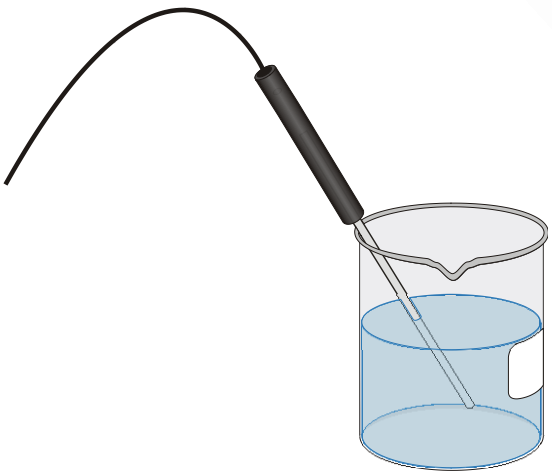
Abkühlung:
Wie heiße Objekte abkühlen

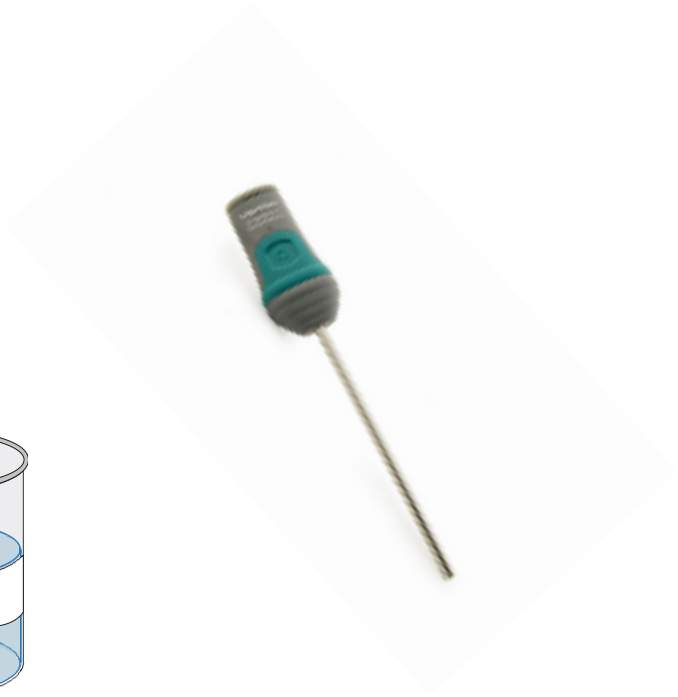
Wenn Sie ein heißes Getränk trinken, haben Sie schon erfahren, dass es allmählich abkühlt. Das Newtonsche Gesetz der Abkühlung liefert uns ein Modell für die Abkühlung. Es besagt, dass der Temperaturunterschied T_{diff} zwischen dem heißen Objekt und seiner Umgebung mit der Zeit exponentiell abnimmt:

$$T_{diff} = T_0 e^{-kt}$$

In dem Modell ist T_0 die anfängliche Temperaturdifferenz und k ist eine positive Konstante.

Bei dieser Übung werden Sie einen Temperatursensor verwenden, indem Sie bei einem sich abkühlenden Sensor Daten sammeln. Anschließend können Sie verschiedene mathematische Modelle an die Daten anpassen.





ZIELE

- Daten während der Abkühlung aufzeichnen.
- Die aufgenommenen Datenpunkte mit einer Exponentialfunktion modellieren.

MATERIALIEN

TI-Nspire™ CX II-T Handheld
TI Bluetooth®-Adapter
Vernier Go Direct® Temperature (GDX-TMP)
Becherglas / Becher
Warmwasser

DURCHFÜHRUNG

1. Zunächst müssen Sie den Go Direct Temperatursensor entweder über ein USB-Kabel oder über Bluetooth mit dem TI-Nspire™ CX II-T Handheld verbinden.

Wenn Sie ein USB-Kabel verwenden:

- Schließen Sie das Kabel an die Buchse oben rechts am TI-Nspire™ CX II-T Handheld und an die Buchse am Temperatursensor an.
- Schalten Sie den TI-Nspire™ CX II-T Handheld ein und starten Sie die Vernier DataQuest-App. Wenn Sie die Home-Taste auf dem TI-Nspire™ CX II-T Handheld drücken, ist Vernier DataQuest das grüne Symbol unten rechts. Navigieren Sie zu diesem Symbol und wählen Sie es aus.
- Wählen Sie im Menü [menu] die Option "1: Neues Experiment" .
- Fahren Sie unten mit Schritt 2 fort.

