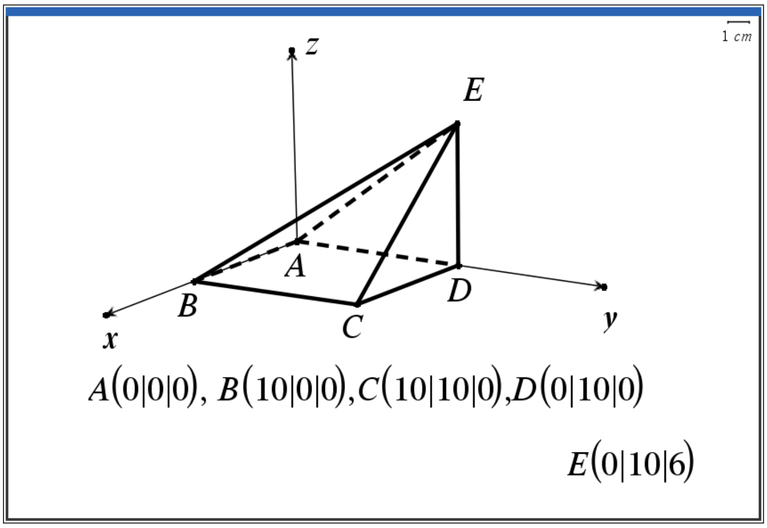
Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

Analytische Geometrie mit CAS – Lösungen und Anregungen zu einer IQB-Aufgabe aus dem Pool von 2021

Die folgenden Sreenshots sind die Präsentation eines Online-Workshops, der aufzeigen soll, wie mit dem CAS (MMS) des TI-Nspire™ CX II CAS eine Prüfungsaufgabe aus der Analytischen Geometrie gelöst werden kann. Darüber hinaus geben die Autoren Anregungen für den Einsatz der Problemstellung im Unterricht an. Der Workshop wurde im Rahmen der Tage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in Thüringen am 12.04.2022 gehalten.

Die zugehörige Aufgabe kann aus urheberrechtlichen Gründen hier nicht abgedruckt werden. Sie ist einzusehen unter:
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/
Prüfungsteil B / Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2) / Aufgabe 1 (CAS)

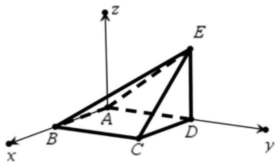
Mit der beigefügten tns-Datei kann die Bearbeitung direkt nachverfolgt werden.



Screen 1

$$a:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}10\\10\\0\end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix}0\\10\\0\end{bmatrix}:e:=\begin{bmatrix}0\\10\\6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\10\\6\end{bmatrix}$$

Screen 2



a: zu zeigen:

ΔBCE ist rechtwinklig

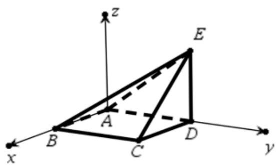
$\text{dotP}(\mathbf{b}-\mathbf{c},\mathbf{e}-\mathbf{c}) \blacktriangleright 0$

a: Inhalt der Oberfläche:

$$\frac{1}{2}\cdot\text{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot\text{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{e}) \blacktriangleright 10\cdot\sqrt{34}$$

$$100+2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6+10\cdot\sqrt{34}\right) \blacktriangleright 20\cdot\sqrt{34}+160$$

Screen 3



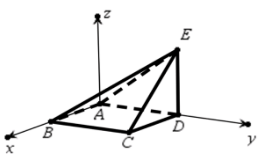
b: Gleichung der Ebene L, in der ΔBCE liegt:

$$\text{crossP}(\mathbf{b}-\mathbf{c},\mathbf{e}-\mathbf{c}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}-60\\0\\-100\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}:=\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(\mathbf{n},\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\mathbf{b}\right)=0 \blacktriangleright 3\cdot x+5\cdot z-30=0$$

Screen 4

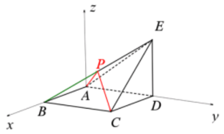


c: Winkel, den die Ebene L und die Grundfläche einschließen:

$\mathbf{n} \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$ und $\mathbf{m}:=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{n},\mathbf{m})}{\text{norm}(\mathbf{n})\cdot\text{norm}(\mathbf{m})}\right) \blacktriangleright 30.9638$$

Screen 5



d: Erläutern: Eine möglichst kurze Linie von A nach C über BE erhält man mit:

- P(10−10t|10t|6t)
- $PC \circ PB = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{59}$
- $2 \cdot |PC| \approx 15{,}2$

$p(t) := b + t \cdot (e - b)$ ▸ *Fertig*

$p(t)$ ▸ $\begin{bmatrix} 10-10\cdot t \\ 10\cdot t \\ 6\cdot t \end{bmatrix}$

$\text{solve}(\text{dotP}(c - p(t), b - p(t)) = 0, t)$

▸ $t=0$ or $t=\frac{25}{59}$

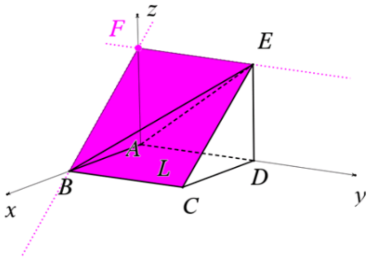
$2\cdot \text{norm}\left(c - p\left(\frac{25.}{59}\right)\right)$ ▸ 15.1825

$2\cdot \text{norm}(c - p(0))$ ▸ 20

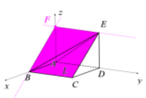
Screen 6

Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z−Achse wird mit F bezeichnet.

e: Punkt F und die Geraden, in denen L die xz−Ebene und die yz−Ebene schneidet, in die Abbildung einzeichnen.



