Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

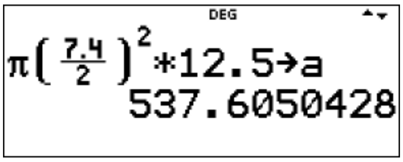
Extremwertaufgaben mit TI-30 X Pro MathPrint lösen

Extremwertaufgaben gehören zu den Klassikern im Analysisunterricht der gymnasialen Oberstufe. Die Möglichkeiten, die der TI-30 X Pro MathPrint[TM] zum Tabellieren von Funktionswerten, zur numerischen Bestimmung von Ableitungen und zum Lösen von Gleichungen anbietet, erweitern das Instrumentarium der Schülerinnen und Schüler. Vor allem die Tabellierfunktion verschafft auch in der Mittelstufe beachtliche Möglichkeiten, über Extremwertaufgaben nachzudenken, ohne dass das Ableitungskalkül zur Verfügung steht.

Beispiel:
Eine zylinderförmige Büchse hat eine Höhe von 12,5 cm, ihr Durchmesser beträgt 7,4cm.

a) Berechnen Sie das Volumen der Büchse in cm³.

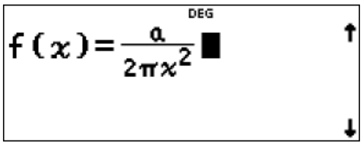
Wir berechnen das Volumen mit dem TI-30 X Pro und speichern den Wert unter der Variablen a ab.
Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$:

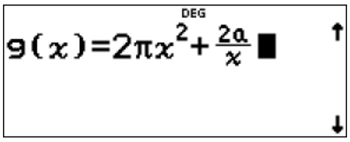


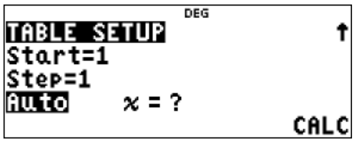
b) Untersuchen Sie, ob der Materialverbrauch (der gesamte Oberflächeninhalt) bei diesen Abmessungen und für das damit berechnete Volumen minimal ist.

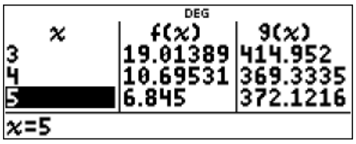
Elementare Näherungslösung (Klassenstufe 8 bis 10):

Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Longrightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$
Oberflächeninhalt:
$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Longrightarrow A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{V}{\pi \cdot r^2} \Longrightarrow A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2 \cdot V}{r}$
Wir definieren die Höhe als Funktion f(x): $f(x) = \frac{a}{2\pi \cdot x^2}$.
Der Oberflächeninhalt A wird als Funktion g(x) durch $g(x) = 2\pi \cdot x^2 + \frac{2a}{x}$ gespeichert
Die Wertetabelle wird durchgemustert, bis g(x) ein Minimum annimmt.
Das ist zwischen x = 4 und x = 5 der Fall.

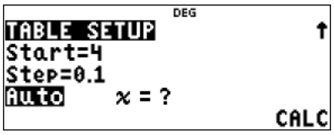


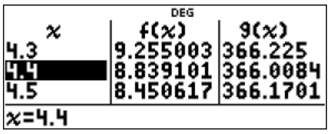






Wir verringern im Intervall [4; 5] die Schrittweite auf 0,1 und blättern die Wertetabelle in diesem Intervall erneut durch.
Das Minimum für g(x) liegt bei $x \approx 4{,}4$ und f(4,4) hat den Wert $f(4{,}4) \approx 8{,}84$.





Die minimale Oberfläche wird bei einem Volumen $V \approx 537{,}6\ cm^3$ näherungsweise erreicht für einen Radius von $r \approx 4{,}4\ cm$ und einer Höhe von $h \approx 8{,}84\ cm$.
Der minimale Oberflächeninhalt beträgt ca. 366,0 cm².

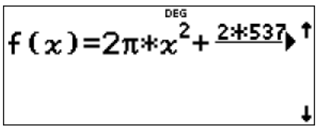
Die reale Büchse weicht von diesen optimalen Werten ab.
Offen bleibt bei diesem Vorgehen weitgehend die Suche nach weiteren Lösungen.

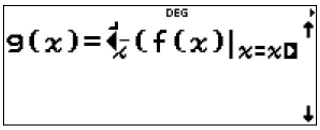
Lösung mit Differentialrechnung (gymnasiale Oberstufe):

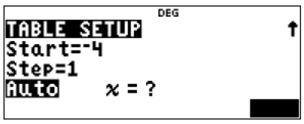
Man kann zunächst wieder mit einer Wertetabelle beginnen.

