Ausgleichsgerade für lineare Zusammenhänge

Es folgt eine Aufgabensammlung zu Daten, die mit den Mitteln des TI-30X Prio MathPrint™ auf das Vorliegen eines linearen Zusammenhangs untersucht werden. Die Skizzierung der Lösungsideen erfolgt im zweiten Abschnitt.

Aufgabenteil

1. Flügelfläche und Masse[1)]

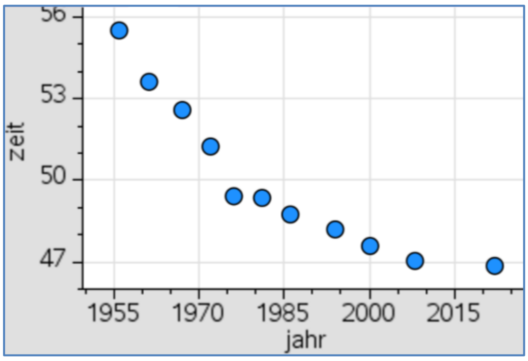
Die Tabelle zeigt die Masse und die Flügelfläche bei verschiedenen Vogelarten.

a) Erstelle ein Streudiagramm der Daten für den Zusammenhang Masse → Flügelfläche und zeichne eine Ausgleichsgerade ein, die sich „möglichst gut“ an die Punkte anpasst.
b) Bestimme die Funktionsgleichung deiner Geraden.
c) Ermittle die Summe der Fehlerquadrate für deine Geradengleichung.
d) Vergleiche mit den Lösungen deiner Nachbarn. Kommt ihr alle in etwa zu der gleichen Geraden? Bei wem ist die Summe der Fehlerquadrate am kleinsten?
e) Ermittle mit deiner Gleichung einen ungefähren Wert für die Flügelfläche eines Vogels mit der Masse 400 g.
f) Wie groß ist die Masse eines Vogels mit 500 cm² Flügelfläche?
g) Ein Blaureiher wiegt 2090 g und hat eine Flügelfläche von 4436 cm². Liegt dieser „Punkt“ auch noch in etwa auf deiner Geraden?

Vogel	Masse (in g)	Flügelfläche (in cm²)
Spatz	25	87
Schwalbe	47	186
Amsel	78	245
Star	93	190
Taube	143	357
Krähe	440	1344
Möwe	607	2006

2. Weltrekorde 100 m Freistil Männer (Auswahl) [2)]

Jahr	1956	1961	1967	1972	1976	1981	1986	1994	2000	2008	2022
Zeit (s)	55,4	53,6	52,6	51,22	49,44	49,36	48,74	48,21	47,60	47,05	46,86



In der Tabelle und im Diagramm ist eine Auswahl an Zeiten und Jahren von Rekorden im 100 m Freistilschwimmen der Männer im Zeitraum von 1956 bis 2022 dargestellt.

a) Begründe, weshalb es nicht sinnvoll ist, für den gesamten Zeitraum von 1956 bis 2022 eine Ausgleichsgerade einzuzeichnen.
b) Beschreibe, welche Entwicklung der Rekorde nach dem Jahr 2022 zu vermuten ist.
c) Zeichne für die in den Jahren 1956, 1961, 1967 und 1972 erreichten Zeiten eine Ausgleichsgerade ein und ermittle deren Gleichung sowie die Summe der Fehlerquadrate.
d) Bestimme, welche Rekordzeit im Jahr 2022 zu erwarten gewesen wäre, wenn sich die Entwicklung aus den Jahren von 1956 bis 1972 linear fortgesetzt hätte.
e) Am 23. August 1970 stellte der US-Amerikaner Mark Spitz in Los Angeles einen Rekord über 100 m Freistil in der Zeit von 51,94 Sekunden auf. Untersuche, ob diese Zeit sich auch näherungsweise mit der Gleichung deiner Ausgleichsgeraden ergibt.

