten Geräte ist fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Geräte in einer Stichprobe soll modellhaft als binomialverteilt angenommen werden.
a (5 BE)	20 Geräte werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: A: „Genau fünf Geräte sind fehlerhaft.“ B: „Mehr als fünf Geräte sind fehlerhaft.“ C: „Mindestens drei, aber weniger als acht Geräte sind fehlerhaft.“
Lösung 2nd data	X: *Anzahl der fehlerhaften Geräte* ; $n = 20$; $p = 0{,}25$ $P(A) = P(X = 5) \approx 0{,}202$ Berechnung der Einzel-Wahrscheinlichkeit 

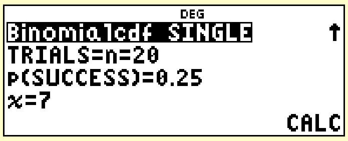
<table>
<tr><td></td><td>

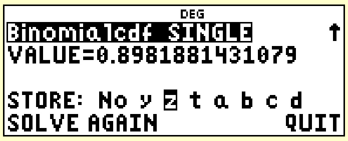
P(B) = P(X > 5) = 1 – P(X ≤ 5) ≈ 1 – 0,617 ≈ 0,383

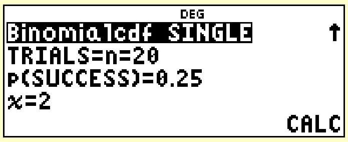


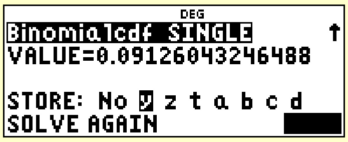


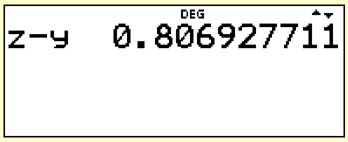
P(C) = P(3 ≤ X < 8) = P(X ≤ 7) – P(X ≤ 2) ≈ 0,898 – 0,091 = 0,807 = 80,7%











</td></tr>
<tr><td>

b
(3 BE)

</td><td>

Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1-\left(0{,}25^8+0{,}75^8\right)$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

</td></tr>
<tr><td>

Lösung

</td><td>

Zufallsexperiment: Acht Geräte werden zufällig ausgesucht.
Ereignis: Mindestens ein Gerät ist in Ordnung und mindestens ein Gerät ist fehlerhaft (= Gegenereignis von Alle Geräte sind in Ordnung oder alle Geräte sind fehlerhaft)

</td></tr>
<tr><td>

c
(4 BE)

</td><td>

Von den fehlerhaften Geräten werden 80 % so nachbearbeitet, dass sie ebenfalls fehlerfrei sind. Alle fehlerfreien Geräte werden ausgeliefert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes ausgeliefertes Gerät nachbearbeitet wurde.

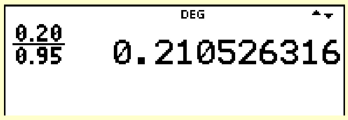
</td></tr>
<tr><td>

Lösung

</td><td>

25 % sind fehlerhaft, von diesen werden 80 % nachbearbeitet, also werden 20 % nachträglich brauchbar, zusammen sind das dann 95 % brauchbare Geräte.

Der Anteil der nachträglich brauchbar gemachten Geräte an allen Geräten, die ausgeliefert werden können, beträgt also $\frac{0{,}20}{0{,}95}\approx 0{,}211 = 21{,}1\,\%$.



</td></tr>
<tr><td></td><td>

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

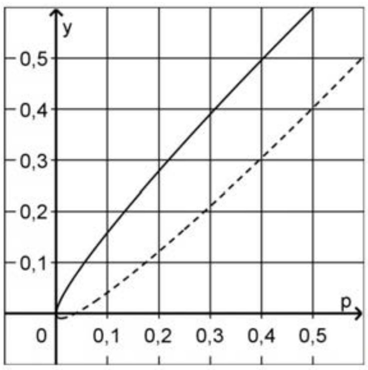
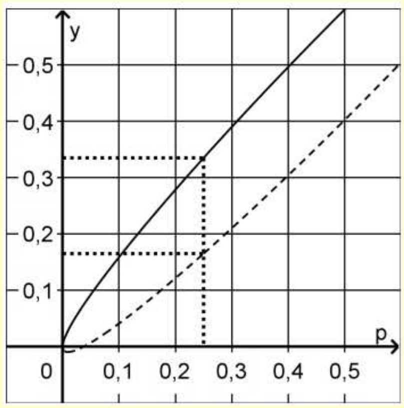
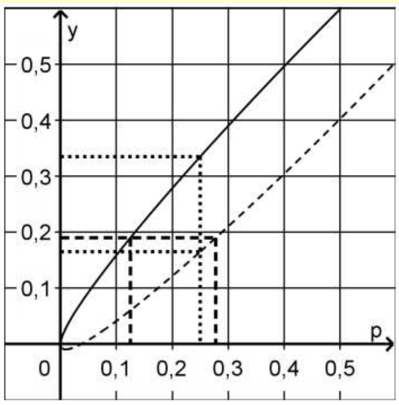


Abb. 1

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>d
(3 BE)</td><td>Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>An der Grafik kann man ablesen, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$ beträgt, dann liegen signifikante Abweichungen nach unten bzw. nach oben liegen, wenn weniger als 17 oder mehr als 33 fehlerhafte Geräte in der Stichprobe gefunden würden.

