

# Die Nutzung der TI-Nspire™ CAS App für iPad® an Beispielen erklärt

## Kapitel 16: Augensummen

### Aufgabe 1

Schreiben Sie eine Funktion „augensumme(w)“, die eine zufällige Augensumme beim Werfen von w Würfeln oder beim w-fachen Werfen eines Würfels ermittelt. Speichern Sie die Funktion im Bibliotheksdokument ‚ags‘.

Hinweis:

Zur Ermittlung einer zufälligen Augensumme beim Werfen von w Würfeln ist es eigentlich nicht notwendig eine Funktion zu programmieren. Es genügen z.B. folgende Eingaben:

```
w:=3 ▶ 3
sum(randInt(1,6,w)) ▶ 9
```


Der eigentliche Grund für diese Aufgabe ist es an einem einfachen Beispiel zu zeigen, wie eine Bibliothek eingerichtet werden kann und Bibliotheksobjekte genutzt werden können.

### Lösung

```


1.1
RAD
augensumme 7/7
Define LibPub augensumme(w)=
Func
©augensumme(Anzahl der Würfe)
Local summe,k
summe:=0
For k,1,w
summe:=summe+randInt(1,6)
EndFor
Return summe
EndFunc

```


Der auf dem iPad vorhandene Ordner ‚TI-Nspire CAS‘ enthält den Ordner ‚MyLib‘. Öffnen Sie den Ordner ‚MyLib‘ und erstellen Sie ein neues Dokument. Wählen Sie ‚Calculator‘. Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘  und wählen Sie ‚Funktionen und Programme‘, ‚Programmeditor‘, ‚Neu...‘ und geben Sie das Folgende ein:

Name: augensumme  
 Typ: Funktion  
 Bibliothekszugriff: PubLib (in Katalog anzeigen)


Gehen Sie zurück zum Menü ‚Neu...‘ und schließen Sie die Eingabe mit ‚OK‘. Ergänzen Sie ‚augensumme()‘ zu ‚augensumme(w)‘.


Tippen Sie das Eingabefeld unter ‚Func‘ an, öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘  und wählen Sie ‚Aktionen‘ und ‚Kommentar Ein/Aus‘.

Geben Sie als Kommentar ‚augensumme(Anzahl der Würfe)‘ ein und beenden Sie die Eingabe mit ‚enter‘.

Öffnen Sie das Menü ‚Aktionen‘  und kehren Sie zurück zum Menü ‚Werkzeuge‘. Wählen Sie ‚Variable definieren‘ und ‚Local‘. Geben Sie die Variablen  $k$  und  $\text{summe}$  durch ein Komma getrennt ein. Beenden Sie auch diese Eingabe und auch die nächste Eingabe mit ‚enter‘. Geben Sie ‚ $\text{summe}:=0$ ‘ ein.

Öffnen Sie das Menü ‚Variable definieren‘ . Gehen Sie zum Menü ‚Werkzeuge‘ zurück. Wählen Sie ‚Steuerung‘ und ‚For...EndFor‘. Ergänzen Sie die Eingabe zu ‚For  $k,1,w$ ‘.


Tippen Sie auf die Pfeiltaste  und geben Sie ‚ $\text{summe}:=\text{summe}+\text{randInt}(1,6)$ ‘ ein.

Die Funktion ‚randInt‘ erhalten Sie über ‚Hilfsfunktionen‘  und ‚Katalog‘.

Geben Sie in die Suche ‚ra...‘ ein, wählen Sie ‚randint(‘ und ‚Fertig‘.

Ergänzen Sie die Eingabe wie im Bild ersichtlich.

Tippen Sie auf die Pfeiltaste  und dann auf ‚enter‘.


Öffnen Sie das Menü ‚Steuerung‘  und gehen Sie zurück zum Menü ‚Werkzeuge‘.

Wählen Sie ‚Übertragungen‘, ‚Return‘ und geben Sie ‚ $\text{summe}$ ‘ ein.

Öffnen Sie das Menü ‚Übertragungen‘ . Kehren Sie zum Werkzeuge-Menü zurück.

