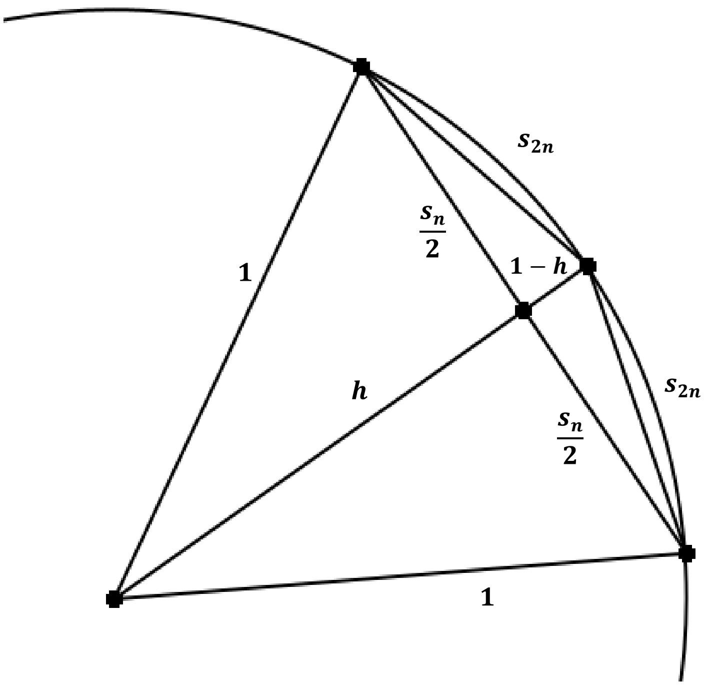
Die Nutzung der Applikation Lists & Spreadsheet des TI-Nspire™ CAS
zur Approximation der Kreiszahl π

Wolfgang Häfner

Im Beitrag wird dargestellt, wie mit Hilfe regelmäßiger n-Ecke, die dem Einheitskreis ein- bzw. umbeschrieben sind die Kreiszahl π approximiert werden kann.
Da sich der Umfang dieser n-Ecke mit wachsendem n dem Kreisumfang $u = 2\pi\ LE$ nähert, erhält man nach Division der Umfänge der n-Ecke durch 2 Näherungswerte für π, die mit wachsendem n immer stärker approximieren.
Dazu werden die Seitenlängen und danach die Umfänge dieser n-Ecke ermittelt, wobei die Eckenzahl jeweils verdoppelt wird. Dabei ist es günstig mit dem Sechseck zu beginnen.
Es werden also nacheinander das 6-Eck, das 12-Eck, das 24-Eck usw. betrachtet.
Diese Vorgehensweise bietet sich an, weil es möglich ist, die Seitenlänge eines beliebigen $2n$-Ecks mit der Seitenlänge des n-Ecks zu berechnen.
Damit ist eine rekursive Vorgehensweise gegeben, die sich mit Hilfe der Tabellenkalkulation umsetzen lässt. Wegen der jeweiligen Verdopplung der Eckenzahl erfolgt eine rasche Approximation, wodurch die Tabelle ohne größeren Aufwand zu realisieren ist und übersichtlich bleibt.

Herleitung einer Rekursionsformel zur Berechnung der Seitenlänge des einbeschriebenen 2n-Ecks aus der Seitenlänge des n-Ecks.



$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{4} + (1-h)^2$$

$$h = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$$

$$\text{solve}\left(\left\{\begin{array}{l} x=\frac{sn^2}{4}+(1-h)^2 \\ h=\sqrt{1-\frac{sn^2}{4}} \end{array}\right.,x\right) \qquad \boxed{x=-\left(\sqrt{4-sn^2}-2\right)} \text{ and } h=\frac{\sqrt{4-sn^2}}{2}$$

Also gilt ${s_{2n}}^2 = 2-\sqrt{4-{s_n}^2}$

Daraus folgt:

$${s_{2n}}^2 = \frac{\left(2-\sqrt{4-{s_n}^2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{4-{s_n}^2}\right)}{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}$$

$${s_{2n}}^2 = \frac{4-(4-{s_n}^2)}{2+\sqrt{4-{s_n}^2}} = \frac{{s_n}^2}{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}$$

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}}$$

Die Berechnung von s_{2n} mit $s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-{s_n}^2}}$ führt wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{4-{s_n}^2}\right) = 0$ zur Vernachlässigung notwendiger Nachkommastellen, so dass die Ergebnisse für größere n beim Rechner falsch werden. Deshalb erfolgt die Berechnung mit $s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-{s_n}^2}}}$.