</td></tr>
<tr><td>e
(3 BE)</td><td>Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

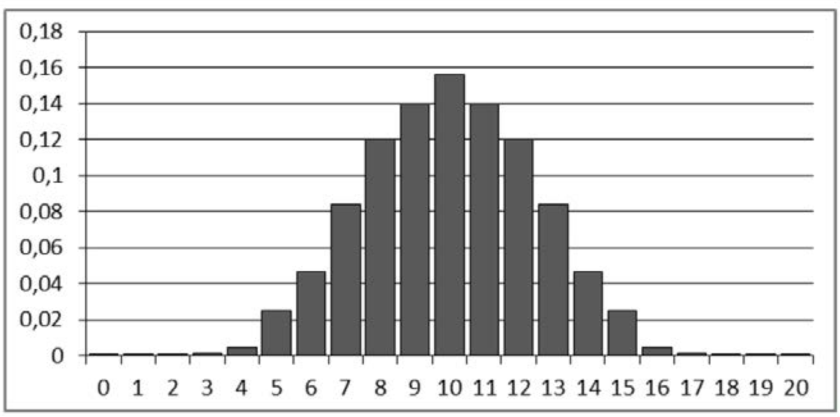
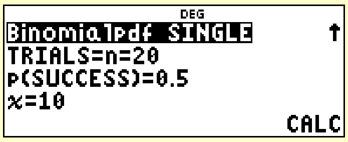
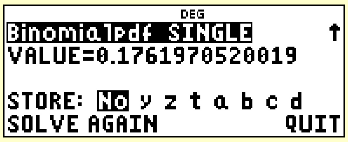
Umgekehrt kann man näherungsweise ablesen, dass das Stichprobenergebnis X = 19 verträglich ist mit allen Erfolgswahrscheinlichkeiten p (= zugrundeliegende Anteile nicht brauchbarer Geräte), die zwischen 13 % und 28 % liegen.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Eine binomialverteilte Zufallsgröße Y gibt für eine Trefferwahrscheinlichkeit p mit $0 \le p \le 1$ die Anzahl der Treffer bei 20 Versuchen an.</td></tr>
<tr><td>a
(3 BE)</td><td>Abbildung 2 zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße mit der Wertemenge $\{0;1;2;\ldots;20\}$.


Abb. 2
Begründen Sie, dass es sich nicht um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y handeln kann.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Lösung

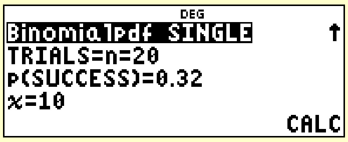
2nd
data</td>
<td>Da die Verteilung symmetrisch ist, wäre also die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$.
Die Wahrscheinlichkeit $P(X = 10) \approx 0{,}176$ ist aber größer als der ablesbare Wert.

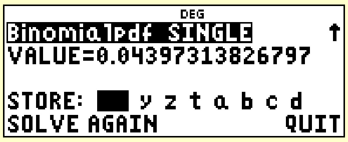


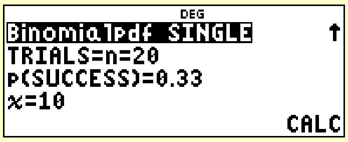


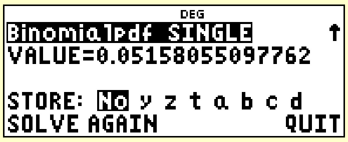
</td>
</tr>
<tr>
<td>b
(4 BE)</td>
<td>Bestimmen Sie diejenigen Werte von p, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y den Wert 10 annimmt, 4,7 % ist.</td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung

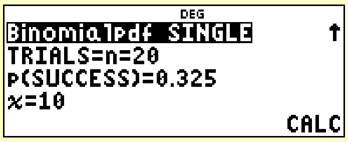
2nd
data</td>
<td>Durch systematisches Probieren kann man den Wert von p auf drei Stellen genau bestimmen:

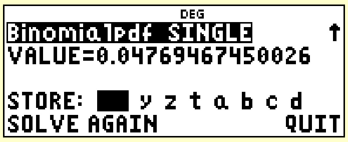


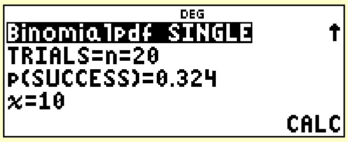


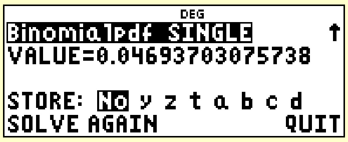












Aus Symmetriegründen ergibt sich außer $p \approx 0{,}324$ auch $p \approx 0{,}676$ als mögliche Erfolgswahrscheinlichkeit.</td>
</tr>
</table>