3. Siedetemperatur des Wassers

Siedetemperatur (in °C)	100	98	96	90	80
Höhe über dem Meer (in m)	0	590	1150	2900	6080

Die Tabelle zeigt die Abhängigkeit der Siedetemperatur des Wassers von der Meereshöhe.

a) Stelle die Werte in einem Diagramm dar und beschreibe den Verlauf.
b) Zeichne eine Ausgleichsgerade ein und gib deren Gleichung an.
c) Berechne die Summe der Fehlerquadrate deiner Ausgleichsgeraden.
d) Durch lineare Regression ergibt sich die optimale Ausgleichsgerade durch $y = -0{,}0033x + 99{,}86$. Die Summe der Fehlerquadrate wird mit 0,1541 angegeben. Berechne, um wie viel Prozent deine Fehlerquadratsumme von dieser minimalen Summe abweicht.
e) Bei einer linearen Funktion müssen die Differenzenquotienten $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ stets konstant sein. Untersuche, ob das hier der Fall ist und finde auf diesem Wege eine lineare Funktion, die den Zusammenhang von Höhe über NN und Siedetemperatur näherungsweise beschreibt.

4. Mandarinen

Fruchtlänge (in cm)	4,7	5,3	3,9	4,0	3,6	5,4
Masse (in g)	60	54	44	36	34	88

Von sechs Mandarinen einer bestimmten Sorte wurden die Fruchtlänge (in cm) und das Gewicht (in g) gemessen. Die Tabelle zeigt das Ergebnis.

a) Stelle die Messwerte graphisch dar.
b) Begründe anhand der Lage der Punkte im Koordinatensystem, ob ein proportionaler oder linearer Zusammenhang vorliegt.
c) Lege eine Ausgleichsgerade durch die Punktwolke und bestimme die dazugehörige Funktionsgleichung. Ermittle zu deiner Ausgleichsgeraden die Summe der Fehlerquadrate.
d) Erläutere die Bedeutung des Anstiegs der Ausgleichsgeraden im Sachzusammenhang.

e) Berechne anhand der Gleichung der Ausgleichsgeraden die Masse für eine Mandarine mit einer Fruchtlänge von 4,5 cm sowie die Fruchtlänge für die Masse von 70 g.

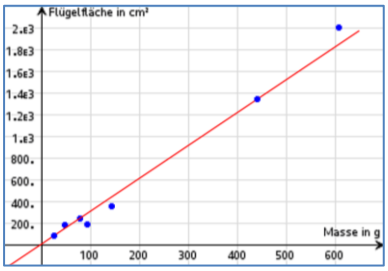
f) Suche im Internet nach einer Software, die die Bestimmung einer optimalen Ausgleichsgeraden durch lineare Regression erlaubt. Vergleiche das Ergebnis mit deiner Ausgleichgeraden.

Lösungsteil

Die Graphiken im Text wurden mit der TI-Nspire-Technologie erstellt.

Lösungsskizze zu Nr. 1:

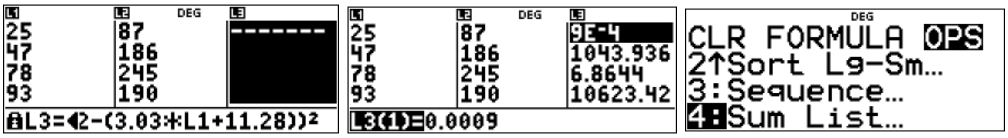
a) Diagramm

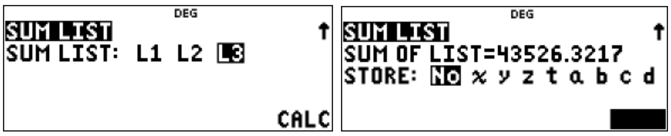


b) Ausgleichsgerade durch die Punkte Spatz(25g| 87 cm²) und Krähe(440 g|1344 cm²):

$\frac{y-87}{x-25} = \frac{1344-87}{440-25} \Longrightarrow y \approx 3{,}03 \cdot (x-25) + 87 \Longrightarrow y \approx 3{,}03x + 11{,}28$

c) Summe der Fehlerquadrate:





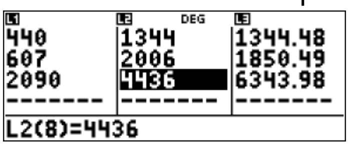
Die Summe der Fehlerquadrate für die vorliegende Ausgleichsgerade ist rund 43 526.

d) Individuelle Lösung.