Wählen Sie ‚Syntax überprüfen & speichern‘, dann ‚Syntax prüfen und speichern (Check Syntax & Store)‘.

Tippen Sie auf die linke Hälfte des geteilten Arbeitsbereichs.

Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘  und wählen Sie ‚Aktionen‘, ‚Bibliothek‘ und ‚Bibliotheken aktualisieren‘.

Kehren Sie zurück zum Hauptmenü. Ändern Sie den Dokumentnamen in ‚ags‘.

Erläuterung der Funktion ‚ $\text{augensumme}(w)$ ‘:

Die von der Funktion zurückgegebene ‚ $\text{summe}$ ‘ ist die Augensumme. Sie wird anfangs auf Null gesetzt und beim  $w$ -maligen Durchlaufen der Zählschleife jeweils um eine weitere zufällig ermittelte Augenzahl erhöht.

## Aufgabe 2

Ein Zufallsversuch soll 2500-mal wiederholt werden.

Der Versuch besteht darin, einen Würfel  $w$  Mal zu werfen. Betrachtet wird jeweils die Augensumme.

- Simulieren Sie den gesamten Vorgang mit der TI-Nspire-App. Dabei soll eine Liste mit 2500 Augensummen erzeugt werden. Geben Sie außerdem in einer Zelle den Wert der Variablen  $w$  aus und berechnen Sie in zwei weiteren Zellen den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen Augensumme.
- Stellen Sie die relativen Häufigkeiten der Augensummen in einem Histogramm dar. Dabei soll der Wert von  $w$  zwischen 2 und 10 über einen Schieberegler einstellbar sein.
- Zeichnen Sie zusätzlich zum Histogramm den Graphen der Dichtefunktion der Normalverteilung mit dem gleichen Erwartungswert und der gleichen Standardabweichung wie bei der Zufallsvariablen Augensumme. Sie können damit die Verteilung der relativen Häufigkeiten mit der Dichtefunktion der Normalverteilung vergleichen.
- Die erfassten Daten (Liste der Augensummen) sollen mithilfe der TI-Nspire-App ausgewertet werden.

Mathematische Voraussetzungen:

Erwartungswert der Augenzahl beim Werfen eines Würfels:

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Damit erhält man für den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  der Augensumme bei  $w$  Würfeln:


$$\mu(w) = w \cdot \frac{7}{2}$$


$$\sigma(w) = \sqrt{w \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \left( \left( \frac{7}{2} - i \right)^2 \right)}$$

### Lösung

- a) Erstellen Sie ein neues Dokument im Ordner ‚Beispiele‘ und wählen Sie ‚Calculator‘. Nehmen Sie folgende Eingaben vor:

$\mu(w) := \frac{w \cdot 7}{2}$	Fertig
$\sigma(w) := \sqrt{\frac{w}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \left( \left( \frac{7}{2} - i \right)^2 \right)}$	Fertig
$w := 2$	2


Die griechischen Buchstaben erhält man über  und ‚Sonderzeichen‘. Bemerkung: Mit  $w := 2$  wird ein Anfangswert für  $w$  festgelegt.

Erstellen Sie eine neue Seite , wählen Sie ‚Lists & Spreadsheet‘. Nehmen Sie folgende Eingaben vor:

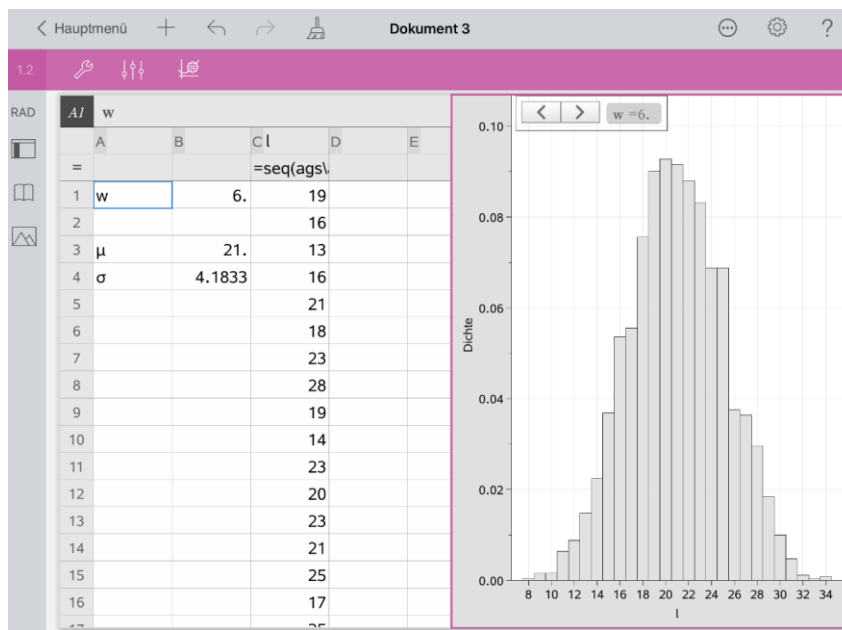
Zelle A1:         $w$   
 Zelle A3:         $\mu$   
 Zelle A4:         $\sigma$   
 Zelle B1:         $=w$   
 Zelle B3:         $= 1.0 \cdot \mu(w)$   
 Zelle B4:         $= 1.0 \cdot \sigma(w)$




Spalte C:


Namenszelle:    1  
 Formelzelle:     $\text{seq}(\text{ags}\backslash\text{augensumme}('w), i, 1, 2500)$

Die Funktion  $\text{ags}\backslash\text{augensumme}$  erhält man über , ‚Bibliotheken‘, ‚ags‘. Die Variable  $w$  muss mit Apostroph (' $w$ ) eingegeben oder nachträglich auf Variablenverweis eingestellt werden.

b)




Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ , wählen Sie ‚Daten‘ und ‚SchnellGraph‘.  
 Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘  und wählen Sie ‚Plottyp‘ und ‚Histogramm‘.  
 Kehren Sie zum Menü ‚Werkzeuge‘ zurück . Wählen Sie ‚Plot-Eigenschaften‘, ‚Histogramm-Eigenschaften‘, ‚Histogrammmaßstab‘ und ‚Dichte‘.

Öffnen Sie ‚Histogrammmaßstab‘  und gehen Sie zurück zum Menü ‚Histogramm-Eigenschaften‘. Wählen Sie danach ‚Säuleneinstellungen‘ und ‚Gleiche Säulbreite‘.


Nehmen Sie folgende Einstellungen vor:

Breite: 1  
 Ausrichtung: 0.5  
 ‚OK‘

Tippen Sie auf eine beliebige Säule des Histogramms und dann auf ‚Prüfer‘ .  
 Wählen Sie als Füllfarbe ein helles Grau. Tippen Sie zweimal auf eine freie Stelle im Arbeitsbereich, um das Kontextmenü zu schließen und die Auswahl zu beenden.

Öffnen Sie das Menü ‚Säuleneinstellungen‘  und gehen Sie zurück zum Menü ‚Werkzeuge‘.

Wählen Sie ‚Fenster/Zoom‘ und ‚Zoom-Daten‘.


Gehen Sie vom Menü ‚Fenster/Zoom‘  zurück zum Menü ‚Werkzeuge‘ und wählen Sie ‚Aktionen‘, ‚Schieberegler einfügen‘.

Stellen Sie den Regler für w wie folgt ein:

Variable: w  
 Anfangswert: 2  
 Minimum: 2  
 Maximum: 10  
 Schrittweite: 1  
 Minimiert  
 ‚OK‘

Ziehen Sie den Schieberegler nach oben und tippen Sie dann auf eine freie Stelle im Arbeitsbereich.

Nutzen Sie nun den Schieberegler, um einen gewünschten Wert einzustellen. Dabei kann es erforderlich sein, den Graphik-Arbeitsbereich anzupassen.

Dazu kehren Sie jeweils zum Menü ‚Werkzeuge‘  zurück und wählen ‚Fenster/Zoom‘ und ‚Zoom-Daten‘.