Unter f(x) wird die Funktion $A(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2 \cdot V}{r}$ (mit r = x und V = a) definiert.

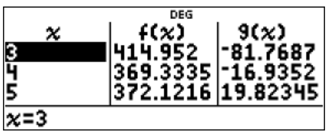
Unter g(x) werden die 1. Ableitungen von f(x) (mit [2nd] [ln log] an jeder Stelle x erzeugt) in der Tabelle angezeigt:



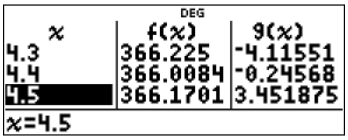




Eingabe von g(x): [2nd] [ln log] [table] [2] [x yzt abcd] ▶ ▶ [x yzt abcd]

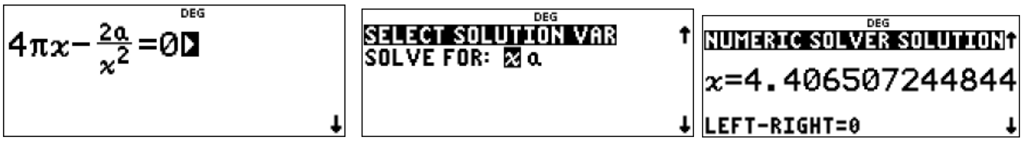


Wir erkennen, dass zwischen x = 4 und x = 5 das Vorzeichen der 1. Ableitung von Minus nach Plus wechselt. Also könnte in diesem Intervall ein lokales Minimum liegen.
Mit einer Verfeinerung der Schrittweite lässt sich die Minimumstelle genauer bestimmen:

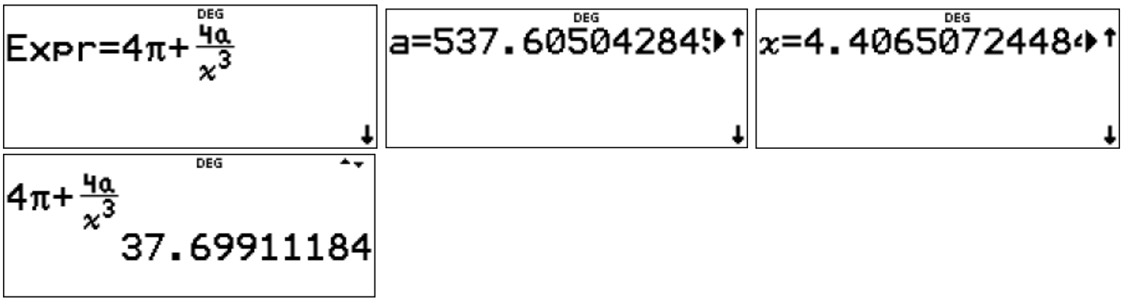


Man kann folgende Näherungswerte ablesen: $x = r \approx 4{,}4\ cm; A \approx 366\ cm^2$.
Bei Bedarf lässt sich die Verfeinerung des Zielintervalls fortsetzen.

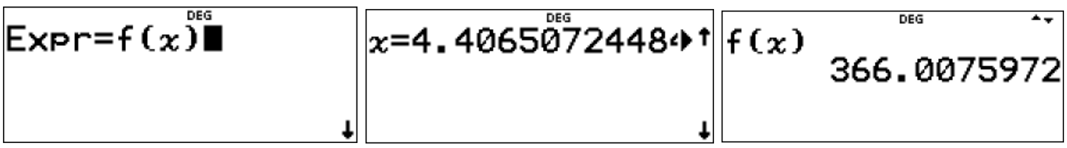
Etwas genauer wird es mit der näherungsweisen Lösung der Gleichung
$A'(r) = 4\pi \cdot r - \frac{2V}{r^2} = 0$.
Die Gleichung der Ableitungsfunktion muss händisch ermittelt werden:
$A(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2 \cdot V}{r}$; $A'(r) = 4\pi \cdot r - \frac{2V}{r^2}$; $A''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$
Mit *num-solve* wird der numerische Gleichungslöser geöffnet und die Gleichung
$4\pi \cdot x - \frac{2a}{x^2} = 0$ eingegeben. Da in der Gleichung zwei Variablen auftauchen, fragt der Rechner, nach welcher Variablen die Gleichung gelöst werden soll.