Multipliziert man die jeweilige Seitenlänge mit der Anzahl der Seiten und dividiert dann durch 2, so erhält man bereits nach wenigen Schritten einen guten Näherungswert für π.

Wie bekannt entspricht die Seitenlänge des einbeschrieben 6-Ecks dem Radius des Umkreises, ist also in unserem Fall 1 LE.

<u>Es sind folgende Eingaben vorzunehmen:</u>

Dokumenteinstellungen: Angezeigte Ziffern: z.B. Fließ 12
In Spalte A werden die Seitenlängen berechnet, Spalte B enthält die jeweilige Eckenzahl und Spalte C die zugehörigen Näherungswerte für π.
In den angegeben Zellen sind folgende Eingaben vorzunehmen.

$A1$: 1

$B1$: 6

$C1$: $=\frac{a1\cdot b1}{2}$

$A2$: $=\frac{a1}{\sqrt{2.0+\sqrt{4-a1^2}}}$

$B2$: $= b1\cdot 2$

Die Zellen $A2$, $B2$ und $C1$ sind jeweils bis zu den Zellen A20, B20 und C20 zu füllen.

Man erhält folgendes Ergebnis:

	A	B	C	D	E
1	1	6	3		
2	0.51763…	12	3.10582854123		
3	0.26105…	24	3.13262861328		
4	0.13080…	48	3.13935020305		
16	0.00003…	196608	3.14159265346		
17	0.00001…	393216	3.14159265356		
18	0.00000…	786432	3.14159265358		
19	0.00000…	1572864	3.14159265359		
20	0.00000…	3145728	3.14159265359		
21					
22					
23					
24					

F21

Ergänzung
Ausführliche Herleitung der Rekursionsgleichung ohne Rechner
Einbeschriebene n-Ecke:

$$s_{2n}{}^2 = \frac{s_n{}^2}{4} + (1-h)^2 = \frac{s_n{}^2}{4} + 1 - 2h + h^2$$

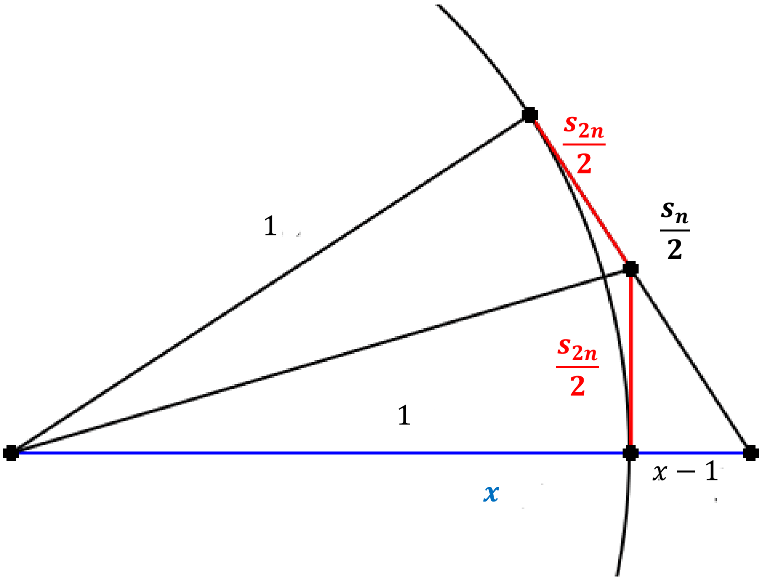
$$h^2 = 1 - \frac{s_n{}^2}{4}$$

$$s_{2n}{}^2 = \frac{s_n{}^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n{}^2}{4}} + 1 - \frac{s_n{}^2}{4}$$

$$s_{2n}{}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n{}^2}{4}} = 2 - 2\sqrt{\frac{4 - s_n{}^2}{4}}$$

$$s_{2n}{}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n{}^2}$$

Als nächstes arbeiten wir mit den regelmäßigen n-Ecken (n = 6,12, 24, …), die dem Einheitskreis umbeschrieben werden. Auch hier wird zuerst eine Rekursionsformel zur Berechnung der Seitenlänge des 2n-Ecks aus der Seitenlänge des n-Ecks hergeleitet.