- c) Gehen Sie zurück zum Menü ‚Werkzeuge‘  und wählen Sie ‚Analysieren‘ und ‚Funktion zeichnen‘.


Wählen Sie über ‚Hilfsfunktionen‘  im ‚Katalog‘ die Funktion ‚normPdf‘. Geben Sie in das Suchfeld ‚norm...‘ ein, wählen Sie ‚normPdf(‘ und ‚Fertig‘.

Geben Sie die Funktionsgleichung  $f_1(x) := \text{normPdf}(x, \mu(w), \sigma(w))$  ein.

Der Graph der Dichtefunktion beruht auf den exakten Werten für  $\mu$  und  $\sigma$  der Zufallsgröße Augensumme mit  $n$  Würfeln.

Alternativ kann man auch auf die Parameter zurückgreifen, die sich aus den ermittelten Zufallswerten ergeben.


Dazu muss man wie folgt vorgehen:

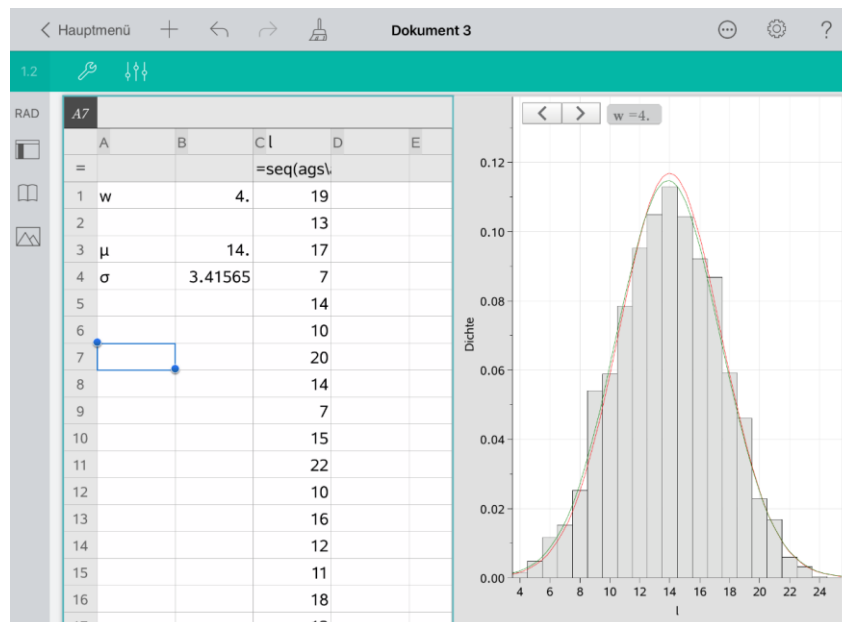
Gehen Sie zurück zum Menü ‚Werkzeuge‘  und wählen Sie ‚Analysieren‘ und ‚Normal PDF‘ anzeigen.

Es wäre auch sinnvoll, wenn Sie beide Graphen verschiedenfarbig zeichnen .


Es ist außerdem möglich die Daten für den aktuellen Wert von  $w$  wiederholt neu zu berechnen.

Dazu muss man auf den Bereich der Tabellenkalkulation tippen, um in der ‚Lists & Spreadsheet Applikation‘ zu arbeiten.

Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ . Wählen Sie ‚Aktionen‘ und ‚Neu berechnen‘. Sie können dies wiederholen, so oft Sie wollen.



d) Arbeiten Sie im Bereich von ‚Lists & Spreadsheet‘.

Gehen Sie zum Menü ‚Werkzeuge‘ zurück .

Wählen Sie ‚Statistik‘, ‚Statistische Berechnungen‘ und ‚Statistik mit einer Variable...‘.