Die Nullstelle von $A'(r)$ ist $r \approx 4{,}4\ cm$.
Für die Berechnung des Wertes der 2. Ableitung an der berechneten Stelle wird *expr-eval* genutzt. Der Term $4\pi + \frac{4V}{r^3}$ der 2. Ableitung wird in *expr-eval* eingegeben, wobei wieder r = x und V = a zu berücksichtigen sind. Auch der x-Wert für das Minimum ist noch im Speicher verfügbar und wird bei der Rechnung automatisch aufgerufen und verwendet.



Für die 2. Ableitung gilt: $A''(4{,}4) \approx 37{,}7 > 0$. Damit ist das lokale Minimum bestätigt. Das lokale Minimum der Oberfläche ist ca. 366 cm².Auch hierfür kann *expr-eval* Verwendung finden:



Aufgaben:

1. Welches unter allen Rechtecken mit festem Flächeninhalt (z. B. 50 FE) hat den kleinsten Umfang?

2. Ein quaderförmiger Behälter soll 100 dm^3 fassen, die Breite soll dabei genau halb so groß sein wie die Länge. Ermittle die Maße eines solchen Behälters, so dass der Materialverbrauch möglichst gering wird.

3. Sieben Klassenkameraden wohnen in einer Siedlung von Einfamilienhäusern. Alle Grundstücke haben genau dieselbe Rechteckform und Größe und liegen aufeinanderfolgend an derselben Straße. Die Hausnummern sind fortlaufend von 1 bis 30 durchnummeriert und die Freunde wohnen in den Häusern mit den Nummern 1, 4, 8, 9, 16, 22, 27. Wo sollen sich die Freunde zu treffen, wenn der Weg, den sie von zuhause zum Treffpunkt insgesamt zurücklegen müssen, möglichst klein sein soll?

4. Einer Kugel soll ein Rotationszylinder einbeschrieben werden.

   Untersuchen Sie, für welchen Grundkreisdurchmesser d des Zylinders und welche Höhe h der Rotationszylinder eine maximale Gesamtoberfläche besitzt.

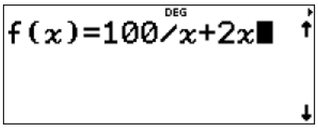
   a) Bestimmen Sie durch grafische Darstellung eine Näherungslösung.
   b) Ermitteln Sie für die Maximumstelle einen genaueren Näherungswert mithilfe des numerischen Gleichungslösers.
   c) Begründen Sie, dass im Maximalfall der Achsenschnitt des Zylinders ein „Goldenes Rechteck“ ist. Recherchieren Sie ggf. diesen Begriff im Internet.

Lösungen:

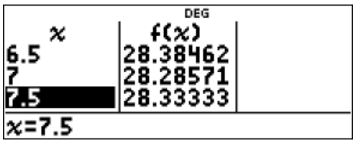
Aufgabe 1:

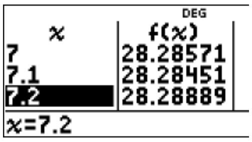
Klassen 8 – 10:

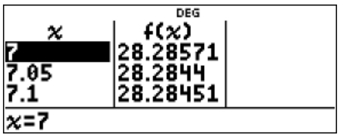
Es gelten die Bedingungen $A = a \cdot b = 50 \Rightarrow a = \frac{50}{b}$ und
$u = 2a + 2b \Rightarrow u(b) = 2 \cdot \frac{50}{b} + 2b$.
Unter f(x) wird die Funktion $u(b) = \frac{100}{b} + 2b$ mit x = b gespeichert.



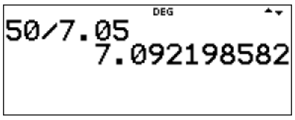
Die Wertetabelle wird durchgemustert und verfeinert bis jeweils f(x) ein Minimum annimmt.







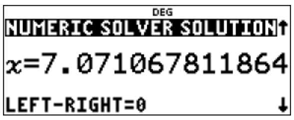
Als Minimum ermittelt man b $\approx 7{,}05$ und damit für $a \approx 7{,}09$.



Spätestens jetzt vermutet man, dass das Quadrat die gesuchte Figur ist und kann als noch besseren Wert a = b = $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ angeben.

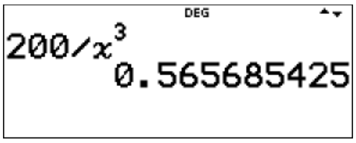
In der **gymnasialen Oberstufe** kann man als Lösungsvariante die Bestimmung der notwendigen und hinreichenden Bedingung überprüfen.
Es gilt $f'(x) = 2 - \frac{100}{x^2}$ und $f''(x) = \frac{200}{x^3}$.