Nutzung der Tasten des TI-30X Plus MathPrint™ und deren Funktionalitäten (Auswahl)

Taste	Funktionalität
[2nd]	Zweitbelegung einer Taste wird aufgerufen
[mode]	Festlegung des Modus: u. a. in Grad (DEG) oder Bogenmaß (RAD), Festlegen der Zahlennotation, Festlegen des Zahlensystems, Auf dem Display sind zwei Darstellungsformen möglich: CLASSIC (Zeichen nebeneinander) oder MATHPRINT (übliche mathematische Notation, erkennbar am ⁚⁚-Zeichen als Platzhalter für eine erwartete Eingabe)
[2nd] [mode] = quit	Verlassen der aktuellen Ebene
[clear]	Löschen der letzten Eingabe links vom Cursor
[2nd] [delete] = insert	Einfügen eines Zeichens (ohne „insert“ wird ein Zeichen überschrieben)
[clear]	Löschen des zuletzt eingegebenen Terms
[math]	Math-Option: Umwandeln von Brüchen, kgV, ggT, Primfaktorzerlegung, Summe von Termen, Produkt von Termen; weitere Optionen: numerisch, Umrechnung / Umwandeln von Winkelangaben
[data]	Optionen: Möglichkeit der Eingabe von drei Listen mit jeweils max. 42 Zahlen, Definition von Formeln für die Berechnung der Zahlen für die Listen
[2nd] [data] = stat-reg/distr	Optionen: STAT-REG: Auswertung statistischer Daten einschl. Regression, DISTR: Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Normal-, Binomial, Poisson-Vert.)
[table]	Optionen: *f(*: Möglichkeit, einen bereits definierten Funktionsterm in einem Term zu verwenden, *Edit function*: Eingabe eines Funktionsterms und Berechnen der Wertetabelle einer Funktion
[2nd] [table] = expr-eval	nach Eingabe eines Terms und der Eingabe eines einzusetzenden x-Werts erfolgt die Berechnung des Funktionswerts
[2nd] [×] = set op [2nd] [)] = op	Möglichkeit, eine Abfolge von Operationen zu definieren Aufruf dieser Folge von Operationen
[! nCr nPr]	mehrfach belegte Taste: nacheinander Fakultät, nCr (= Binomialkoeffizient), nPr (Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge)
[2nd] [! nCr nPr] = random	Erzeugung von Zufallszahlen – Optionen: „*rand*“ = Zufallszahl aus dem Intervall [0 ; 1[oder „*random*(a,b)“ = ganzzahlig (aus der Menge {a, …, b})
[$x^{\square}$] [2nd] [$x^{\square}$] = $\sqrt[n]{x}$	Eingabe einer Potenz, Berechnen der n-ten Wurzel
[$\frac{\square}{\square}$] [2nd] [$\frac{\square}{\square}$]	Möglichkeit der getrennten Eingabe von Zähler und Nenner bzw. Kehrwert
[sin sin⁻¹] [cos cos⁻¹] [tan tan⁻¹]	mehrfach belegte Tasten: Berechnen von Funktionswerten trigonometrischer Funktionen und deren Umkehrung (zu einem Funktionswert den zugehörigen x-Wert berechnen) sowie der Hyperbelfunktionen sinh, cosh, tanh
[ln log]	mehrfach belegte Taste: nacheinander ln, log (Basis 10), log (bel. Basis)
[$e^{\square}$ $10^{\square}$]	mehrfach belegte Taste: nacheinander Potenzen zur Basis e bzw. 10
[π e i]	mehrfach belegte Taste: nacheinander π, e, i
[2nd] [π e i] = complex	Operationen mit komplexen Zahlen
[x yzt abcd]	Wahl der Variable (8 Möglichkeiten: x, y, z, t, a, b, c, d)
[sto→] [2nd] [sto→] = recall [2nd] [x yzt abcd] = clear var	Speichern einer Zahl (Angabe einer Variablen notwendig) Aufruf einer gespeicherten Zahl Löschen aller gespeicherter Zahlen
[EE]	Taste zur direkten Eingabe einer Zahl in wissenschaftlicher Notation
[◂▸≈]	Umwandeln eines Bruchs in eine Dezimalzahl und umgekehrt
[on] [2nd] [on] = off	Einschalten bzw. Ausschalten des WTR
[2nd] [0] = reset	Löschen aller gespeicherter Daten und Terme

Leistungsfähige Emulator-Software

Die TI-SmartView™ Emulator-Software für TI-MathPrint™ unterstützt die Visualisierung im Unterricht, z.B. in Kombination mit einem interaktiven Whiteboard.
Probieren Sie es aus. Die kostenlose Test-Version finden Sie auf den TI Webseiten, Rubrik „Downloads“.

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zum TI-30X Plus MathPrint™.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie unsere Kennenlernangebote speziell für Lehrkräfte und Schulen auf den TI Webseiten, Rubrik „Alles für die Schule“.

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten.

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien oder einer Lehrerfortbildung interessiert?
Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS
education.ti.com/csc

education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net