Tippen Sie im ‚Kontextmenü‘ auf ‚OK‘ und geben Sie Folgendes ein:

X1-Liste:  $l$   
 1. Ergebnisspalte:  $d$

Die ausgegebenen Werte haben folgende Bedeutung:

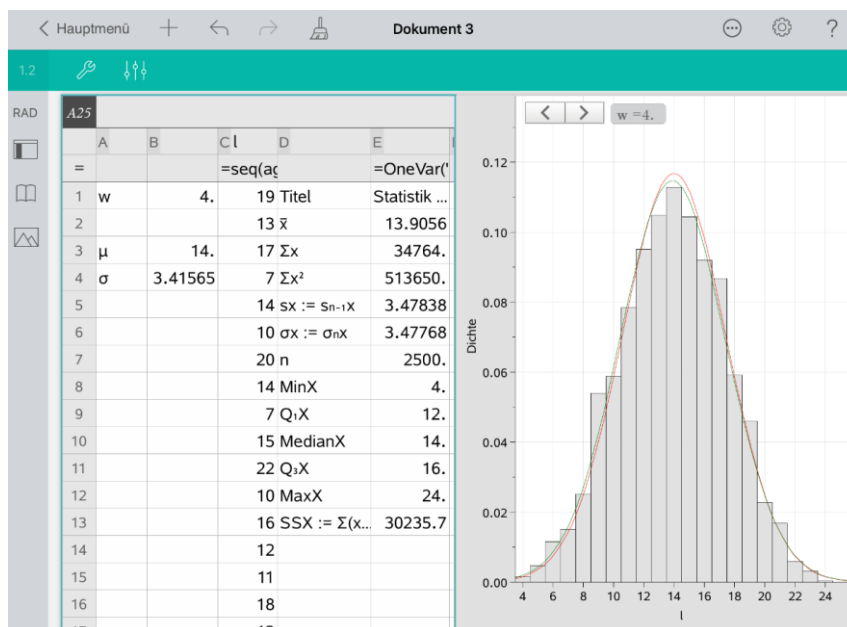
$\bar{x}$	Mittelwert der $l$ -Werte
$\sum x$	Summe der $l$ -Werte
$\sum x^2$	Summe der Quadrate der $l$ -Werte
$sx := s_{n-1}x$	Stichproben-Standardabweichung von $l$
$\sigma x := \sigma_n x$	Populations-Standardabweichung von $l$
$n$	Anzahl der $l$ -Werte
$MinX$	Minimum der $l$ -Werte
$Q_1X$	1. Quartil von $l$
$MedianX$	Median von $l$
$Q_3X$	3. Quartil von $l$
$MaxX$	Maximum der $l$ -Werte
$SSX := \sum (x - \bar{x})^2$	Summe der Quadrate der Abweichungen der $l$ -Werte vom Mittelwert

Beachten Sie vor allem den Mittelwert und die Standardabweichungen.

Sie können gegebenenfalls im ‚Lists-&-Spreadsheet-Bereich‘ die Spaltenbreiten anpassen:

Öffnen Sie im Menü ‚Aktionen‘ , ‚Größe ändern‘ und ‚Spaltbreite‘.

Ziehen Sie das blau markierte Feld größer oder kleiner. Greifen Sie dazu das Feld am rechten Rand an.



Die Lösung der Aufgabe 3 erfolgt in demselben Dokument wie die der Aufgabe 2. Setzen Sie daher die Arbeit in einem neuen Problem fort.

### Aufgabe 3<sup>1</sup>

- Ermitteln Sie mit der Applikation ‚Lists & Spreadsheet‘ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen Augensumme bei  $w$  Würfeln. Geben Sie außerdem (wie bereits in Aufgabe 2 in einer Zelle den Wert der Variablen  $w$  aus und berechnen Sie in zwei weiteren Zellen den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen Augensumme.
- Erstellen Sie das Histogramm der in a) berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Über einen Schieberegler soll der Wert von  $w$  zwischen 2 und 10 einstellbar sein.
- Erstellen Sie den Graphen der Dichtefunktion der Normalverteilung mit dem gleichen Erwartungswert und der gleichen Standardabweichung wie die Zufallsvariable Augensumme.
- Erzeugen Sie in einer neuen Darstellung das Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen Augensumme für 100 Würfe und die Dichtefunktion der Normalverteilung bei gleichen Parametern für beide Verteilungen.