Wenn Sie Bluetooth verwenden:

- Drücken Sie die Taste des Vernier Go DirectTempreratursensors. Die rote LED sollte anfangen zu blinken.
- Schalten Sie den TI-Nspire™ CX II-T Handheld ein und starten Sie die Vernier DataQuest-App. Wenn Sie die Home-Taste auf dem TI-Nspire™ CX II-T Handheld drücken, ist Vernier DataQuest das grüne Symbol unten rechts. Navigieren Sie zu diesem Symbol und wählen Sie es aus.
- Wählen Sie im Menü [menu] die Option "1: Neues Experiment" .
- Wenn Ihr DataQuest-Bildschirm einen Temperaturwert [°C] anzeigt und Ihr Temperatursensorsensor eine grün blinkende LED hat, können Sie das Experiment starten. Fahren Sie mit Schritt 2 fort. Andernfalls müssen Sie Ihren Bewegungssensor drahtlos mit dem TI-Nspire™ CX II-T Handheld verbinden. Dies wird als „Koppeln" bezeichnet.
    a. Klicken Sie auf "Bluetooth-Sensor Hinzufügen".
    b. Es sollte eine Liste der verfügbaren Sensoren angezeigt werden.
    c. Wählen Sie Ihren Sensor aus. Jeder Sensor hat eine Seriennummer. Wenn mehr als ein Sensor in der Liste erscheint, überprüfen Sie die Seriennummer, die auf dem Sensorgehäuse aufgedruckt ist.
    d. Wählen Sie "Verbinden". Wenn die Verbindung hergestellt ist, sollte die LED am Bewegungssensor grün blinken und der Sensorname und die Seriennummer des Sensors auf dem Bildschirm angezeigt werden.
    e. Wählen Sie "OK" zum Beenden

2. Die Vernier DataQuest App sollte nun einen Temperaturwert (in °C) anzeigen. Erwärmen Sie die Spitze des Temperatursensors mit Ihren Fingern, um zu sehen, ob sich der Temperaturwert ändert.
3. Füllen Sie ein Becherglas / Becher mit ca. 45° bis 55° heißem Wasser. Stellen Sie den Temperatursensor in das Becherglas und warten Sie etwa 20 Sekunden, bis der Sensor die Temperatur des Wassers erreicht hat. Anstatt auf die Abkühlung des Wassers zu warten, nehmen wir den Sensor aus dem Wasser und beobachten die Abkühlung des Sensors selbst. Nehmen Sie dazu den Sensor aus dem Wasser und legen ihn auf die Tischkante. Achten Sie darauf, dass nichts die Spitze des Sensors berührt.
4. Sammeln Sie die Daten während der Abkühlung. Starten Sie die Datenerfassung, indem Sie den grünen Pfeil anklicken. Die Datenerfassung läuft drei Minuten lang. Gleichzeitig entwickelt sich das Temperatur-Zeit-Diagramm.
5. Das Newtonsche Abkühlungsgesetz modelliert den Temperaturunterschied zwischen dem erwärmten Objekt und seiner Umgebung. Verwenden Sie als Schätzwert für die Raumtemperatur die Mindesttemperatur im Diagramm. Klicken Sie auf einen beliebigen Datenpunkt und verwenden Sie ► und ◄ , um die Werte aus dem Diagramm abzulesen und die Anfangs- und Mindesttemperatur zu bestimmen. Runden Sie die Temperaturwerte auf das nächste ganze Grad ab (z.B. 24,64° zu 24°) und tragen Sie sie in die Ergebnistabelle ein.

ERGEBNISTABELLE

Anfangstemperatur (°C)	
Mindesttemperatur (°C)	
Differenz Anfang-Mindest = T_0	

Exponentialmodell		
$T = T_0 e^{-kt} + T_{Raum}$	T_0	
	k	
	T_{Raum}	
Kurvenanpassung mit Regression		
$y = ab^x$	A	
	B	
	C	

Modellgleichung y = A*exp(–C*x) + B	

AUSWERTUNG

1. Beginnen Sie Ihre Auswertung mit der Beantwortung der Aufgabe 1.
2. Da das Modell für das Newtonsche Abkühlungsgesetz die Differenz zwischen der Temperatur des warmen Objekts und seiner Umgebung verwendet, $T - T_{Raum} = T_0 e^{-kt}$, können wir die Modellgleichung umformen zu $T = T_0 e^{-kt} + T_{Raum}$. Eine Form einer Exponentialfunktion ist gegeben durch y = A*exp(–C*x) + B . Bestimmen Sie anhand der Lage der Terme die Entsprechung der Terme im Modell und der Exponentialfunktion. Vervollständigen Sie die folgende Gegenüberstellung für die Parameter A, B und T_0, T_{Raum} und k.