Die Gleichungen der Ableitungsfunktionen müssen händisch ermittelt werden.
Mit *num-solve* wird der numerische Gleichungslöser geöffnet und die Gleichung
$2 - \frac{100}{x^2} = 0$ eingegeben.



Die Nullstelle von $f'(x)$ ist $x \approx 7{,}07\ cm$.
Für die Berechnung des Wertes der 2. Ableitung an der berechneten Stelle wird *expr-eval* genutzt. Der Term $\frac{200}{x^3}$ der 2. Ableitung wird in *expr-eval* eingegeben, wobei der x-Wert für

das Minimum noch im Speicher verfügbar ist und bei der Rechnung automatisch aufgerufen und verwendet wird.



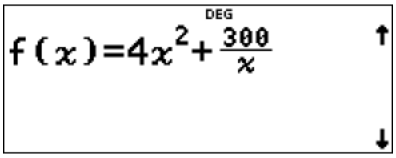
Für die 2. Ableitung gilt: $f''(7{,}07) \approx 0{,}57 > 0$. Damit ist das lokale Minimum bestätigt.
Auch eine inhaltliche Begründung ist hier denkbar:

Wenn x > 0 ist, dann ist auch $f''(x) = \frac{200}{x^3} > 0$.

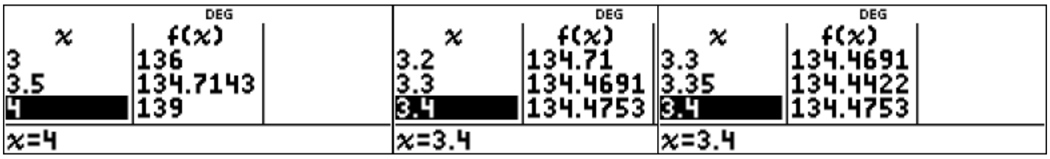
Aufgabe 2:

Es gilt die Nebenbedingung $V = l \cdot b \cdot h = 100$ bzw. $100 = 2b \cdot b \cdot h$ und damit z. B. $h = \frac{50}{b^2}$.
Die Formel für die Oberfläche $A = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$ ergibt sich dann zu
$A(b) = 2 \cdot \left(2b^2 + \frac{100}{b} + \frac{50}{b}\right) = 4b^2 + \frac{300}{b}$.

Klassen 8 – 10:
Unter f(x) wird die Funktion $f(x) = 4x^2 + \frac{300}{x}$ gespeichert.

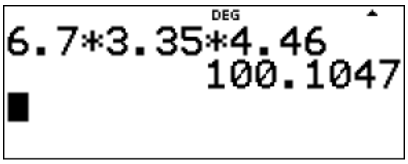


Die Wertetabelle wird durchgemustert und verfeinert bis f(x) ein Minimum annimmt:



Als Minimum ermittelt man x ≈ 3,35.
Dies bedeutet für den Quader: l =6,7, b = 3,35 und h = 4,46.

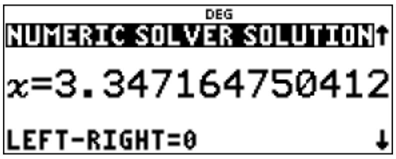
Eine Kontrolle bestätigt in etwa den Wert für das Volumen.



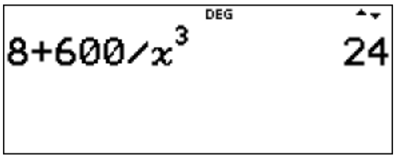
In der **gymnasialen Oberstufe** kann man als Lösungsvariante die Bestimmung der notwendigen und hinreichenden Bedingung überprüfen.

Es gilt $f'(x) = 8x - \frac{300}{x^2}$ und $f''(x) = 8 + \frac{600}{x^3}$.

Die Gleichungen der Ableitungsfunktionen müssen händisch ermittelt werden.
Mit *num-solve* wird der numerische Gleichungslöser geöffnet und die Gleichung
$8x - \frac{300}{x^2} = 0$ eingegeben.



Die Nullstelle von $f'(x)$ ist $x \approx 3{,}35$.
Für die Berechnung des Wertes der 2. Ableitung an der berechneten Stelle wird *expr-eval* genutzt. Der Term 8+ $\frac{600}{x^3}$ der 2. Ableitung wird in *expr-eval* eingegeben, wobei der x-Wert für das Minimum noch im Speicher verfügbar ist und bei der Rechnung automatisch aufgerufen und verwendet wird.