Mathematische Voraussetzungen:

Der Funktionswert  $p_a(x, w)$  der Funktion  $p_a$  mit der Gleichung

$$p_a(x, w) = \frac{1}{6^w} \cdot \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{x-w}{6} \rfloor} \left( (-1)^r \cdot \binom{w}{r} \cdot \binom{x-6r-1}{w-1} \right)$$

ist die Wahrscheinlichkeit der Augensumme  $x$  bei  $w$  Würfeln.

Dabei ist  $\lfloor \frac{x-w}{6} \rfloor$  die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $\frac{x-w}{6}$  ist.


### Lösung

- Fügen Sie ein neues ‚Problem‘  mit einer Calculator-Seite ein und nehmen Sie folgende Eingaben vor:

$p_a(x, w) := \frac{1}{6^w} \cdot \sum_{r=0}^{\text{iPart}\left(\frac{x-w}{6}\right)} \left( (-1)^r \cdot \text{nCr}(w, r) \cdot \text{nCr}(x-6 \cdot r-1, w-1) \right)$	Fertig
$\mu(w) := \frac{w \cdot 7}{2}$	Fertig
$\sigma(w) := \sqrt{\frac{w}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \left( \left( \frac{7}{2} - i \right)^2 \right)}$	Fertig
$w := 2$	2




Die Funktion ‚ipard‘ erhält man wie folgt:

Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ , wählen Sie ‚Zahl‘, ‚Zahlenwerkzeuge‘ und ‚Ganzzahliger Teil‘.

Die Funktion ‚nCr(n,k)‘ berechnet den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ .

Man kann ‚nCr‘ einfach eintippen oder wie folgt erhalten:

Wählen Sie im Menü ‚Werkzeuge‘ , ‚Wahrscheinlichkeit‘ und ‚Kombinationen‘.

Erstellen Sie eine neue Seite  und wählen Sie ‚Lists & Spreadsheet‘.

Gehen Sie bis zur Berechnung der Standardabweichung so vor wie bei Aufgabe 2.

Danach erzeugen Sie die Listen k1 und p1.

k1: Liste der möglichen Augensummen von  $w$  bis  $6w$

p1: Liste der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten

Eingaben in Spalte C:

Namenszelle: k1

Formelzelle:  $\text{seq}(i, i, 'w, 6 \cdot 'w)$

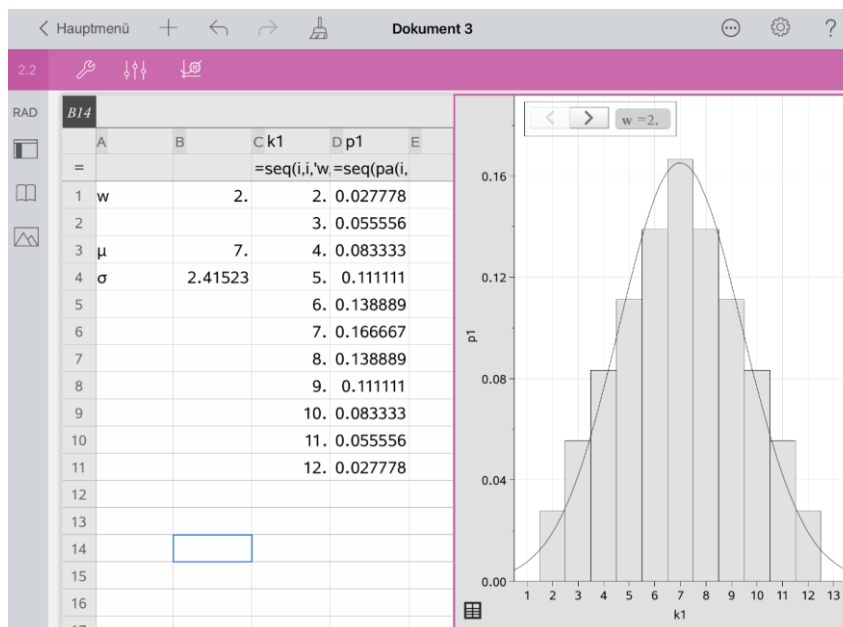
Eingaben in Spalte D:


Namenszelle: p1

Formelzelle:  $\text{seq}(\text{pa}(i, 'w) \cdot 1.0, i, 'w, 6 \cdot 'w)$

Die Variable  $w$  muss auf Variablenverweis umgestellt oder gleich in der Form  $'w$ , also mit vorangestelltem Apostroph, eingegeben werden.

b)



Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ , und wählen Sie ‚Daten‘ und ‚Ergebnisdiagramm‘.