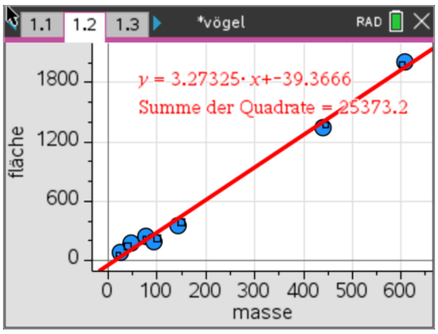
e) Mit $y \approx 3{,}03x + 11{,}28$ und x = 400 g ergibt sich eine Flügelfläche von ca. 1223 cm².

f) Mit $y \approx 3{,}03x + 11{,}28$ und y = 500 cm² ergibt sich eine Masse von ca. 161 g.

g) Mit $y \approx 3{,}03x + 11{,}28$ und x = 2090 g ergibt sich eine Flügelfläche von ca. 6344 cm². Dieser Wert unterscheidet sich wesentlich von den gegebenen 4436 cm² Flügelfläche eines Blaureihers. Hier passt das Modell nicht.



Hinweis: Ergebnis durch lineare Regression mit der kleinstmöglichen Summe der Fehlerquadrate.

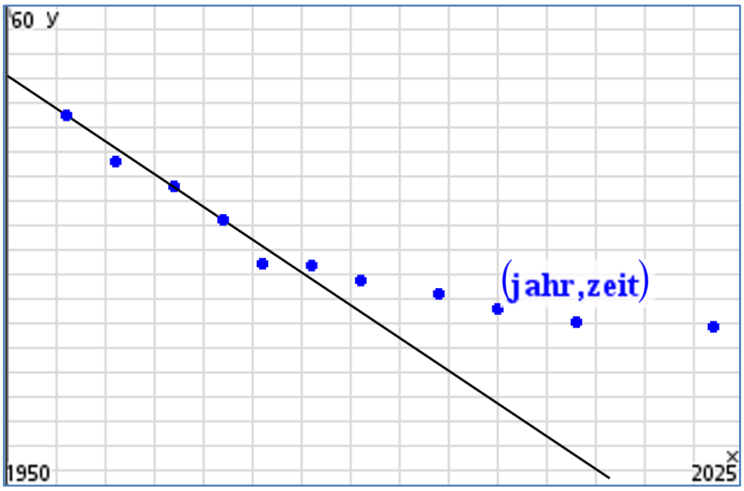


Lösungsskizze zu Nr. 2

a) Es ist für den gesamten Zeitraum kein linearer Verlauf erkennbar.

b) Eher ist zu vermuten, dass die Entwicklung der Rekorde immer langsamer vor sich geht und sich die Rekordzeiten wohl einer durch die menschliche Konstitution gesetzten Grenze asymptotisch nähern.

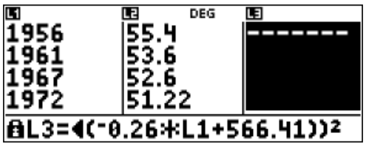
c) Beispiel für eine Ausgleichsgerade für die ersten vier Wertepaare:

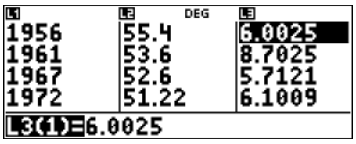


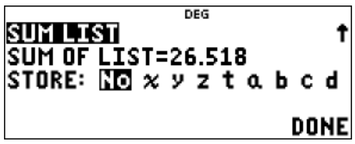
Gleichung der Ausgleichsgeraden:

$\frac{y-55{,}4}{x-1956} = \frac{51{,}22-55.4}{1972-1956} \Longrightarrow y = -0{,}26125 \cdot (x-1956) + 55{,}4 = -0{,}26125x + 565{,}405$