Screen 7



f: Um wie viel Prozent ist das Volumen von ABCDEF größer als das Volumen von ABCDE?
(Lösung, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen.)

ABCDEF: Prisma mit $V_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AF| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot DE$

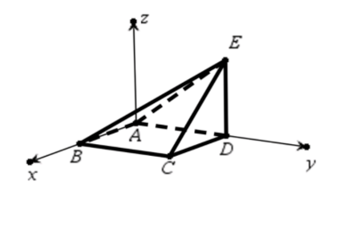
ABCDE: Pyramide mit $V_2 = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot DE$

Verhältnis: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{3}{2} \cdot V_2$

Screen 8

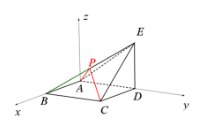
Überlegungenfür Zusätze (auch für eA):

Beginnen Sie nicht mit der ausformulierten IQB–Aufgabe, sondern stellen Sie nur das Schrägbild des Holzkörpers vor, verbunden mit der Aufforderung an die SuS, selbst mathematische Fragestellungen dazu zu entwickeln. Lassen Sie zunächst diese untersuchen, ehe die IQB–Aufgabenstellungenins Spiel kommen.



Zeigen Sie den SuS, welche Kompetenzen die Bildungsstandards in "Messen" sowie "Raum und Form" verlangen, damit die SuS auch eine Hilfestellung zur Entwicklung eigener Aufgaben haben

Screen 9



Eine möglichst kurze Linie von A nach C über BE erhält man auch mit anderen Lösungsmethoden als in Aufgabe d.

Erläutere die nebenstehende Variante.

$\mathbf{p}(t):=\mathbf{b}+t\cdot(\mathbf{e}-\mathbf{b})$ ▸ *Fertig*

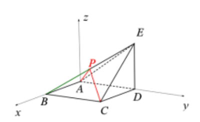
$\mathbf{p}(t)$ ▸ $\begin{bmatrix}10-10\cdot t\\ 10\cdot t\\ 6\cdot t\end{bmatrix}$

$\mathbf{s}(t):=\mathrm{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{p}(t))+\mathrm{norm}(\mathbf{a}-\mathbf{p}(t))$ ▸ *Fertig*

$\mathrm{fMin}(\mathbf{s}(t),t)|0\leq t\leq 1$ ▸ $t=\frac{25}{59}$

$\mathbf{s}\left(\frac{25}{59.}\right)$ ▸ 15.1825

Screen 10



Eine möglichst kurze Linie von A nach C über BE erhält man auch mit anderen Lösungsmethoden als in Aufgabe d.

Erläutere die nebenstehende Variante.

$\mathbf{p}(t):=\mathbf{b}+t\cdot(\mathbf{e}-\mathbf{b})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{s}(t):=\mathrm{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{p}(t))+\mathrm{norm}(\mathbf{a}-\mathbf{p}(t))$

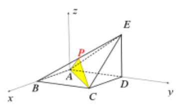
$\frac{d}{dt}(\mathbf{s}(t))$ ▸ $\frac{4\cdot(59\cdot t-25)}{\sqrt{59\cdot t^2-50\cdot t+25}}$

$\mathrm{solve}\left(\frac{4\cdot(59\cdot t-25)}{\sqrt{59\cdot t^2-50\cdot t+25}}=0,t\right)$ ▸ $t=\frac{25}{59}$

$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{s}(t))|t=\frac{25}{59}$ ▸ $\frac{118\cdot\sqrt{2006}}{85}$ ⚠

$\mathbf{s}\left(\frac{25}{59.}\right)$ ▸ 15.1825

Screen 11



Es sei P(t)∈BE.

Geben Sie den Flächeninhalt vom Dreieck ACP(t) als Funktion a1(t) an.

Für welches t ist der Flächeninhalt minimal?