Tragen Sie Folgendes in das Kontextmenü ein.

X-Liste: k1


Ergebnisliste: p1


‚OK‘



Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ , wählen Sie ‚Plot-Eigenschaften‘, ‚Histogramm-Eigenschaften‘, ‚Säuleneinstellungen und ‚Gleiche Säulenbreite‘ und geben Sie die Breite und die Ausrichtung ein.

Breite: 1  
Ausrichtung: 0.5  
‚OK‘


Tippen Sie auf eine beliebige Säule. Wählen Sie über den ‚Prüfer‘  als Füllfarbe ein helles Grau. Tippen Sie zweimal auf eine freie Stelle im Arbeitsbereich.

Kehren Sie zum Menü ‚Werkzeuge‘ zurück , wählen Sie ‚Fenster/Zoom‘ und ‚Zoom-Daten‘.

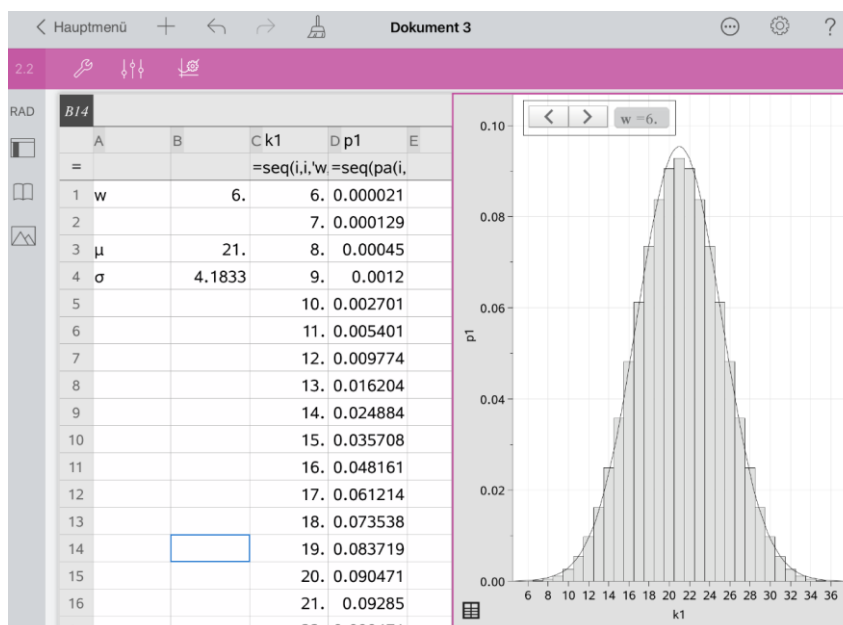
Wählen Sie im Menü ‚Werkzeuge‘ , ‚Aktionen‘ und dann ‚Schieberegler einfügen‘. Nehmen Sie folgende Eingaben vor:


Variable: w  
Anfangswert: 2  
Minimum: 2  
Maximum: 10  
Schrittweite: 1  
Minimiert  
‚OK‘

Ziehen Sie den Schieberegler nach oben und tippen Sie auf eine freie Stelle im Arbeitsbereich.

Stellen Sie mit dem Schieberegler die gewünschten Werte ein und passen Sie den Graphik-Arbeitsbereich an, indem Sie im Menü ‚Werkzeuge‘ , ‚Fenster/Zoom‘ und ‚Zoom-Daten‘ wählen.

- c) Zeichnen Sie die Dichtefunktion wie bereits in Aufgabe 2 beschrieben. Geben dazu wiederum  $f_1(x) := \text{normPdf}(x, \mu(w), \sigma(w))$  ein.



d) Erstellen Sie eine weitere ‚Lists-&-Spreadsheet-Seite‘ .