$y \approx -0{,}26x + 566{,}41$







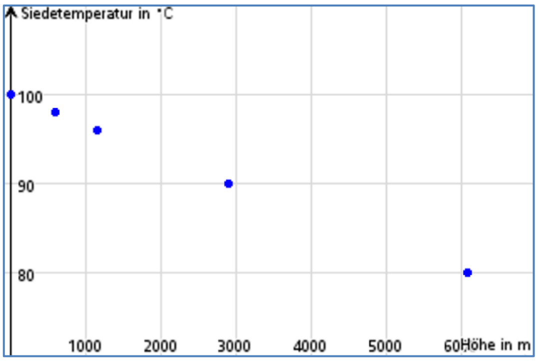
Summe der Fehlerquadrate: 26,518

d) Individuelle Lösung: Bei linearer Fortsetzung hätte es nach obiger Gleichung im Jahr 2022 einen Rekord von 37,16 s geben müssen:
$y \approx -0{,}26125 \cdot 2022 + 565{,}405 = 37{,}16\ s$

e) Individuelle Lösung: Nach der hier verwendeten Gleichung der Ausgleichsgeraden wäre die Zeit im Jahr 1970 ungefähr $y \approx -0{,}26125 \cdot 1970 + 566{,}405 = 50{,}74\ s$ gewesen, also fast eine Sekunde weniger als der tatsächliche Rekord.

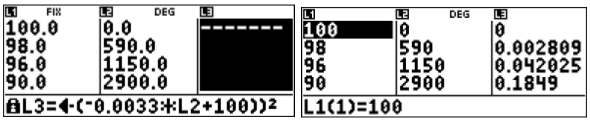
Lösungsskizze zu Nr. 3

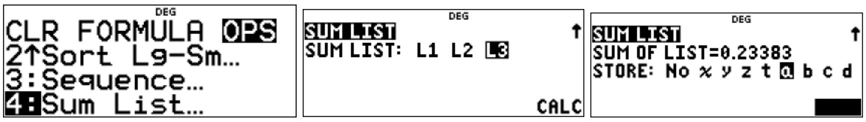
a) Die graphische Darstellung (x-Achse: Höhe über NN in m, y-Achse: Siedetemperatur in °C) der zu den Messwerten gehörenden Punkte legt einen linearen Zusammenhang nahe.
Mit zunehmender Meereshöhe nimmt die Siedetemperatur ab.



b) Individuelle Lösung: Es wird nach Augenmaß eine „möglichst gut passende“ Gerade durch die Punkte gelegt. Sie hat näherungsweise den Anstieg $-\frac{20}{6000} = -\frac{1}{300} \approx -0{,}0033$. Der Durchgang an der y-Achse ist bei 100, so dass die Ausgleichsgerade näherungsweise die Gleichung $f(x) = -0{,}0033x + 100$ hat.
Dabei gibt f(x) die Siedetemperatur in Grad Celsius in der Höhe x (in m)an.

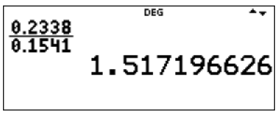
c) Individuelle Lösung: Summe der Fehlerquadrate

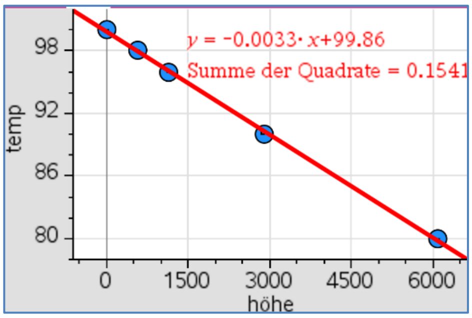




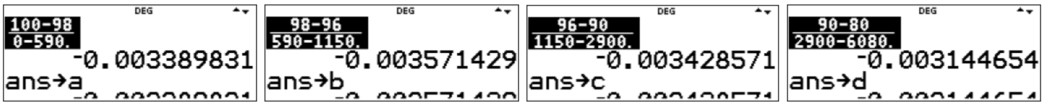
Die Summe der Fehlerquadrate ist rund $0{,}2338$.

d) Regression:
Durch lineare Regression beträgt die Summe der Fehlerquadrate 0,1541 (100%). Bei der oben verwendeten Ausgleichsgeraden sind es 0,2338. Das ist rund das 1,52-fache, also 152% vom Grundwert.