Variable im Modell	Variable in der Exponentialfunktion
T_0	
k	
T_{Raum}	

3. Da Sie Werte für die Anfangs- und Raumtemperatur haben, können Sie versuchen, das Modell mit einer Schätzung für den Parameter k zu zeichnen.
   a. Wählen Sie im Menü „4: Analysieren“ ► “7: Modell”.
   b. Geben Sie **A*exp(–C*x)+B** als Gleichung für Ihr Modell ein. Wählen Sie “OK”.
   c. Geben Sie die Werte für die Parameter A (den Wert für T_0) und B (die Raumtemperatur) ein.
   d. Nun können Sie einen Wert für C vermuten und sich dann das resultierende Diagramm ansehen. Um eine gute Anpassung zu erhalten, müssen Sie mehrere Werte für C ausprobieren. Beginnen Sie mit C = 0,01.
   e. Wählen Sie „OK“
   f. Um eine gute Anpassung zu erhalten, müssen Sie den Wert von C verändern. Verändern Sie den Wert mit den Aufwärts- und Abwärtspfeilen im Detailfeld links vom Diagramm [Modell]. Sie können den Wert von C auch anklicken und einen Wert Ihrer Wahl eingeben.
   g. Experimentieren Sie solange, bis Sie einen Wert gefunden haben, der gut zu den Daten passt und beantworten Sie Aufgabe 2.
4. Sie können auch automatisch eine Exponentialfunktion an die Daten anpassen. Da die Exponentialkurvenanpassung von DataQuest nicht die Raumtemperatur berücksichtigt, muss dieses extra berücksichtigt werden.
   a. Gehen Sie in DataQuest in die Tabellenansicht. Wählen Sie im Menü „2: Daten“ ► “3: Neue berechnet Spalte”.
   b. Geben Sie als Name **Korrigierte Temp**, als Kurzname **Korrigiert** und als Maßeinheit **C** ein. (Hier ist nicht der Parameter C gemeint, sondern Grad Celsius.)
   c. Geben Sie als Ausdruck **Temperatur-„Wert“** ein. Wenn z.B. die Raumtemperatur 25 °C ist, dann geben Sie **Temperatur-25** ein. Hinweis: Der Begriff „Temperatur“ muss genau mit dem Namen der Spalte übereinstimmen. Wenn Sie nicht sicher sind, wie er eingegeben wurde, finden Sie die verfügbaren Spaltennamen unter dem Eingabefeld „Ausdruck“.
   d. Wählen Sie „OK“.

e. Fügen Sie eine neue Seite „Data-Quest“ ein. Wählen Sie im Menü „4: Einfügen“ ► “9: Vernier DataQuest”.

f. Klicken Sie die Graphenansicht ⌊⌐ an.

g. Wählen Sie im Menü „3: Graph“ ► „4: Variablen der y-Achse wählen“ ► „Korrigierte Temp“.

h. Wählen Sie anschließend im Menü „4: Analysieren“ ► „6: Kurvenanpassung“ ► „6: Exponentiell (ab^x)“.

i. Tragen Sie die Parameter aus der automatischen Anpassung in Ihre Ergebnistabelle ein und beantworten Sie anschließend die Aufgaben 3 – 8. Wählen Sie „OK“, um ihr Diagramm zu sehen.

AUFGABEN

1. Ist das Diagramm mit dem Modell einer abnehmenden Exponentialfunktion vereinbar? Inwiefern?
2. Tragen Sie die Gleichung des Modells in die Ergebnistabelle ein.
3. Wie passt die Regression im Vergleich zum Modell? Wie können beide Modelle die Daten gut anpassen, wenn die Anpassungsparameter unterschiedlich sind?
4. Bestimmen sie den Wert von e^{-kt} , wenn $t = 0$ ist.
5. Wie groß ist die Temperaturdifferenz, wenn t sehr groß ist? Wie groß ist die Temperatur des Sensors zu diesem Zeitpunkt?
6. Welche Größe wird mit k gemessen? Was können Sie am Versuchsaufbau ändern, um den Wert von k bei einem weiteren Versuch zu verringern?
7. Verwenden Sie entweder die Modellgleichung oder die Regressionsgleichung, um die Zeit vorherzusagen, die der Sensor benötigt, um jeweils eine Temperatur von 1 °C über der Raumtemperatur zu erreichen.
8. Wenn der Temperaturunterschied zu Beginn halbiert wird, dauert es dann halb so lange, bis die Temperatur 1 °C über der Raumtemperatur liegt? Erkläre.

ERWEITERUNG

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz besagt, dass die Änderungsrate der Temperatur einer Flüssigkeit direkt proportional zur Differenz zwischen Ihrer Temperatur und der Temperatur der Umgebing ist. Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{Raum})$$

wobei T_{Raum} die Umgebungstemperatur darstellt. Lösen Sie die oben angegebene Differentialgleichung (mit Angabe der Schritte) und zeigen Sie dass $T = (T_0 - T_{Raum})e^{-kt} + T_{Raum}$. In dieser Gleichung steht T_0 für die Anfangstemperatur.

ALLGEMEINES

Wenn Sie die Verbindung zwischen einem Go Direct Sensor und dem TI-Nspire™ CX II-T Handheld über Bluetooth trennen möchten, halten Sie die Taste am Go Direct Sensor einfach drei Sekunden lang gedrückt. Die blinkende LED sollte erlöschen. Wenn Sie die Taste erneut drücken, beginnt die LED rot zu blinken, was bedeutet, dass keine Verbindung besteht.

Diese Anleitung wurde für einen Go Direct Stainless Steel –Temperature Sensor (GDX-TMP) geschrieben, Sie können aber auch einen GO Direct Wide-Range Temperature Probe (GDX-WRT) verwenden. Eine Änderung der Anleitung ist nicht erforderlich.