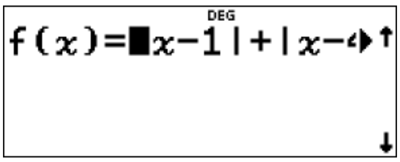


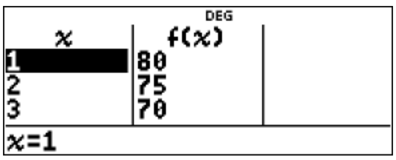
Für die 2. Ableitung gilt: $f''(3{,}34) \approx 24 > 0$.
Damit ist das lokale Minimum bestätigt.

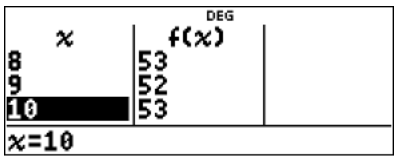
Aufgabe 3:

Der unbekannte Treffpunkt wird mit x bezeichnet.
Die Gleichung f(x) = |x-1| + |x-4|+|x-8| + |x-9| +|x-16| + |x-22| + |x-27| wird in der Tabelle als f(x) gespeichert.
(Der absolute Betrag wird über *math* – *Num* - *abs* eingegeben.)

Die Wertetabelle wird durchgemustert.

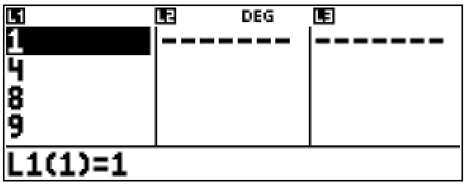


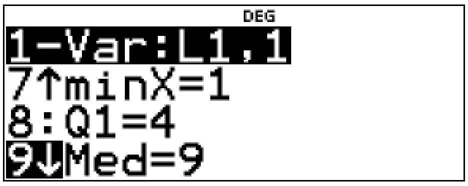




Man erkennt, dass als Treffpunkt die Hausnummer 9 gewählt werden muss.

Anmerkung: Dies ist der Median der gegebenen Werte.

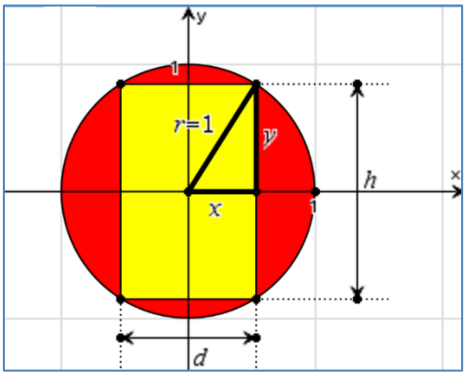




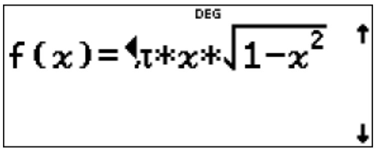
Aufgabe 4:

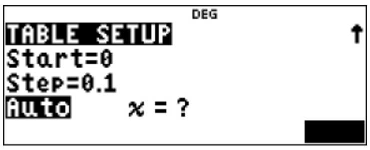
Lösung zu a:

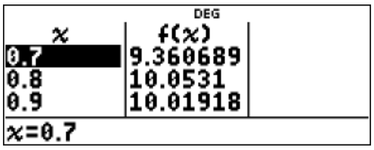
Wir wählen wegen der Ähnlichkeit aller Kugeln o. B. d. A. als Kugelradius r = 1.
Dem Achsenschnitt lassen sich folgende Gleichungen entnehmen:
$d = 2x;\ h = 2y;\ x^2 + y^2 = 1^2$
Die Gesamtoberfläche A des Zylinders setzt sich aus den kreisförmigen Grund- und Deckflächen sowie dem Mantel des Zylinders zusammen.
$A(d,h) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \pi \cdot d \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} + \pi \cdot d \cdot h$
$A(x) = 2\pi \cdot x^2 + 4\pi \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2}$ mit 0 < x < 1



Grafische Darstellung der Funktion A(x):
Funktionsgleichung unter table eintragen und definieren.
Im TABLE SETUP *Start* = 0 und Schrittweite *Step* = 0,1 festlegen. Werte ablesen.