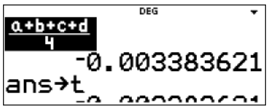




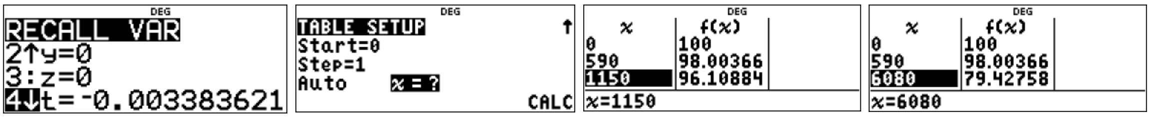
e) Bei einer linearen Funktion müssen die Differenzenquotienten $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ stets konstant sein. Jeder der vier Differenzenquotient wird einzeln berechnet und das Ergebnis unter einer der Variablen a, b, c bzw. d gespeichert.



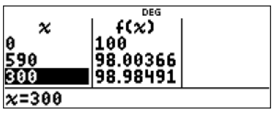
Man sieht, dass sich die Differenzenquotienten erst in der vierten Nachkommastelle unterscheiden. Sie sind also annähernd konstant. Deshalb ist es sinnvoll, mit dem Mittelwerte dieser Quotienten weiterzuarbeiten.
Der Mittelwert der Differenzenquotienten wird mithilfe der Variablen berechnet und als Anstieg der linearen Ausgleichsfunktion unter der Variablen t gespeichert.



Der Wertetabelle kann man entnehmen, dass der Durchgang auf der y-Achse bei 100 (°C) liegt. Eine Gleichung der linearen Ausgleichsfunktion ist damit gegeben durch $f(x) = m \cdot x + 100$. Dabei gibt f(x) die Siedetemperatur in Grad Celsius in x Metern Höhe an. Die Variable m gibt den Wert des Anstiegs an, der auf dem Rechner unter t gespeichert ist.
Damit können wir prüfen, ob diese lineare Funktion brauchbare Näherungswerte liefert. Die Funktion f wird unter [TABLE] definiert. Dabei wird der Anstiegswert von t über die RECALL-Anwendung aufgerufen. Für das TABLE SETUP wird die Option $\boxed{\text{x = ?}}$ gewählt, mit deren Hilfe dann gezielt einzelne Werte für x eingegeben werden können.



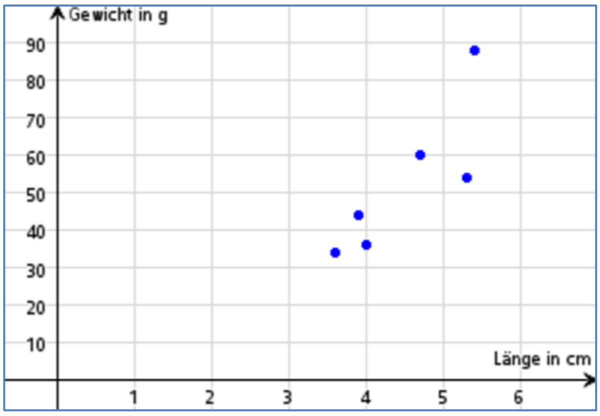
Nun können die Siedetemperaturen nach dem berechneten Modell mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Höhen getestet und überprüft werden. Es ist eine gute Übereinstimmung zu erkennen.
Wir haben für die Höhen zwischen 0 m und 6080 m über dem Meeresspiegel ein brauchbares Modell auf einem anderen Lösungsweg gefunden. Näherungsweise können wir also annehmen, dass z. B. die Siedetemperatur in 300m Höhe über NN etwa f(300) = 99 °C beträgt.