Eingabe in Spalte A:


Namenszelle: k2

Formelzelle:  $\text{seq}(i, i, 100, 600)$

Eingabe in Spalte B:

Namenszelle: p2


Formelzelle:  $\text{seq}(pa(i, 100), i, 100, 600)$

Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ , wählen Sie ‚Daten‘ und ‚Ergebnisdiagramm‘.  
Füllen Sie das Kontextmenü aus:

X-Liste: k2

Ergebnisliste: p2


‚OK‘


Öffnen Sie das Menü ‚Werkzeuge‘ , wählen Sie ‚Plot-Eigenschaften‘, ‚Histogramm-Eigenschaften‘, ‚Säuleneinstellungen‘ und ‚Gleiche Säulenbreite‘ und geben Sie die Breite und die Ausrichtung ein.

Breite: 1

Ausrichtung: 0.5

‚OK‘

Tippen Sie auf eine beliebige Säule. Wählen Sie über den ‚Prüfer‘  als Füllfarbe ein helles Grau. Tippen Sie zweimal auf eine freie Stelle im Arbeitsbereich.

Kehren Sie zum Menü ‚Werkzeuge‘ zurück , wählen Sie ‚Fenster/Zoom‘ und ‚Zoom-Daten‘.

Öffnen Sie das Menü ‚Fenster/Zoom‘ . Wählen Sie ‚Fenstereinstellungen...‘ und geben Sie folgende Einstellungen ein:

XMin: 285

XMax: 420

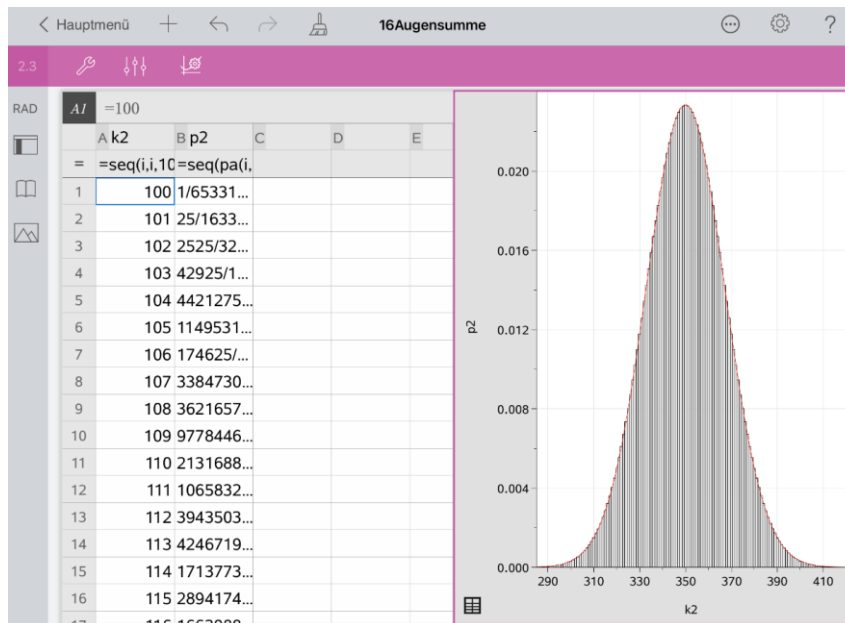
YMax: 0.024

‚OK‘

Zeichnen Sie die Dichtefunktion wie bereits in Aufgabe 2 beschrieben.

Geben Sie jetzt  $f_2(x) := \text{normPdf}(x, \mu(100), \sigma(100))$  ein.

Ändern Sie eventuell noch die Linienfarbe.



Kehren Sie zum Hauptmenü zurück und nennen Sie das Dokument ‚Augensumme‘.

Dieses Dokument ist geeignet, die Bedeutung der Normalverteilung im Zusammenhang mit dem Zentralen Grenzwertsatz zu verdeutlichen.

### Literaturverzeichnis

1) Augensummen beim Würfelwurf II

<https://www.youtube.com/watch?v=R5mILK89HQo&t=442s>