Mittelpunkt H von AC: H(5|5|0)

$\mathbf{h}:=\begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix}$

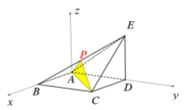
$\mathbf{a1}(t):=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{norm}(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot \mathrm{norm}(\mathbf{p}(t)-\mathbf{h})$

$\blacktriangleright$ *Fertig*

$\mathbf{a1}(t) \blacktriangleright 10\cdot\sqrt{118\cdot t^2-100\cdot t+25}$

$\mathrm{fMin}(\mathbf{a1}(t),t)|0\leq t\leq 1 \blacktriangleright t=\frac{25}{59}$

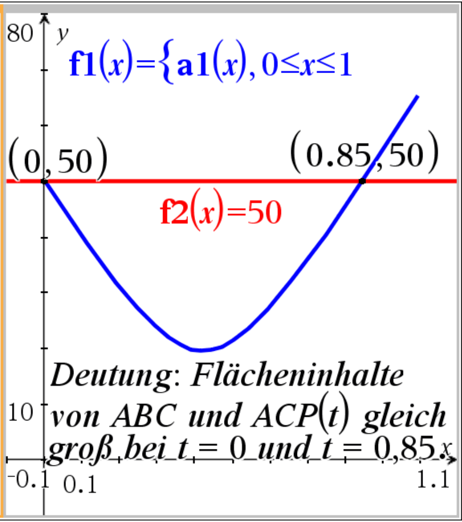
Screen 12



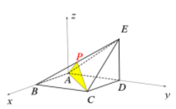
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion a1(t) (Flächeninhalt vom Dreieck ACP(t)) sowie die Funktion

y = 50.

Deuten Sie die Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen im Sachzusammenhang.



Screen 13



Es sei P(t)∈BE.

Das Dreieck ACP(t) teilt den Holzkörper in zwei Teilkörper.

Für welches t haben die Teilkörper gleiches Volumen?

$(\mathbf{p}(t))^{\mathrm{T}} \blacktriangleright [10-10\cdot t \quad 10\cdot t \quad 6\cdot t]$

Dreieck ABC mit Flächeninhalt 50:

Pyramide ABCP(t):

$\mathbf{v3}(t):=\frac{1}{3}\cdot 50\cdot 6\cdot t \blacktriangleright$ *Fertig* ABCP(t) halbes

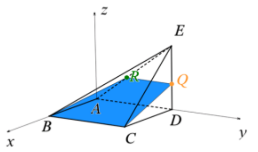
Volumen von ABCDE:

$\mathrm{solve}\left(\mathbf{v3}(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 100\cdot 6,t\right) \blacktriangleright t=1$

$(\mathbf{p}(1))^{\mathrm{T}}=\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \blacktriangleright [\mathrm{true} \quad \mathrm{true} \quad \mathrm{true}]$

Screen 14

Die Ebene ε durch die Punkte B, C und Q(0|10|2) zerlegt den Holzkörper in zwei Teilkörper. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Teilkörper?



$\text{solve}(6\cdot k=2,k) \blacktriangleright k=\frac{1}{3}$

$\mathbf{r}:=\left(\mathbf{g}\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{\mathsf{T}} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0 & \frac{10}{3} & 2\end{bmatrix}$

$\mathbf{q}:=\begin{bmatrix}0\\10\\2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0\\10\\2\end{bmatrix}$

$(\text{crossP}(\mathbf{b}-\mathbf{c},\mathbf{q}-\mathbf{c}))^{\mathsf{T}} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-20 & 0 & -100\end{bmatrix}$

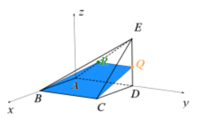
Ebene ε in NF:

$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\mathbf{b}\right)=0 \blacktriangleright x+5\cdot z-10=0$

Screen 15

Fortsetzung:

Die Ebene ε durch die Punkte B, C und Q(0|10|2) zerlegt den Holzkörper in zwei Teilkörper. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Teilkörper?



Abstand von E zur Ebene ε (x+5z−10=0):

$\mathbf{abst}:=\frac{0+5\cdot 6-10}{\sqrt{1^2+5^2}} \blacktriangleright \frac{10\cdot\sqrt{26}}{13}$

Trapezfläche:

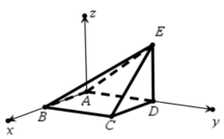
$\mathbf{trap}:=\frac{1}{2}\cdot\left(10+\text{norm}\left(\mathbf{r}^{\mathsf{T}}-\mathbf{q}\right)\right)\cdot\text{norm}(\mathbf{q}-\mathbf{c})$

$\blacktriangleright \frac{50\cdot\sqrt{26}}{3}$

$\mathbf{voben}:=\frac{1}{3}\cdot\mathbf{trap}\cdot\mathbf{abst} \blacktriangleright \frac{1000}{9}$

$\frac{\mathbf{voben}}{200-\mathbf{voben}} \blacktriangleright \frac{5}{4}$

Screen 16



Alle Seitenflächen sollen mit je genau einer Farbe eingefärbt werden. Nur zueinander kongruente Seitenflächen sollen stets mit derselben Farbe gestrichen werden.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, wenn drei (vier, fünf) Farben zur Verfügung stehen?

Kongruent sind BCE und ABE, sowie CDE und ADE.

Bei drei Farben:

Für ABCD 3 Möglichkeiten, für BCE und ABE noch 2, für CDE und ADE noch 1 Möglichkeit der Auswahl, insgesamt 3·2·1= 6 Möglichkeiten.

Bei vier Farben 4·3·2=24 Möglichkeiten.

Bei fünf Farben 5·4·3=60 Möglichkeiten.

Screen 17

Autoren:
Dr. Hubert Langlotz
Dr. Wilfried Zappe