Fazit: Die Siedetemperatur von Wasser nimmt mit steigender Höhe über dem Meeresspiegel linear ab. Sie sinkt ca. um 1 K bei einer Höhenzunahme von jeweils 300 Metern. Vorsichtig müssen wir jedoch mit Voraussagen über die Siedetemperatur anhand dieses Modells außerhalb des Intervalls (0 m; 6080 m] sein, weil darüber hier keine Daten gegeben sind, die bei der Modellbildung hätten berücksichtigt werden können.

Lösungsskizze zu Nr. 4

a) Diagramm



b) Es liegt kein proportionaler Zusammenhang vor. Es lässt sich zwar eine Ausgleichsgerade durch die Punktwolke legen, aber die verläuft nicht durch den Ursprung.

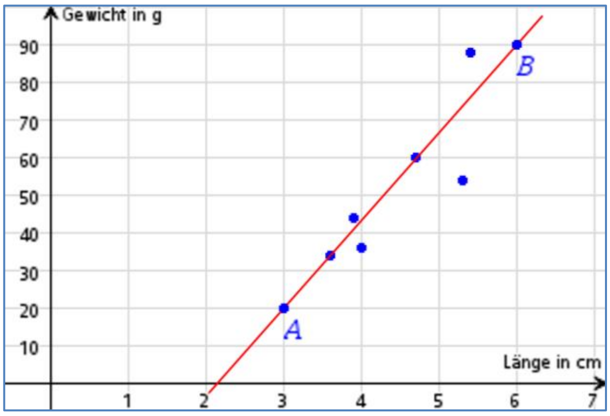
c) Ausgleichgerade (individuell):

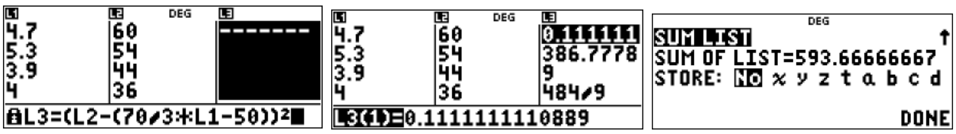
Diese Ausgleichsgerade wurde durch die Punkte A(3|20) und B(6|90) gelegt.

Sie hat die Gleichung

$\frac{y-20}{x-3} = \frac{90-20}{6-3} \Longrightarrow y = \frac{70}{3}x - 50.$

Summe der Fehlerquadrate: s = 593,7:



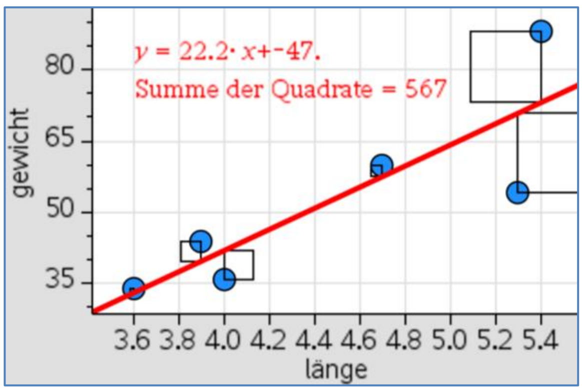


d) Bedeutung des Anstiegs der Ausgleichsgeraden

Der Anstieg $\frac{70}{3} \approx 23{,}3$ bedeutet hier, dass die Masse der Mandarinen um ca. 23,3 g größer wird, wenn ihre Länge um 1 cm wächst.

e) Für eine Länge von 4,5 cm beträgt die Masse 55 g. Für eine Masse von 70 g müsste die Mandarine nach diesem Modell ca. 5,14 cm Länge haben.

f) Lineare Regression:



Quellenverzeichnis

1) Mathematik Neue Wege Bd.8, Arbeitsbuch für Gymnasien. Schroedel Verlag
2) https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Schwimmweltrekorde_%C3%BCber_100_Meter_Freistil (zuletzt eingesehen am 26.07.2024)

Autor:
Dr. Wilfried Zappe