$$1+\frac{{s_n}^2}{4}=x^2$$
$$(x-1)^2+\frac{{s_{2n}}^2}{4}=\left(\frac{s_n}{2}-\frac{s_{2n}}{2}\right)^2$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}1+\frac{sn^2}{4}=x^2\\(x-1)^2+\frac{s2n^2}{4}=\left(\frac{sn}{2}-\frac{s2n}{2}\right)^2\end{cases},\{x,s2n\}\right)|x>1$$
$$x=\frac{\sqrt{sn^2+4}}{2}\text{ and }s2n=\frac{2\cdot\left(\sqrt{sn^2+4}-2\right)}{sn}\text{ and }\sqrt{sn^2+4}>2$$

$$s_{2n}=\frac{2}{s_n}\left(\sqrt{4+{s_n}^2}-2\right)$$

Die Berechnung von s_{2n} mit $s_{2n}=\frac{2}{s_n}\left(\sqrt{4+{s_n}^2}-2\right)$ führt wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+{s_n}^2}-2\right)=0$ zur Vernachlässigung notwendiger Nachkommastellen, so dass die Ergebnisse für größere n beim Rechner falsch werden. Deshalb erfolgt die Berechnung mit der anschließend hergeleiteten Rekursionsgleichung:

$$s_{2n}=\frac{2}{s_n}\left(\sqrt{4+{s_n}^2}-2\right)$$

$$s_{2n}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{4+{s_n}^2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{4+{s_n}^2}+2\right)}{s_n\cdot\left(\sqrt{4+{s_n}^2}+2\right)}$$

$$s_{2n}=\frac{2\cdot(4+{s_n}^2-4)}{s_n\cdot\left(\sqrt{4+{s_n}^2}+2\right)}=\frac{2s_n}{2+\sqrt{4+{s_n}^2}}$$

Beim einbeschriebenen 6-Eck ist die Höhe jedes der sechs Teildreiecke $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Streckt man also dieses 6-Eck mit dem Faktor $\frac{2}{\sqrt{3}}$ und dem Kreismittelpunkt als Streckzentrum, so erhält man das umbeschriebene 6-Eck.
Daher beträgt bei diesem 6-Eck die Seitenlänge $\frac{2}{\sqrt{3}}$ *LE.*

Die begonnene Tabelle wird ergänzt.
<u>Es sind folgende Eingaben vorzunehmen:</u>
In Spalte E werden die Seitenlängen berechnet, Spalte B enthält nach wie vor die jeweilige Eckenzahl und Spalte F die zugehörigen Näherungswerte für π.
In den angegeben Zellen sind die folgenden Eingaben vorzunehmen.

$E1:\ =\frac{2.0}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $F1:\ =\frac{e1\cdot b1}{2}$

$E2:\ =\frac{2\cdot e1}{2+\sqrt{4+e1^2}}$

Die Zellen $E2$ und $F1$ sind jeweils bis zu den Zellen E20 und F20 zu füllen.

Man erhält folgendes Ergebnis:

B	C	D	E	F	G
6	3		1.15470...	3.46410161514	
12	3.10582854123		0.53589...	3.21539030917	
24	3.13262861328		0.26330...	3.1596599421	
48	3.13935020305		0.13108...	3.14608621513	
393216	3.14159265356		0.00001...	3.14159265366	
786432	3.14159265358		0.00000...	3.14159265361	
1572864	3.14159265359		0.00000...	3.14159265359	
3145728	3.14159265359		0.00000...	3.14159265359	

Ergänzung
Ausführliche Herleitung der Rekursionsgleichung ohne Rechner für die umbeschriebenen n-Ecke:

$$1+\frac{{s_n}^2}{4}=x^2 \qquad \Rightarrow x=\frac{1}{2}\sqrt{4+{s_n}^2}$$

$$(x-1)^2+\frac{{s_{2n}}^2}{4}=\left(\frac{s_n}{2}-\frac{s_{2n}}{2}\right)^2$$

$$x^2-2x+1+\frac{{s_{2n}}^2}{4}=\frac{{s_n}^2}{4}-\frac{s_n\cdot s_{2n}}{2}+\frac{{s_{2n}}^2}{4}$$

$$x^2-2x+1=\frac{{s_n}^2}{4}-\frac{s_n\cdot s_{2n}}{2}$$

$$1+\frac{{s_n}^2}{4}-\sqrt{4+{s_n}^2}+1=\frac{{s_n}^2}{4}-\frac{s_n\cdot s_{2n}}{2}$$

$$-\sqrt{4+{s_n}^2}+2=-\frac{s_n\cdot s_{2n}}{2}$$

$$s_{2n}=\frac{2}{s_n}\left(\sqrt{4+{s_n}^2}-2\right)$$

Quelle:
TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften,
Institut für Mathematik, Werner Neundorf
„π *und* e", Preprint No. M 06/04, März 2004