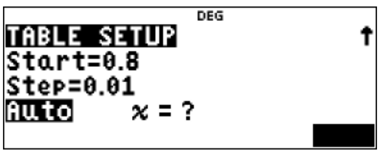


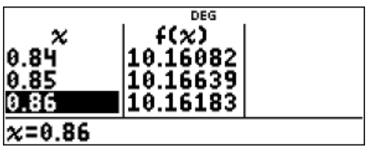


Wertetabelle:

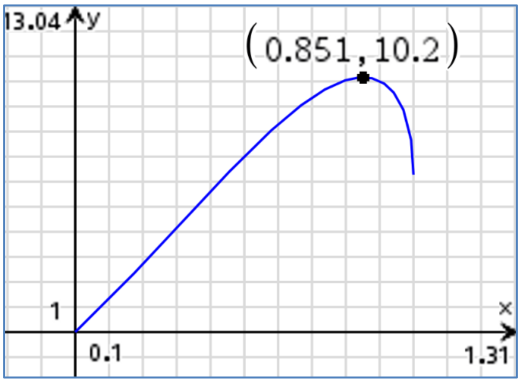
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
A(x)	0	1,3	2,7	4,2	5,6	7,0	8,3	9,4	10,1	10,0	6,3

Zwischen x = 0,8 und x = 0,9 scheint ein Maximum der Funktionswerte zu liegen. Durch eine kleinere Schrittweit im Intervall [0,8; 0,9] kann man diese Stelle weiter eingrenzen:





Das Maximum der Funktionswerte liegt in der Nähe von x = 0,85 und beträgt etwa 10,17 FE.

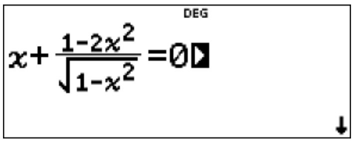


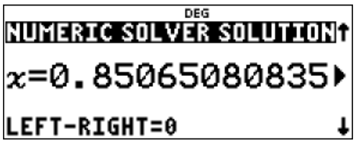
Zeichnung erstellt mit TI-Nspire CX CAS.

Lösung zu b:

Ableitung händisch bilden: $A'(x) = 4\pi \cdot \left[x + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

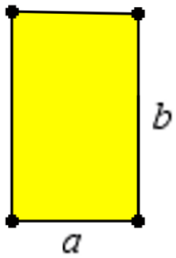
Für die Lösung muss nur der Faktor $x + \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ berücksichtigt werden.





Lösung zu c:

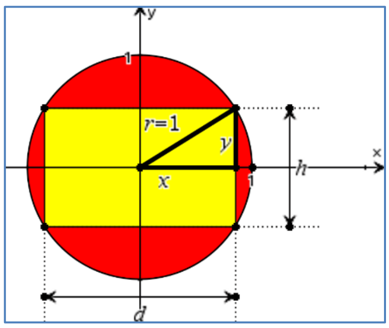
Zum Begriff „Goldenes Rechteck“:
„Seit der Antike haben sich Künstler und Architekten gefragt, welche Proportionen als schön empfunden werden. Besonders ästhetisch fand man ein Rechteck, bei dem sich die kürzere Seite zur längeren so verhält wie die längere zur Summe der beiden Seiten – das "Goldene Rechteck". Dieses Seitenverhältnis nannte man "Goldenes Verhältnis" (ratio aurea) oder "Goldenen Schnitt" (sectio aurea):
a : b = b : (a + b)…“

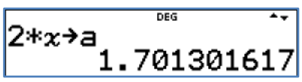


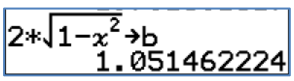
(Quelle: ttp://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/golds.htm)

Für den hier betrachteten Zusammenhang müsste also gelten: $\frac{d}{h} = \frac{d+h}{d}$

Mit $d = 2x$; $h = 2y = 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$ und mit dem oben berechneten Wert für x, der noch mit allen Nachkommastellen im Rechner gespeichert ist, werden d und h berechnet und unter den Variablen a bzw. b im Rechner gespeichert.

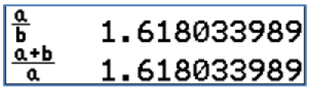






Es müsste für den Goldenen Schnitt gelten: $\frac{d}{h} = \frac{d+h}{d}$.

Unter Nutzung der gespeicherten Werte ergibt sich für beide Quotienten ein und derselbe Näherungswert von 1,618033989. Damit ist die Aussage zum Goldenen Schnitt zumindest näherungsweise bestätigt.



Autoren:
Dr. Hubert Langlotz
Dr. Wilfried Zappe